Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков

# ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Красноярск
СФУ
2012

УДК 517.9(07)
ББК 22.1я73
Т338

Составители Сорокин Р.В., Фроленков И.В.

Т338 Теория и методы решения нелинейных дифференциальных уравнений: Учебно-методическое пособие [Текст] / Р.В. Сорокин, И.В. Фроленков. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012.- 34 с.

Пособие обеспечивает самостоятельную работу студентов по дисциплине «Теория и методы решения нелинейных дифференциальных уравнений». Содержит темы для самостоятельного изучения теоретического курса, задачи для самостоятельного решения, а также примеры экзаменационных билетов.

Предназначено для студентов направлений подготовки 010300.68 «Математика. Компьютерные науки» и 010500.68 «Прикладная математика и информатика».

УДК 517.9(07)
ББК 22.1я73

# Содержание

# Введение

Математические модели, содержащие нелинейные дифференциальные уравнения возникают при формализации различных процессов. На сегодняшний день нелинейные дифференциальные уравнения составляют важное самостоятельное направление исследований в области математической физики.

В курсе предлагается изучить ряд методов исследования стационарных и эволюционных нелинейных операторных уравнений. Для изучения нестационарных дифференциальных уравнений предполагается изучение специальных функциональных пространств. В основе исследования нелинейных уравнений через операторные уравнения лежит метод монотонности.

Отдельный блок посвящен введению в теорию обратных задач, которые составляют важное самостоятельное направление исследований в области дифференциальных уравнений.

Рассматривается метод слабой аппроксимации, как один из современных методов решения нелинейных задач математической физики. На его основе предлагается изучить ряд модельных алгоритмов исследования корректности некоторых обратных задач для параболических уравнений.

В каждом из приведенных разделов курса для самостоятельного изучения материала и закрепления информации, полученной на лекционных и семинарских занятиях, приведены определенные темы и задачи, а также указаны ссылки на рекомендуемую по данной теме литературу. Задания и темы приведены в порядке, соответствующем графику изучения дисциплины.

По окончанию лекции или цикла лекций преподаватель сообщает номера тем и заданий, относящихся к разобранной теме.

Усвоение данного материала проверяется непосредственно на экзамене (в качестве дополнительных вопросов).

## Что нужно знать перед освоением дисциплины

Для изучения курса «Теория и методы решения нелинейных дифференциальных уравнений» необходимо освоить следующие дисциплины:

- Математический анализ, см.[13].

- Дополнительные главы математического анализа, см.[14].
- Дифференциальные уравнения, см.[15].
- Уравнения математической физики (уравнения с частными производными), см.[16].
- Функциональный анализ, см.[17].
- Методы вычислений, см.[18].
- Вопросы прикладного функционального анализа, см.[19].
- Современные и актуальные проблемы математики и компьютерных наук.

Для повторения материала и получения справочной информации рекомендуется использовать литературу, приведенной в ссылках.

## Раздел 1. Стационарные нелинейные операторные уравнения

### Темы для самостоятельного изучения

1.1.1. Дать определение конечномерного и бесконечномерного пространства. Аксиомы нормы и скалярного произведения. Понятие эквивалентности норм. Показать что в конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны. [16, 17]

1.1.2. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Выписать примеры таких пространств, указать нормы и скалярные произведения. [17]

1.1.3. Дать определение сильной и слабой сходимости в Банаховом пространстве, определение функционала, оператора, понятие линейности, непрерывности, ограниченности. Норма функционала. [17]

1.1.4. Изучить формулировку и доказательство теоремы единственности решения операторного уравнения $Au = h$ с коэрцитивным, слабо компактным и строго монотонным оператором. [2, 4, 5, 17]

1.1.5. Изучить формулировку и доказательство теоремы о сильной сходимости последовательности галеркинских приближений для уравнения с семинепрерывным оператором. [2, 4, 5, 17]

### Задачи для самостоятельного решения

См. литературу [2, 4, 5, 11, 12, 17]

1.2.1. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является строго монотонным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.2.2. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является семинепрерывным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.2.3. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является коэрцитивным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.2.4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является ограниченным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.2.5. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является слабо компактным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.2.6. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является оператором с полуограниченной вариацией. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

1.2.7. Доказать, что любой строго монотонный оператор является оператором с полуограниченной вариацией.

1.2.8. Пусть $C(r) \geq 0$ - непрерывная функция, $C(r) = 0$ только при $r = 0$, $C(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Доказать, что если $C(\|u-u_k\|)\|u-u_k\| \to 0$, при $k \to +\infty$, то отсюда следует, что $\|u - u_k\| \to 0$.

1.2.9. Показать, что если $\partial\Omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $f \geq \alpha > 0$ на $\overline{\Omega}$, то в ограниченной области $\Omega \subset E_n$ задача

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^3 = f(x), \qquad f \in L_2(\Omega),$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

не имеет классического решения.

1.2.10. Привести краевую задачу $-\Delta u = f$, $u \mid_{\partial\Omega}= 0$, где $\Delta$ – оператор Лапласа, $\Omega \subset E_n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, к операторному уравнению с коэрцитивным, слабо компактным оператором. Дать функционально-аналитическую формулировку.

1.2.11. Привести краевую задачу

$$-\Delta u + \alpha|u| = f(x),$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа, $\Omega \subset E_n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, к операторному уравнению и проверить свойства оператора.

# Раздел 2. Функциональные пространства, используемые при изучении нестационарных задач

### Темы для самостоятельного изучения

2.1.1. Пространство функций измеримых и интегрируемых по Лебегу. Пространства Соболева. Типы пространств. Нормы и скалярные произведения. [11, 16, 17]

2.1.2. Понятие верхнего и нижнего пределов. Лемма Больцано-Вейерштрасса. [12]

2.1.3. Понятие сопряженных и самосопряженных пространств, Основные функциональные неравенства (Нер-ва Шварца, Минковского, Гронуолла, Гёльдера, Юнга и др). [1, 16, 17, 11]

2.1.4. Доказать, что $\forall t \in R, \forall n \in N$ имеет место неравенство [12]

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nt)^2 C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = nt(1-t).$$

2.1.5. Сформулировать и доказать аппроксимационную теорему Вейерштрасса (о плотности множества многочленов из $(S \to X)$ в $C(S, X)$). Доказательство привести для случая $S = [0, 1]$. [2, 17, 4, 5]

2.1.6. Сформулировать и доказать теорему о плотности множества ступенчатых функций в $L_p(S, X)$. Доказательство привести для случая $S = [0, 1]$. [2, 4, 5, 17]

2.1.7. Сформулировать и доказать теорему о полноте множества измеримых по Бохнеру, существенно ограниченных функций из $(S \to X)$. [2, 4, 5, 17]

2.1.8. Доказать, что сопряженное к $L_p(S, X)$ пространство $(L_p(S, X))^*$ можно отождествлять с пространством $L_q(S, X^*)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. [2, 4, 5, 17]

### Задачи для самостоятельного решения

См. литературу [2, 4, 5, 11, 12, 16, 17]

2.2.1. Доказать эквивалентность в $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ норм

$$\|u\|_1 = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } \|u\|_2 = \left( \int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.2.2. Пусть $g \geq 0$ – финитная в $\Omega$ непрерывная функция. Является ли нормой в $L_2(\Omega)$ функция

$$\rho(u) = \int_\Omega g(x) u^2(x) \, dx?$$

2.2.3. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t\in S} \left\| u^{(j)}(t) \right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S,X)$.

2.2.4. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a,b)$, $t \in [0,1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

2.2.5. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{L_p(S,X)} = \left( \int_S \|u\|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает норму в пространстве $L_p(S,X)$.

2.2.6. Доказать, что выражение

$$(u,v)_{L_p(S,X)} = \int_S (u(s), v(s))_H \, ds$$

задает скалярное произведение в пространстве $L_p(S,H)$.

2.2.7. Доказать, что $\forall u(t) \in L_p(S,X)$, $1 \leqslant p < \infty$, функция $u_h$, определенная формулой

$$u_h(t) = \begin{cases} u(t+h), & \text{при } t+h \in S, \\ 0, & \text{иначе }, \end{cases}$$

также принадлежит пространству $L_p(S,X)$ и $\|u_h - h\|_{L_p(S,X)} \to 0$ при $h \to 0$.

## Раздел 3. Нестационарные нелинейные операторные уравнения. Метод монотонности

### Темы для самостоятельного изучения

3.1.1. Сформулировать и доказать теорему Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. [11, 16, 17, 20]

3.1.2. Сформулировать и доказать аналог леммы об "остром угле"для нестационарного случая. [2, 4, 5, 17, 20]

3.1.3. Пусть

$$W = \left\{ u(t) | u(t) \in L_p(S, X), \frac{du}{dt} \in L_q(S, x^*), u(0) = 0 \right\}.$$

Доказать, что $W$ вложено непрерывно в $C(S, H)$. Где $H$ - гильбертово пространство, и вложение $X \subset H \subset X^*$ плотно. [2, 4, 5, 17, 20]

3.1.4. Сформулировать и доказать, при каких условиях возможно сильная сходимость последовательности галеркинских приближений для для операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = h(t), \quad t \in [0, T],$$

где $A(t)(u) : L_p((0, T), X) \to L_{p'}((0, T), X^*)$. [2, 4, 5, 17]

3.1.5. Метод Фурье, как метод решения смешанных задач и задач Коши, основанный на использовании спектральных свойств входящего в уравнение эллиптического оператора. [2, 11]

3.1.6. Определение абстрактной функции. Непрерывность абстрактной функции. Производная абстрактной функции. [2, 11]

3.1.7. Преобразование Фурье и его свойства. Дать определение прямого и обратного преобразования Фурье по одной переменной. Дать определение многомерного преобразования Фурье. Связь с одномерным преобразованием.[2, 11]

3.1.8. Выписать формулу обращения многомерного преобразования Фурье. Сформулировать теорему, в каком случае справедлива данная формула. Указать в каком смысле понимается интеграл.[2, 11]

3.1.9. Использование преобразования Фурье при исследовании обратных задач. [3]

### Задачи для самостоятельного решения

См. литературу [2, 4, 5, 11, 12, 16, 17]

3.2.1. Пояснить в каком пространстве необходимо искать решение следующей задачи и почему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = h(t), \quad t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0,$$

где $h(t), A(t)u \in L_q((0,T), X^*)$.

3.2.2. В области $Q_T = \{(t,x) | x \in \Omega \subset E^n, 0 \leqslant t < T\}$ требуется найти решение волнового уравнения методом Фурье

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(t,x),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \qquad u_t(0,x) = \varphi_1(x)$$

и краевому условию

$$u(t,x)|_{S_T} = 0,$$

где $S_T = \partial\Omega \times [0,T]$.

Здесь и далее выражение $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ обозначает сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$.

Матрица коэффициентов $a_{jk}(x)$ положительно определена, т.е. для любого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и для всех $x \in \Omega$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \qquad \gamma > 0, \quad \gamma - const.$$

3.2.3. Используя преобразование Фурье в $\Pi_{(0,\infty)} = \{(t,x) | 0 < t < \infty, \quad x \in E_n\}$ найти решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

3.2.4. Используя преобразование Фурье привести в $\Pi_{(0,\infty)} = \{(t,x)|0 < t < \infty, \quad x \in E_1\}$ задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u_{xx} = 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

3.2.5. Используя преобразование Фурье привести в $\Pi_{(0,\infty)} = \{(t,x)|0 < t < \infty, \quad x \in E_n\}$ задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

3.2.6. Используя преобразование Фурье привести в $\Pi_{(0,\infty)} = \{(t,x)|0 < t < \infty, x \in E_1\}$ задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u_{xx} = f(t,x),$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

# Раздел 4. Метод слабой аппроксимации

## Темы для самостоятельного изучения

4.1.1. Метод слабой аппроксимации для обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

4.1.2. Метод слабой аппроксимации для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

4.1.3. Скорость сходимости метода слабой аппроксимации [1].

## Задачи для самостоятельного решения

См. литературу [1, 2, 12, 17]

4.2.1. Доказать, что функция

$$a(\tau,t)=\begin{cases}2a, & n\tau<t\leqslant(n+\frac{1}{2})\tau,\\ 0, & (n+\frac{1}{2})\tau<t\leqslant(n+1)\tau,\end{cases}\qquad n=0,1,\ldots,N-1.$$

слабо аппроксимирует постоянную $a$ на отрезке $[0,T]$.

4.2.2. Доказать, что функция

$$b(\tau,t)=\begin{cases}0, & n\tau<t\leqslant(n+\frac{1}{2})\tau,\\ 2, & (n+\frac{1}{2})\tau<t\leqslant(n+1)\tau,\end{cases}\qquad n=0,1,\ldots,N-1.$$

слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0,T]$.

4.2.3. Линеаризовать задачу

$$\frac{du(t)}{dt}+u^2=0,\quad u(0)=u_0,\quad t\geq 0.$$

Доказать, что решение линеаризованной задачи сходится к решению исходной.

4.2.4. Линеаризовать задачу

$$\frac{du(t)}{dt}+\sin(u)=0,\quad u(0)=u_0,\quad t\geq 0.$$

Доказать, что решение линеаризованной задачи сходится к решению исходной.

4.2.5. Записать расщепление задачи Коши для уравнения Риккати и обосновать сходимость решений $u^\tau$ к решению $u$ исходной задачи.

4.2.6. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt}+u^2+u^5=f(t),\quad u(0)=u_0,\quad t\geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

4.2.7. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt}=u^4-\sin tu^2,\quad u(0)=0,\quad t\geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

4.2.8. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + u + 2u^3 - 3u^5 = 0, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

4.2.9. Написать расщепление следующей задачи (наиболее удобным образом)

$$y'(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 0.$$

Выписать приближенное решение на первых двух целых шагах. Получить общую формулу для приближенного решения.

4.2.10. Написать расщепление следующей задачи (наиболее удобным образом)

$$(1 + x^2)y'(x) + y(x) = arctg\, x, \quad y(0) = 0.$$

Выписать приближенное решение на первых двух целых шагах. Получить общую формулу для приближенного решения.

4.2.11. Линеаризовать задачу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u^2(t,x),$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in E_1.$$

Доказать сходимость решения линаризованной задачи к решению исходной.

4.2.12. Линеаризовать задачу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x)u_x(t,x),$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in E_1.$$

Доказать сходимость решения линаризованной задачи к решению исходной.

4.2.13. Расщепить задачу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u^2(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in E_1$$

и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

4.2.14. Расщепить задачу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + (u^2(t,x)+1)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in E_1$$

и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

4.2.15. Расщепить задачу

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x_2} = \alpha\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x_1^2} + \beta\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1} = \gamma\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x_2^2} + \theta\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x_2^2},$$

$$u_i(0,x) = u_0(x), \quad t \geq 0, \quad (x_1,x_2) \in E_2$$

на две одномерных задачи.

4.2.16. Написать расщепление задачи в $\Pi_{[0,T]} = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ (x,y) \in E_2\}$

$$u_t(t,x,y) = u^2 + u_{xx} + u_{yy} + f(t,x,y), \quad u(0,x,y) = u_0(x,y),$$

разбив каждый целый шаг на четыре дробных.

4.2.17. Написать расщепление задачи в $\Pi_{[0,T]} = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ (x,y) \in E_2\}$

$$u_t(t,x,y) = u_{xx} + uu_{yy} + f(t,x,y), \quad u(0,x,y) = u_0(x,y),$$

разбив каждый целый шаг на четыре дробных.

4.2.18. Записать расщепление многомерного параболического уравнения на одномерные.

4.2.19. Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = [0,T] \times E_2$ задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial u}{\partial x_2} = \mu\triangle u + f, \qquad \mu > 0, \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x \in E_2. \tag{4.2}$$

Здесь $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа; $a_1$, $a_2$, $\mu$ — постоянные; $u$ — неизвестная; $f$, $\varphi$ — заданные функции.

Доказать сходимость МСА в случае, когда задача (4.1), (4.2) слабо аппроксимируется задачей

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 2a_1 \frac{\partial u^\tau}{\partial x_1} = 2\mu \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_1^2}, \qquad n\tau < t \leqslant (n+1/2)\tau,$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 2a_2 \frac{\partial u^\tau}{\partial x_2} = 2\mu \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_2^2} + 2f, \qquad (n+1/2)\tau < t \leqslant (n+1)\tau,$$

$$u^\tau(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in E_2.$$

4.2.20. Доказать сходимость МСА в случае, когда задача (4.1), (4.2) слабо аппроксимируется задачей

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 3a_1 \frac{\partial u^\tau}{\partial x_1} = 3\mu \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_1^2}, \qquad n\tau < t \leqslant (n+1/3)\tau,$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 3a_2 \frac{\partial u^\tau}{\partial x_2} = 3\mu \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_2^2}, \qquad (n+1/3)\tau < t \leqslant (n+2/3)\tau,$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 3f, \qquad (n+2/3)\tau < t \leqslant (n+1)\tau,$$

$$u^\tau(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in E_2.$$

4.2.21. Доказать сходимость МСА в случае, когда задача (4.1), (4.2) слабо аппроксимируется задачей

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 2a_1 \frac{\partial u^\tau}{\partial x_1} = 2\mu \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_1^2} + 2f, \qquad n\tau < t \leqslant (n+1/2)\tau,$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 2a_2 \frac{\partial u^\tau}{\partial x_2} = 2\mu \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_2^2}, \qquad (n+1/2)\tau < t \leqslant (n+1)\tau,$$

$$u^\tau(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in E_2.$$

# Раздел 5. Обратные задачи и методы их решения

## Темы для самостоятельного изучения

5.1.1. Разрешимость задачи идентификации коэффициента при младшей производной для параболического полулинейного уравнения в классе гладких ограниченных функций [28].

5.1.2. Поведение решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения. Достаточные условия ограниченности решения и его стремления к нулю при $t \to +\infty$ [27].

5.1.3. Разрешимость задачи идентификации функции источника в системе составного типа [26, 23, 24].

### Задачи для самостоятельного решения

См. литературу [2, 1, 12, 17]

5.2.1. Доказать, что если на некотором отрезке $[c, d]$ известны два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$, то коэффициенты $a_1$, $a_0$ определяются однозначно.

5.2.2. Доказать, что если на некотором отрезке $[c, d]$ известно решение $y(x)$ уравнения

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,$$

и существуют точки $x_1 \in [c, d]$, $x_2 \in [c, d]$, такие, что

$$y(x_1) y'(x_2) - y(x_2) y'(x_1) \neq 0,$$

то коэффициенты $a_1$, $a_0$ определяются однозначно.

5.2.3. Доказать, что если на отрезке $[c, d]$ заданы решения $y_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, уравнения

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x),$$

такие, что определитель Вронского $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)|_{x=c} \neq 0$, $y_0^{(i)}(c) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, тогда функции $a_i(x)$ $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и $f(x)$ на отрезке $[c, d]$ определяются однозначно.

5.2.4. Указать физический смысл коэффициентов $c$, $k$, $q$ и правой части $f$ параболического уравнения $c u_t = (k u_x)_x - q u + f$.

5.2.5. Сформулировать задачу с обратным направлением времени для уравнения теплопроводности.

5.2.6. Поставить задачу идентификации функции источника параболического уравнения с финальным переопределением в случае данных Коши.

5.2.7. Поставить задачу идентификации функции источника параболического уравнения с финальным переопределением в случае первой краевой задачи с однородными граничными условиями.

5.2.8. Поставить задачу идентификации функции источника одномерного параболического уравнения с финальным переопределением в случае второй краевой задачи.

5.2.9. Поставить задачу идентификации младшего коэффициента параболического уравнения с финальным переопределением в случае данных Коши.

5.2.10. Поставить задачу идентификации коэффициента теплоемкости для параболического уравнения с переопределением в фиксированной точке в случае данных Коши.

5.2.11. Поставить задачу одновременной идентификации младшего коэффициента и функции источника с условиями переопределения, заданными на различных гиперплоскостях.

5.2.12. Поставить задачу одновременной идентификации коэффициента теплоемкости и функции источника с условиями переопределения, заданными на одной гиперплоскости.

5.2.13. Поставить задачу идентификации младшего коэффициента с интегральным условием переопределения.

5.2.14. Пусть дано уравнение

$$u_t(t,x) = a^2(t)u_{xx}(t,x) + b(t)u_x + c(t)u + \lambda(t)f(t,x).$$

Наряду с функцией $u(t,x)$ неизвестными являются коэффициенты $c(t)$ и $\lambda(t)$. Укажите физический смысл условий переопределения:
а). $u(t,\gamma) = \varphi_1(t), \quad u_x(t,\gamma) = \varphi_2(t)$,
б). $u(t,\gamma_1) = \varphi_3(t), \quad u(t,\gamma_2) = \varphi_4(t)$,
с). $u(t,a(t)) = \varphi_5(t), \quad u_x(t,a(t)) = \varphi_6(t)$.

5.2.15. В области $G_{[0,T]}$ привести задачу идентификации коэффициента $\lambda(t)$

$$u_t = a^2 u_x x + u_x + u^2 + \lambda(t) f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

$$u(t,\gamma) = \varphi(t),$$

к прямой задаче для нагруженного уравнения.

5.2.16. В области $G_{[0,T]}$ привести задачу идентификации коэффициента $\lambda(t)$

$$u_t = a^2 u_x x + \lambda(t) u + f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

$$u(t,\gamma) = \varphi(t),$$

к прямой задаче для нагруженного уравнения.

5.2.17. В области $G_{[0,T]}$ привести задачу идентификации коэффициента $\lambda(t)$

$$u_t = a^2 u_x x + \lambda(t) u_x + f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

$$u(t,\gamma) = \varphi(t),$$

к прямой задаче для нагруженного уравнения.

5.2.18. В области $G_{[0,T]}$ привести задачу идентификации коэффициента $\lambda(t)$

$$u_t = a^2 u_{xx} + \lambda(t) u + f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

$$u(t,a(t)) = \varphi(t),$$

к прямой задаче для нагруженного уравнения.

5.2.19. Сформулировать задачу идентификации функции источника с однородными условиями переопределения, заданными на гладкой параметрической кривой $x = a(t)$. Выписать вспомогательную прямую задачу для нагруженного (содержащего следы неизвестных функций) уравнения.

5.2.20. Пусть дана некоторая последовательность функций $u^\tau(t,x)$. Записать достаточные условия для сходимости данной последовательности вместе с производными по $x$ до второго порядка включительно к функции $u(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Omega)$.

5.2.21. Доказать, что если некоторая функция $u(t,x)$ удовлетворяет задаче

$$\left(\frac{a^2(t)u_{xx}(t,\gamma)+f(t,\gamma)}{\varphi'(t)}\right)u_t(t,x) = a^2(t)u_{xx}(t,x)+f(t,x),$$
$$u(0,x)=u_0(x),$$

и известно, что

$$\sum_{k=0}^{4}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x)\right| \leqslant C, \quad u_0(\gamma)=\varphi(0), \quad |\varphi'(t)| \geq \delta > 0,$$

то справедливо $u(t,\gamma)=\varphi(t)$.

5.2.22. Пусть функция $u(t,x)$ есть решение в $G_{[0,T]}$ задачи Коши для нагруженного уравнения

$$u_t = a^2u_{xx} + \frac{\varphi_t(t) - a^2u_{xx}(t,0) - f(t,0)}{S_\delta(u_x(t,0))}u_x + f(t,x),$$
$$u(0,x)=u_0(x),$$

и справедливо

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}f\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_0\right| \leqslant C.$$

Функция $S_\delta$ – есть функция срезки. Доказать, что существует $0 < t^*$, такая что $u(t,x) \geq \delta > 0$ в $G_{[0,t^*]}$. Выписать какие условия на входные данные необходимы для этого.

5.2.23. Доказать, что если некоторая функция $u(t,x)$ удовлетворяет задаче

$$u_t(t,x) = u_{xx} +$$
$$+\left(\frac{\varphi'(t) - u_{xx}(t,a(t) - u_x(t,a(t))a'(t) - f(t,a(t))}{\varphi(t)}\right)u(t,x) + f(t,x),$$
$$u(0,x)=u_0(x),$$

и известно, что

$$\sum_{k=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x)\right| \leqslant C, \quad u_0(a(0))=\varphi(0), \quad |\varphi(t)| \geq \delta > 0,$$

то $u(t,a(t))=\varphi(t)$.

5.2.24. В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, $T = const > 0$, рассматривается задача идентификации тройки функций $(u(t,x)$, $a(t)$, $g(t))$

$$a(t)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(t)u_x(t,x) + c(t)u(t,x) + g(t)f(t,x),$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1,\\ &u(t,A) = \varphi_1(t),\\ &u(t,B) = \varphi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad A, B - const. \end{aligned}$$

Выписать прямую задачу для данной обратной.

5.2.25. В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, $T = const > 0$, рассматривается задача идентификации тройки функций $(u(t,x)$, $a(t)$, $b(t))$

$$a(t)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(t)u_x(t,x) + c(t)u(t,x) + g(t)f(t,x),$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1,\\ &u(t,A) = \varphi_1(t),\\ &u(t,B) = \varphi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad A, B - const. \end{aligned}$$

Выписать прямую задачу для данной обратной.

5.2.26. В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, $T = const > 0$, рассматривается задача идентификации тройки функций $(u(t,x)$, $a(t)$, $b(t))$

$$a(t)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(t)u_x(t,x) + c(t)u(t,x) + g(t)f(t,x),$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1,\\ &u(t,A) = \varphi_1(t),\\ &u(t,B) = \varphi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad A, B - const. \end{aligned}$$

Выписать прямую задачу для данной обратной.

5.2.27. В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, $T = const > 0$, рассматривается задача идентификации четверки функций $(u(t,x)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t))$

$$a(t)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(t)u_x(t,x) + c(t)u(t,x) + g(t)f(t,x),$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1,\\ &u(t,A) = \varphi_1(t),\\ &u(t,B) = \varphi_2(t),\\ &u(t,C) = \varphi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad A, B, C - const. \end{aligned}$$

Выписать прямую задачу для данной обратной.

5.2.28. В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, $T = const > 0$, рассматривается задача идентификации четверки функций $(u(t,x)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t))$

$$a(t)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(t)u_x(t,x) + c(t)u(t,x) + g(t)f(t,x),$$

$$\begin{aligned}
&u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1,\\
&u(t,A) = \varphi_1(t),\\
&u(t,B) = \varphi_2(t),\\
&u(t,C) = \varphi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad A, B, C - const.
\end{aligned}$$

Выписать прямую задачу для данной обратной.

5.2.29. В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, $T = const > 0$, рассматривается задача идентификации четверки функций $(u(t,x)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t))$

$$a(t)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(t)u_x(t,x) + c(t)u(t,x) + g(t)f(t,x),$$

$$\begin{aligned}
&u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1,\\
&u(t,0) = \varphi_1(t),\\
&u_x(t,0) = \varphi_2(t),\\
&u_{xx}(t,0) = \varphi_3(t), \quad t \in [0,T]
\end{aligned}$$

Выписать прямую задачу для данной обратной.

5.2.30. В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, $T = const > 0$, рассматривается задача идентификации пятерки функций $(u(t,x)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $g(t))$

$$a(t)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(t)u_x(t,x) + c(t)u(t,x) + g(t)f(t,x),$$

$$\begin{aligned}
&u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1,\\
&u(t,0) = \varphi_1(t),\\
&u_x(t,0) = \varphi_2(t),\\
&u_{xx}(t,0) = \varphi_3(t),\\
&u_{xxx}(t,0) = \varphi_4(t), \quad t \in [0,T]
\end{aligned}$$

Выписать прямую задачу для данной обратной.

5.2.31. В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$, $T = const > 0$, рассматривается задача идентификации пятерки функций $(u(t,x)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $g(t))$

$$a(t)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(t)u_x(t,x) + c(t)u(t,x) + g(t)f(t,x),$$

$$\begin{aligned}
&u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_1,\\
&u(t,0) = \varphi_1(t),\\
&u(t,A) = \varphi_2(t),\\
&u(t,B) = \varphi_3(t),\\
&u(t,C) = \varphi_4(t), \quad t \in [0,T], \quad A, B, C - const.
\end{aligned}$$

Выписать прямую задачу для данной обратной.

## Примеры экзаменационных билетов по дисциплине

Следующие примеры экзаменационных билетов приведены для ознакомления со сложностью и компоновкой билетов. Этот перечень не претендует на полноту и не включает в себя все возможные темы, изучаемые в дисциплине. Полный список вопросов приведен в приложении к программе дисциплины, составленной в соответствии с образовательными стандартами.

**Билет 1.**

1. Дать определение монотонного оператора $A : B \to B^*$.

2. Сформулировать лемму об остром угле для стационарного случая.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$a(\tau,t) = \begin{cases} 2a, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 0, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

слабо аппроксимирует постоянную $a$ на отрезке $[0,T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = u^2 + uu_x + 1, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 2.**

1. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$.

2. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, ($B$ – банахово пространство, $B^*$ – пространство, сопряженное к $B$) с семинепрерывным оператором. Построение последовательности галеркинских приближений.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{2})\tau, \\ 2, & (n + \frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + u^2 + u^5 = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 3.**

1. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Примеры пространств.

2. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{L_p(S,X)} = \left( \int\limits_S \|u\|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

   задает норму в пространстве $L_p(S, X)$.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{3})\tau, \\ 3, & (n + \frac{1}{3})\tau < t \leqslant (n + \frac{2}{3})\tau, \\ 0, & (n + \frac{2}{3})\tau < t \leqslant (n+1)\tau \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = 7 + u^4 + \sin tu^2, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 4.**

1. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$.

2. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, ($B$ – банахово пространство, $B^*$ – пространство, сопряженное к $B$) с семинепрерывным оператором.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$a(\tau, t) = \begin{cases} 2a, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{2})\tau, \\ 0, & (n + \frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

слабо аппроксимирует постоянную $a$ на отрезке $[0, T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + uu_x + u^5 = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 5.**

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.

2. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, ($B$ – банахово пространство, $B^*$ – пространство, сопряженное к $B$) с оператором с полуограниченной вариацией.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{2})\tau, \\ 2, & (n + \frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

4. Расщепить задачу
$$\frac{du(t)}{dt} = \sin u + u, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$
на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 6.**

1. Дать определение простой функции из класса $(S \to X)$. Интеграл Бохнера от простой функции.
2. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.
3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция
$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{3})\tau, \\ 3, & (n + \frac{1}{3})\tau < t \leqslant (n + \frac{2}{3})\tau, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \\ 0, & (n + \frac{2}{3})\tau < t \leqslant (n + 1)\tau \end{cases}$$
слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$.
4. Расщепить задачу
$$\frac{du(t)}{dt} + u^2 = f(t) + 2u^3, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$
на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 7.**

1. Дать определение пространства $C(S, X)$, записать норму, указать тип.
2. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ интегрируемой по Бохнеру на множестве $S$, на множестве $B \subset S$. Привести пример.
3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция
$$b(\tau, t) = \begin{cases} 3, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{3})\tau, \\ 0, & (n + \frac{1}{3})\tau < t \leqslant (n + \frac{2}{3})\tau, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \\ 0, & (n + \frac{2}{3})\tau < t \leqslant (n + 1)\tau \end{cases}$$
слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = uu_x - \sin tu^2, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 8.**

1. Дать определение коэрцитивности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T),X) \to L_{p'}((0,T),X^*)$.

2. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t\in S} \left\|u^{(j)}(t)\right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S,X)$.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$a(\tau,t) = \begin{cases} 2a, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 0, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1.$$

слабо аппроксимирует постоянную $a$ на отрезке $[0,T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + uu_x = f(t) - u^3, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 9.**

1. Дать определение пространства $L_\infty(S,X)$, записать норму, указать тип.

2. Сформулировать лемму об остром угле для стационарного случая.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau,t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 2, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1.$$

слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0,T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = u^2 + 3 + \cos t u^2, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 10.**

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.

2. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{3})\tau, \\ 3, & (n + \frac{1}{3})\tau < t \leqslant (n + \frac{2}{3})\tau, \\ 0, & (n + \frac{2}{3})\tau < t \leqslant (n + 1)\tau \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + u^2 + u^3 = 2, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

**Билет 11.**

1. Дать определение оператора $A : B \to B^*$ с полуограниченной вариацией.

2. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

3. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} -1, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{2})\tau, \\ 1, & (n + \frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n + 1)\tau, \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

слабо аппроксимирует ноль на отрезке $[0, T]$

4. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = u^4 - \sin t u^2 + 1, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

# Библиографический список


### — Основная литература —

1. Белов, Ю.Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор // Красноярск: Краснояр.гос.ун-т, 1999. - 236 с.

2. Белов, Ю.Я. Методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие / Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков, Т.Н. Шипина; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF ; 707 кб). - Красноярск : ИПК СФУ, 2007. - 140 online. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции ; УМКД № 19-2007). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: свободный. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/19/u_posob.pdf

3. Belov, Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations / Yu.Ya. Belov // Utrecht: VSP, 2002. - 211 p. http://goo.gl/YTCpQ

4. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас // М.:Мир, 1978. http://reslib.com/book/Nelinejnie_operatornie_uravneniya_i_operatornie_differencialjnie_uravneniya__Gaevskij_H___i_dr___Gajewski__

5. Дубинский, Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения / Ю.А. Дубинский // Современные проблемы математики. - Т.9. – Москва, 1976.

6. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач: Учебн. пособие / А.М. Денисов // М.: Изд-во МГУ, 1994. - 208 с.

7. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.

### — Справочная литература —

8. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. - М.: Наука, 1966. - 260 с. http://reslib.com/book/Spravochnik_po_differencialjnim_uravneniyam_v_chastnih_proizvodnih_pervogo_poryadka

9. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин // М.: Наука, 1982. - 322 с. http://reslib.com/book/Obiknovennie_differencialjnie_uravneniya__L_S_Pontryagin_

10. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов // М.: Наука, 1976. - 391 с. http://reslib.com/book/Differencialjnie_uravneniya_v_chastnih_proizvodnih

11. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин // СПб.: Лань, 2002. – 576 с.

12. Никольский, С.М. Курс математического анализа: Учебник для вузов / С.М. Никольский // М.:ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 592 с.

13. Кытманов, А.М. Математический анализ [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас ; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF ; 1074 кб). - Красноярск : ИПК СФУ, 2007. - 235 on-line. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции ; УМКД № 8-2007). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/8/u_posob.pdf

14. Лейнартас, Е. К. Дополнительные главы математического анализа [Электронный ресурс] : конспект лекций / Е. К. Лейнартас, В. Н. Лукин, О. Н. Черепанова ; Сиб. федерал. ун-т. - Электрон. дан. (PDF ; 8193 Кб). - Красноярск : СФУ, 2008. - 146 с. - (Электронная библиотека СФУ. УМКД - 2008, Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/Lukin/u_lectures.pdf

15. Родионов, А. А. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : конспект лекций / А. А. Родионов, А. М. Франк ; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF ; 18356 кб). - Красноярск : ИПК СФУ, 2007. - 137 on-line. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции ; УМКД № 14-2007). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/14/u_lectures.pdf

16. Белов, Ю. Я. Уравнения с частными производными [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю. Я. Белов ; Сиб. федерал. ун-т. Ин-т математики. - Электрон. дан. (PDF ; 591 Кб). - Красноярск : СФУ, 2008. - 118 с. - (Электронная библиотека СФУ. УМКД - 2008, Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/Belov/u_course.pdf

17. Шлапунов, А. А. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : конспект лекций / А. А. Шлапунов, В. В. Работин, Т. М. Садыков ; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF ; 1,22 Мб). - Красноярск : ИПК СФУ, 2007. - 265 on-line. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции ; УМКД № 1-2007). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/1/u_lectures.pdf

18. Распопов, В. Е. Численные методы [Электронный ресурс] : конспект лекций / В. Е. Распопов, М .М. Клунникова ; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF ; 1,3Мб). - Красноярск : ИПК СФУ, 2007. - 189 on-line. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции ; 13-2007). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/13/u_lectures.pdf

19. Андреев, В. К. Вопросы прикладного функционального анализа [Электронный ресурс] : конспект лекций / В. К. Андреев ; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF ; 728 кб). - Красноярск : [б. и.], 2007ИПК СФУ. - 107 on-line. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции ; УМКД № 2-2007). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/2/u_lectures.pdf

20. Треногин, В.А. Функциональный анализ: Учебник / В.А. Треногин // М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с.

**— Дополнительная литература —**

21. Гласко, В.Б. Обратные задачи математической физики / В.Б. Гласко // М.: МГУ, 1979.

22. Кучер, Н.А. Метод слабой аппроксимации и анализ схем расщепления в газовой динамике: Учеб. пособие / Н.А. Кучер // Кемер. гос. ун-т, Кемерово КГУ : Кузбассвузиздат, 1997. - 187 с.

23. Рихтмайер, Р. Звук и теплопроводность / Р. Рихтмайер // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: Наука, 1966. С.183 – 185.

24. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон // М.: Мир, 1972. - 418 с.

25. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко // Новосибирск, 1967. - 195 с. http://www.prometeus.nsc.ru/math/yanenko/pdf/013.pdf

26. Вячеславова, П. Ю. Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа / П.Ю. Вячеславова, Р.В. Сорокин // Журнал СФУ: математика и физика. - Красноярск, 2009. - Т.2, - №3.- С.288 - 297.

27. Афиногенова, О. А. О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения / О.А. Афиногенова, Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Доклады Академии Наук. - 2009. - Т.424. - №4. - С.439-441.

28. Ю. Я. Белов. О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения / Белов Ю.Я., Фроленков И.В. // Вестник КрасГУ: физико-математические науки. - Красноярск: КрасГУ. - 2004. - Вып. 1. - С. 140-149.

Учебное издание

Подготовлено к изданию РИО БИК СФУ

Подписано в печать Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать плоская.
Усл. печ. л. Тираж экз. Заказ .

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел/факс (391) 206-21-49. E-mail rio@sfu-kras.ru
http://rio.sfu-kras.ru

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. 206-26-58, 206-26-49