**Билет 1.**

1. Дать определение монотонного оператора $A : B \to B^*$.
2. Дать определение пространства $L_p(S, X)$, записать норму, указать тип.
3. Сформулировать и доказать лемму об остром угле для стационарного случая.
4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является коэрцитивным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

---

**Билет 2.**

1. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$. Пример семинепрерывного оператора.
2. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$. Пример строго монотонного оператора.
3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, ($B$ – банахово пространство, $B^*$ – пространство, сопряженное к $B$) с семинепрерывным оператором. Построение последовательности галеркинских приближений, доказательство ограниченности галеркинской последовательности.
4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является ограниченным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

**Билет 3.**

1. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Примеры пространств.
2. Дать определение коэрцитивного оператора $A : B \to B^*$.
3. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{L_p(S,X)} = \left( \int\limits_S \|u\|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает норму в пространстве $L_p(S, X)$.

4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является семинепрерывным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left( \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \right)^*$.

---

**Билет 4.**

1. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $\overset{0}{C}{}^k(\overline{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $H_1(\Omega)$, $\overset{0}{H}_1(\Omega)$. Какие из них являются банаховыми, гильбертовыми? Выписать (где возможно) норму, скалярное произведение.
2. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$.
3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, ($B$ – банахово пространство, $B^*$ – пространство, сопряженное к $B$) с семинепрерывным оператором.
4. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

---

**Билет 5.**

1. Дать определение сепарабельного и рефлексивного пространств.
2. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.
3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, ($B$ – банахово пространство, $B^*$ – пространство, сопряженное к $B$) с оператором с полуограниченной вариацией.
4. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\| u^{(j)}(t) \right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.

**Билет 6.**

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой на множестве.
2. Дать определение простой функции из класса $(S \to X)$. Интеграл Бохнера от простой функции.
3. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.
4. Привести краевую задачу $-\Delta u = f$, $u \mid_{\partial\Omega} = 0$, где $\Delta$ – оператор Лапласа, $\Omega \subset E_n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, к операторному уравнению с коэрцитивным, слабо компактным оператором.

---

**Билет 7.**

1. Дать определение пространства $C(S, X)$, записать норму, указать тип.
2. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ интегрируемой по Бохнеру на множестве $S$, на множестве $B \subset S$. Привести пример.
3. Сформулировать теорему Рисса о представлении.
4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является строго монотонным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

---

**Билет 8.**

1. Дать определение коэрцитивности оператора $A(t)(u) : L_p((0, T), X) \to L_{p'}((0, T), X^*)$.
2. Дать определение существенно ограниченной функции.
3. Доказать, что выражение
$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\| u^{(j)}(t) \right\|_X$$
задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.
4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является оператором с полуограниченной вариацией. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

**Билет 9.**

1. Дать определение пространства $L_\infty(S, X)$, записать норму, указать тип..

2. Дать определение семинепрерывности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

3. Сформулировать и доказать лемму об остром угле для стационарного случая.

4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является коэрцитивным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

**Билет 10.**

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.

2. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$.

3. Сформулировать и доказать теорему единственности решения операторного уравнения $Au = h$ с коэрцитивным, слабо компактным и строго монотонным оператором.

4. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\|u^{(j)}(t)\right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.

**Билет 11.**

1. Дать определение оператора $A : B \to B^*$ с полуограниченной вариацией.

2. Дать определение монотонности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

3. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a,b)$, $t \in [0,1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

4. Пусть $g \geq 0$ – финитная в $\Omega$ непрерывная функция. Является ли нормой в $L_2(\Omega)$ функция
$$\rho(u) = \int\limits_{\Omega} g(x)u^2(x)\,dx?$$