

Решение:

① Банахово - полное нормированное п-во.

Полное п-во в котором $\forall$ фундаментальная последовательность сходится.

Гильбертово - пространство со скалярным произведением (u, v) полное по норме $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

$C^k(\Omega)$ - пространство k -раз непрерывно дифференцируемых на Ω функций, ограниченных на Ω ($f(x)$ - функция на Ω , если $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon f(x) \equiv 0$, $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$)

линейное

$L_p(\Omega) = \{f(x) \mid f(x) \text{ измеримо по Лебегу на } \Omega, \int_\Omega |f|^p dx < \infty\}$

$L_p(\Omega)$ - Банахово $\forall p \geq 1 \quad \|u\|_{L_p(\Omega)} = \sqrt[p]{\int_\Omega |u|^p dx}$

Если $p=2$ $L_2(\Omega)$ - Гильбертово $(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x) dx$

$L_{2,loc}(\Omega) = \{f(x) \mid f(x) \text{ измеримо на } \Omega, \forall \Omega' \subset\subset \Omega \int_{\Omega'} |f|^2 dx < \infty\}$

линейное

$\Omega' \subset\subset \Omega \Leftrightarrow \Omega' \subset \Omega, \Omega' \neq \Omega$

$H^1(\Omega) = \{f(x) \mid f(x) \in L_2(\Omega), \forall \alpha: |\alpha| \leq 1 \quad D^\alpha f \in L_2(\Omega)\}$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$
многоиндекс
 $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$

$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ - α -свобод.
м-я.

Гильбертово

$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |f|^2 + |\nabla f|^2 dx}$

$(f, g)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega fg + (\nabla f, \nabla g) dx$

Кто принесёт это как шпаргалку на экзамен
Тот будет незамедлительно казнён!

(2) p - $\chi \ f(x) \in L_{p,loc}(\Omega)$ узгнлвствє л-ододжєт. $n=0.5$

где $f(x) \in L_{loc}(\Omega)$, если $\forall g \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = (-1)^{k+1} \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

$$L = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} - \text{my guess}$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

⑨ $f_1(x) = (x+1)|x-1| \quad x \in [-2, 2]$

$f_1'(x) = 750$ ододж. и-а оп-ун $f_1'(x)$ на овор $[-2, 2]$ е сав

$$\forall g \in C^1[-2, 2] \quad \int_{-2}^2 f_1(x) g'(x) dx = - \int_{-2}^2 f_1'(x) g(x) dx$$

$$\int_{-2}^2 (x+1)|x-1| g'(x) dx = \int_{-2}^1 \underbrace{-(x+1)(x-1)}_{x^2-1} \underbrace{g'(x)}_1 dx + \int_1^2 \underbrace{(x+1)(x-1)}_1 \underbrace{g'(x)}_1 dx =$$

$$= [\text{unsep. no. reson}] = - \underbrace{(x+1)(x-1)}_{\substack{\parallel \\ 0}} g(x) \Big|_{-2}^1 - \int_{-2}^1 (-2x) g(x) dx + \underbrace{(x^2-1)}_{\substack{\parallel \\ 0}} g(x) \Big|_1^2 -$$

$$-\int_1^2 2x g(x) dx = -\int_{-2}^2 f_1'(x) g(x) dx \Rightarrow f_1'(x) = \begin{cases} -2x & x \in [-2, 1] \\ 2x & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x \operatorname{sign}(x-1) \\ \uparrow \\ \text{n.b. } x \in [-2, 2] \end{cases}$$

⑤ $f_2(x) = x/(3 - \sin x)$ $\forall x \in [-1, 1] \Rightarrow 3 - \sin x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_2(x) = 3x - x \sin x \quad x \in [-2, 2] \quad - \text{ für } g-2$$

ищет максимумы и-то $f_2(x) = 3 - \sin x - x \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ По стволу o body. произвольна она имеет и o body. пр.

и она рівна масивності $\Rightarrow$

$$f_2'(x) = 3 - \sin x - x \cos x$$

③ Пусть $f(x) \in H'(\Omega)$
 Пусть $S \subseteq \Omega$; S - б-д) некая область в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Тогда следом г-ии $f|_S$ мы назовем функцию, которая является регуляризатором действия на г-ю $f(x)$ оператора след, который порождает и следующую равенство:

а) Справедливо неравенство ^{лемма} о следе $\forall f \in H'(\Omega)$

$$\exists C > 0 \quad \|f|_S\|_{L_2(S)} \leq C \|f\|_{H'(\Omega)}, \quad C \text{ не зависит от } f(x)$$

б) т.к. $C'(\Omega)$ плотно в $H'(\Omega)$

где $f(x) \in H'(\Omega)$ $\exists$ последовательность $f_n(x) \in C'(\Omega)$:
 $\|f_n(x) - f(x)\|_{H'(\Omega)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

в) Тогда по лемме о следе

$$\exists f|_S \in L_2(S) : f_n|_S \rightarrow f|_S$$

Здесь $f_n|_S$ - это след непрерывной на $\overline{\Omega}$ г-ии $L_2(S)$ по лемме г-и
 S сужение значения г-ии с Ω на S (это
 т.е. $f_n|_S = f_n(x)$ при $x \in S$)

г) $f|_S(x)$ - искомым след г-ии из $H'(\Omega)$

Пусть $f(x) = \begin{cases} -x & \text{x-иррацион.} \\ 3 & \text{x-рациональн.} \end{cases}$ много рациональных точек составителей
 много почти ноль во всем $\mathbb{R}$.

Возьмем $f_n(x) = -x, x \in [-1, 1], f_n(x) \in C'[-1, 1]$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{H'(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))^2 - |\nabla(f_n - f)|^2 dx}$$

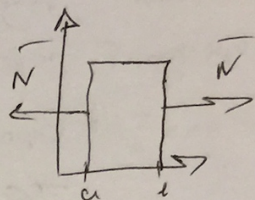
$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} 0 & \text{x-иррац} \\ -x-3 & \text{x-рацион.} \end{cases} \Rightarrow f_n(x) - f(x) = 0 \text{ п.в. на } \text{отр. } [-1, 1]$$

$$\text{Значит } \|f_n(x) - f(x)\|_{H'[-1, 1]} \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} 0 \rightarrow 0$$

③

order

$\frac{f}{x=0} = 0$



$$u = u(t, x) \quad t \in [0, T], \quad x \in [a, b]$$

Наталье удачи

$$U(a, x) = U_0(x) \quad x \in (a, b)$$

Красное здание 2-го этажа

$$-u_x(t, a) = \varphi_1(t) \quad t \in [0, T]$$

$$u_x(t, b) = u_2(t) \quad t \in [0, T]$$

for $\frac{\partial H}{\partial N} = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial N} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \cos(n, x_i)$$

В нашем случае $n=1$

Уровне согласование:

Условие сопряжения:

В точках $(0, a)$ и $(0, b)$ "вырезаются" начальные и краевые условия $\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{u_{\text{кр.}}}{u_0'(a)} = u_x(0, a) &= \frac{u_{\text{краев.}}}{-\varphi_1(0)} \\ u_0'(b) = u_x(0, b) &= \varphi_2(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_0'(a) &= -\varphi_1(0) \\ u_0'(b) &= \varphi_2(0) \end{aligned}$

Условие согласование входных данных - это ограничение на входные данные позволяющие обеспечить непрерывность решения на границе Ω .