Модуль 1. Стационарные нелинейные операторные уравнения

1.1. Дать определение Банахова пространства. Примеры Банаховых пространств.

1.2. Дать определение Гильбертова пространства. Примеры Гильбертовых пространств.

1.3. Дать определение сильной и слабой сходимости в банаховом пространстве.

1.4. Дать определение оператора, функционала.

1.5. Дать определение линейного, полулинейного, квазилинейного дифференциального уравнения. Примеры.

1.6. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $\overset{0}{C}{}^k(\overline{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $H_1(\Omega)$, $\overset{0}{H}_1(\Omega)$. Какие из них являются банаховыми, гильбертовыми? Выписать (где возможно) норму, скалярное произведение.

1.7. Дать определение финитной в Ω функции. Дать определение пространства $\overset{0}{C}{}^k(\Omega)$.

1.8. Пусть $g \geq 0$ – финитная в Ω непрерывная функция. Является ли нормой в $L_2(\Omega)$ функция

$$\rho(u) = \int\limits_{\Omega} g(x)u^2(x)\,dx?$$

1.9. Дать определение классического решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона.

1.10. Дать определение обобщенного решения класса $H^1(\Omega)$ первой краевой задачи для уравнения Пуассона.

1.11. Дать определение обобщенного решения класса $H^1(\Omega)$ второй краевой задачи с однородными граничными условиями для уравнения Пуассона.

1.12. Дать определение ограниченного нелинейного оператора $A : B \to B^*$ (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B)

1.13. Дать определение монотонного оператора $A : B \to B^*$. Пример монотонного оператора.

1.14. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$. Пример строго монотонного оператора.

1.15. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$. Пример семинепрерывного оператора.

1.16. Доказать, что оператор $A = -\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является строго монотонным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.17. Доказать, что оператор $A = -\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является семинепрерывным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.18. Доказать, что оператор $A = -\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является коэрцитивным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.19. Доказать, что оператор $A = -\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является ограниченным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.20. Доказать, что оператор $A = -\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является слабо компактным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.21. Доказать, что оператор $A = -\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является оператором с полуограниченной вариацией. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.22. Привести краевую задачу $-\Delta u = f$, $u\,|_{\partial\Omega} = 0$, где Δ – оператор Лапласа, $\Omega \subset E_n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, к операторному уравнению с коэрцитивным, слабо компактным оператором.

1.23. Дать определение оператора $A : B \to B^*$ с полуограниченной вариацией.

1.24. Сформулировать и доказать лемму об остром угле для стационарного случая.

1.25. Дать определение сепарабельного и рефлексивного пространств.

1.26. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) со слабокомпактным оператором. Построение последовательности галеркинских приближений, доказательство ограниченности галеркинской последовательности.

1.27. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) со слабокомпактным оператором. Доказать слабую сходимость последовательности галеркинских приближений к решению задачи.

1.28. Сформулировать и доказать теорему единственности решения операторного уравнения $Au = h$ с коэрцитивным, слабо компактным и строго монотонным оператором.

1.29. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором. Построение последовательности галеркинских приближений, доказательство ограниченности галеркинской последовательности.

1.30. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором. Доказать слабую сходимость последовательности галеркинских приближений к решению задачи.

1.31. Сформулировать и доказать теорему сильной сходимости последовательности галеркинских приближений для уравнения с семинепрерывным оператором.

1.32. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с оператором с полуограниченной вариацией. Доказать слабую сходимость последовательности галеркинских приближений к решению задачи.

Модуль 2. Функциональные пространства, используемые при изучении нестационарных задач

2.1. Дать определение эквивалентности норм. Примеры.

2.2. Доказать эквивалентность в $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ норм

$$\|u\|_1 = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } \|u\|_2 = \left(\int\limits_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.3. Доказать, что в конечномерном нормированном пространстве все нормы эквивалентны.

2.4. Пусть $g \geq 0$ – финитная в Ω непрерывная функция. Является ли нормой в $L_2(\Omega)$ функция

$$\rho(u) = \int\limits_{\Omega} g(x)u^2(x)\,dx?$$

2.5. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.

2.6. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой на множестве.

2.7. Дать определение пространства $C(S, X)$, записать норму, указать тип.

2.8. Дать определение пространства $C^m(S, X)$, записать норму, указать тип.

2.9. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\|u^{(j)}(t)\right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.

2.10. Сформулировать и доказать аппроксимационную теорему Вейерштрасса для пространства $C(S, X)$.

2.11. Дать определение простой функции из класса $(S \to X)$. Интеграл Бохнера от простой функции.

2.12. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ измеримой по Бохнеру. Привести пример.

2.13. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ интегрируемой по Бохнеру на множестве S, на множестве $B \subset S$. Привести пример.

2.14. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

2.15. Дать определение пространства $L_p(S, X)$, записать норму, указать тип.

2.16. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{L_p(S,X)} = \left(\int\limits_{S} \|u\|_X^p\,ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает норму в пространстве $L_p(S, X)$.

2.17. Дать определение пространства $L_2(S, X)$, записать норму, скалярное произведение.

2.18. Дать определение существенно ограниченной функции.

2.19. Дать определение пространства $L_\infty(S, X)$, записать норму, указать тип.

2.20. Сформулировать теорему Рисса о представлении.

2.21. Сформулировать и доказать аналог леммы об "остром угле"для нестационарного случая.

2.22. Дать определение коэрцитивности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

2.23. Дать определение ограниченности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

2.24. Дать определение семинепрерывности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

2.25. Дать определение монотонности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

2.26. В каком пространстве необходимо искать решение следующей задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = h(t), \quad t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0,$$

где $h(t), A(t)u \in L_q((0,T), X^*)$.

2.27. Сформулировать теорему разрешимости в эволюционном случае для операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = h(t), \quad t \in [0, T],$$

где $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

2.28. Условие дефинитной вариации. Сильная сходимость последовательности галеркинских приближений для для операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = h(t), \quad t \in [0, T],$$

где $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.