Модуль 1. Стационарные нелинейные операторные уравнения

1.1. Дать определение Банахова пространства. Примеры Банаховых пространств.

1.2. Дать определение Гильбертова пространства. Примеры Гильбертовых пространств.

1.3. Дать определение сильной и слабой сходимости в банаховом пространстве.

1.4. Дать определение оператора, функционала.

1.5. Дать определение линейного, полулинейного, квазилинейного дифференциального уравнения. Примеры.

1.6. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $\overset{0}{C}{}^k(\overline{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $H_1(\Omega)$, $\overset{0}{H}_1(\Omega)$. Какие из них являются банаховыми, гильбертовыми? Выписать (где возможно) норму, скалярное произведение.

1.7. Дать определение финитной в Ω функции. Дать определение пространства $\overset{0}{C}{}^k(\Omega)$.

1.8. Пусть $g \geq 0$ – финитная в Ω непрерывная функция. Является ли нормой в $L_2(\Omega)$ функция
$$\rho(u) = \int\limits_{\Omega} g(x)u^2(x)\,dx?$$

1.9. Дать определение классического решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона.

1.10. Дать определение обобщенного решения класса $H^1(\Omega)$ первой краевой задачи для уравнения Пуассона.

1.11. Дать определение обобщенного решения класса $H^1(\Omega)$ второй краевой задачи с однородными граничными условиями для уравнения Пуассона.

1.12. Дать определение ограниченного нелинейного оператора $A : B \to B^*$ (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B)

1.13. Дать определение монотонного оператора $A : B \to B^*$. Пример монотонного оператора.

1.14. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$. Пример строго монотонного оператора.

1.15. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$. Пример семинепрерывного оператора.

1.16. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является строго монотонным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.17. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является семинепрерывным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.18. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является коэрцитивным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.19. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является ограниченным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.20. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является слабо компактным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.21. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является оператором с полуограниченной вариацией. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.22. Привести краевую задачу $-\Delta u = f$, $u\,|_{\partial\Omega} = 0$, где Δ – оператор Лапласа, $\Omega \subset E_n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, к операторному уравнению с коэрцитивным, слабо компактным оператором.

1.23. Дать определение оператора $A : B \to B^*$ с полуограниченной вариацией.

1.24. Сформулировать и доказать лемму об остром угле для стационарного случая.

1.25. Дать определение сепарабельного и рефлексивного пространств.

1.26. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) со слабокомпактным оператором. Построение последовательности галеркинских приближений, доказательство ограниченности галеркинской последовательности.

1.27. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) со слабокомпактным оператором. Доказать слабую сходимость последовательности галеркинских приближений к решению задачи.

1.28. Сформулировать и доказать теорему единственности решения операторного уравнения $Au = h$ с коэрцитивным, слабо компактным и строго монотонным оператором.

1.29. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором. Построение последовательности галеркинских приближений, доказательство ограниченности галеркинской последовательности.

1.30. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором. Доказать слабую сходимость последовательности галеркинских приближений к решению задачи.

1.31. Сформулировать и доказать теорему сильной сходимости последовательности галеркинских приближений для уравнения с семинепрерывным оператором.

1.32. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с оператором с полуограниченной вариацией. Доказать слабую сходимость последовательности галеркинских приближений к решению задачи.

Модуль 2. Функциональные пространства, используемые при изучении нестационарных задач

2.1. Дать определение эквивалентности норм. Примеры.

2.2. Доказать эквивалентность в $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ норм

$$\|u\|_1 = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } \|u\|_2 = \left(\int\limits_\Omega u^2 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.3. Доказать, что в конечномерном нормированном пространстве все нормы эквивалентны.

2.4. Пусть $g \geq 0$ – финитная в Ω непрерывная функция. Является ли нормой в $L_2(\Omega)$ функция

$$\rho(u) = \int\limits_\Omega g(x) u^2(x) \, dx?$$

2.5. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.

2.6. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой на множестве.

2.7. Дать определение пространства $C(S, X)$, записать норму, указать тип.

2.8. Дать определение пространства $C^m(S, X)$, записать норму, указать тип.

2.9. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t\in S} \left\|u^{(j)}(t)\right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S,X)$.

2.10. Сформулировать и доказать аппроксимационную теорему Вейерштрасса для пространства $C(S,X)$.

2.11. Дать определение простой функции из класса $(S \to X)$. Интеграл Бохнера от простой функции.

2.12. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ измеримой по Бохнеру. Привести пример.

2.13. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ интегрируемой по Бохнеру на множестве S, на множестве $B \subset S$. Привести пример.

2.14. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a,b)$, $t \in [0,1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

2.15. Дать определение пространства $L_p(S,X)$, записать норму, указать тип.

2.16. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{L_p(S,X)} = \left(\int\limits_S \|u\|_X^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

задает норму в пространстве $L_p(S,X)$.

2.17. Дать определение пространства $L_2(S,X)$, записать норму, скалярное произведение.

2.18. Дать определение существенно ограниченной функции.

2.19. Дать определение пространства $L_\infty(S,X)$, записать норму, указать тип.

2.20. Сформулировать теорему Рисса о представлении.

2.21. Сформулировать и доказать аналог леммы об "остром угле"для нестационарного случая.

2.22. Дать определение коэрцитивности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T),X) \to L_{p'}((0,T),X^*)$.

2.23. Дать определение ограниченности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T),X) \to L_{p'}((0,T),X^*)$.

2.24. Дать определение семинепрерывности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T),X) \to L_{p'}((0,T),X^*)$.

2.25. Дать определение монотонности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T),X) \to L_{p'}((0,T),X^*)$.

2.26. В каком пространстве необходимо искать решение следующей задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = h(t), \quad t \in [0,T],$$

$$u(0) = u_0,$$

где $h(t), A(t)u \in L_q((0,T), X^*)$.

2.27. Сформулировать теорему разрешимости в эволюционном случае для операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = h(t), \quad t \in [0,T],$$

где $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

2.28. Условие дефинитной вариации. Сильная сходимость последовательности галеркинских приближений для для операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = h(t), \quad t \in [0,T],$$

где $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

Модуль 3. Метод слабой аппроксимации.

3.1. Сфорсулировать теорему Арцела.

3.2. Записать неравенство Гронуолла.

3.3. Определение компактного множества. Определение фундаментальной последовательности.

3.4. Дать определение равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной последовательности.

3.5. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $\overset{0}{C^k}(\overline{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $H_1(\Omega)$, $\overset{0}{H_1}(\Omega)$. Какие из них являются банаховыми, гильбертовыми? Выписать (где возможно) норму, скалярное произведение.

3.6. Для линейного в $Q_T = (0,T) \times \Omega$ уравнения

$$L(u) = f, \tag{3.1}$$

где дифференциальный оператор L имеет вид

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t}$$

и коэффициенты a_{ij}, b_i, c и правая часть f уравнения (3.1) — вещественные конечнозначные функции переменных t, x, сформулировать и доказать оценку принципа максимума

$$|u(t,x)| \leqslant e^{Mt}(Nt + q),$$

где $|f(t,x)| \leqslant N$, $|u \mid \Gamma_T| \leqslant q$, $c(t,x) \leqslant M$.

3.7. Для задачи Коши в $\Pi_T = (0, T) \times E_1$

$$L(u) = f, \quad u(0, x) = \varphi(x), \tag{3.2}$$

где дифференциальный оператор L имеет вид

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t}$$

и коэффициенты a_{ij}, b_i, c и правая часть f уравнения (3.2) – вещественные конечнозначные функции переменных t, x, сформулировать и доказать оценку принципа максимума

$$|u(t, x)| \leqslant e^{Mt}(Nt + q),$$

где $|f(t, x)| \leqslant N$, $|\varphi(t)| \leqslant q$, $c(t, x) \leqslant M$.

3.8. В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t, x) | x \in R, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассматривается задача определения пары функций $(u(t, x), a(t))$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$u_t = b(t)u_{xx} + a(t)u_x + f(t, x), \qquad (t, x) \in \Pi_{[0,T]},$$

$$u(0, x) = u_0(x), \qquad x \in R,$$

$$u(t, 0) = \phi(t), \qquad t \in [0, T],$$

где $b(t)$, $f(t, x)$, $u_0(x)$, $\phi(t)$ – известные функции. Привести данную обратную задачу к прямой.

3.9. В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t, x) | x \in R, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассматривается задача определения пары функций $(u(t, x), a(t))$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$u_t = u_{xx} + u_x + a(t)u + f(t, x), \qquad (t, x) \in \Pi_{[0,T]},$$

$$u(0, x) = u_0(x), \qquad x \in R,$$

$$u(t, 0) = \phi(t), \qquad t \in [0, T],$$

где $b(t)$, $f(t, x)$, $u_0(x)$, $\phi(t)$ – известные функции. Привести данную обратную задачу к прямой.

3.10. Дать определение слабой аппроксимации.

3.11. Доказать, что функция

$$a(\tau, t) = \begin{cases} 2a, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{2})\tau, \\ 0, & (n + \frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n + 1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

слабо аппроксимирует постоянную a на отрезке $[0, T]$

3.12. Доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{2})\tau, \\ 2, & (n + \frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n + 1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

3.13. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + u^2 + u^5 = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

3.14. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = u^4 - \sin t u^2, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

3.15. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + u + 2u^3 - 3u^5 = 0, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

3.16. Расщепить задачу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u^2(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in E_1$$

и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

3.17. Расщепить задачу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + (u^2(t,x)+1)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in E_1$$

и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

3.18. Расщепить задачу

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x_2} = \alpha\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x_1^2} + \beta\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x_2^2},$$
$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1} = \gamma\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x_2^2} + \theta\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x_2^2},$$
$$u_i(0,x) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad (x_1,x_2) \in E_2$$

на два одномерных задачи.

3.19. Написать расщепление задачи в $\Pi_{[0,T]} = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ (x,y) \in E_2\}$

$$u_t(t,x,y) = u^2 + u_{xx} + u_{yy} + f(t,x,y), \quad u(0,x,y) = u_0(x,y),$$

разбив каждый целый шаг на четыре дробных.

3.20. Написать расщепление задачи в $\Pi_{[0,T]} = \{0 \leqslant t \leqslant T,\, (x, y) \in E_2\}$

$$u_t(t, x, y) = u_{xx} + uu_{yy} + f(t, x, y), \quad u(0, x, y) = u_0(x, y),$$

разбив каждый целый шаг на четыре дробных.

3.21. Написать расщепление следующей задачи (наиболее удобным образом)

$$y'(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 0.$$

Выписать приближенное решение на первых двух целых шагах. Получить общую формулу для приближенного решения.

3.22. Написать расщепление следующей задачи (наиболее удобным образом)

$$(1 + x^2)y'(x) + y(x) = arctg\, x, \quad y(0) = 0.$$

Выписать приближенное решение на первых двух целых шагах. Получить общую формулу для приближенного решения.

3.23. Для различных обратных задач уметь доказывать выполнение условия переопределения для решения прямой задачи, в предположении, что выполнены условия согласования входных данных.

3.24. Сформулировать теорему сходимости метода слабой аппроксимации для дифференциальных уравнений.