Билет 1.

1. Дать определение монотонного оператора $A : B \to B^*$.

2. Дать определение пространства $L_p(S, X)$, записать норму, указать тип.

3. Сформулировать и доказать лемму об остром угле для стационарного случая.

4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$a(\tau, t) = \begin{cases} 2a, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 0, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует постоянную a на отрезке $[0, T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = u^2 + uu_x + 1, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 2.

1. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$. Пример семинепрерывного оператора.

2. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$. Пример строго монотонного оператора.

3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором. Построение последовательности галеркинских приближений, доказательство ограниченности галеркинской последовательности.

4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 2, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + u^2 + u^5 = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 3.

1. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Примеры пространств.

2. Дать определение коэрцитивного оператора $A : B \to B^*$.

3. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{L_p(S,X)} = \left(\int\limits_S \|u\|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает норму в пространстве $L_p(S, X)$.

4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{3})\tau, \\ 3, & (n + \frac{1}{3})\tau < t \leqslant (n + \frac{2}{3})\tau, \\ 0, & (n + \frac{2}{3})\tau < t \leqslant (n + 1)\tau \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = 7 + u^4 + \sin tu^2, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 4.

1. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $\overset{0}{C}{}^k(\overline{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $H_1(\Omega)$, $\overset{0}{H}_1(\Omega)$. Какие из них являются банаховыми, гильбертовыми? Выписать (где возможно) норму, скалярное произведение.

2. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$.

3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором.

4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$a(\tau, t) = \begin{cases} 2a, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{2})\tau, \\ 0, & (n + \frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n + 1)\tau, \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

слабо аппроксимирует постоянную a на отрезке $[0, T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + uu_x + u^5 = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 5.

1. Дать определение сепарабельного и рефлексивного пространств.

2. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.

3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с оператором с полуограниченной вариацией.

4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 2, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = \sin u + u, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 6.

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой на множестве.

2. Дать определение простой функции из класса $(S \to X)$. Интеграл Бохнера от простой функции.

3. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{3})\tau, \\ 3, & (n+\frac{1}{3})\tau < t \leqslant (n+\frac{2}{3})\tau, \\ 0, & (n+\frac{2}{3})\tau < t \leqslant (n+1)\tau \end{cases} \qquad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$.

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + u^2 = f(t) + 2u^3, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 7.

1. Дать определение пространства $C(S, X)$, записать норму, указать тип.
2. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ интегрируемой по Бохнеру на множестве S, на множестве $B \subset S$. Привести пример.
3. Сформулировать теорему Рисса о представлении.
4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} 3, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{3})\tau, \\ 0, & (n+\frac{1}{3})\tau < t \leqslant (n+\frac{2}{3})\tau, \\ 0, & (n+\frac{2}{3})\tau < t \leqslant (n+1)\tau \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0, T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = uu_x - \sin tu^2, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 8.

1. Дать определение коэрцитивности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.
2. Дать определение существенно ограниченной функции.
3. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t\in S} \left\|u^{(j)}(t)\right\|_X$$

   задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.

4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$a(\tau, t) = \begin{cases} 2a, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 0, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует постоянную a на отрезке $[0, T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + uu_x = f(t) - u^3, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 9.

1. Дать определение пространства $L_\infty(S,X)$, записать норму, указать тип..
2. Дать определение семинепрерывности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T),X) \to L_{p'}((0,T),X^*)$.
3. Сформулировать и доказать лемму об остром угле для стационарного случая.
4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau,t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 2, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1.$$

   слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0,T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = u^2 + 3 + \cos t u^2, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 10.

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.
2. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$.
3. Сформулировать и доказать теорему единственности решения операторного уравнения $Au = h$ с коэрцитивным, слабо компактным и строго монотонным оператором.
4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau,t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{3})\tau, \\ 3, & (n+\frac{1}{3})\tau < t \leqslant (n+\frac{2}{3})\tau, \\ 0, & (n+\frac{2}{3})\tau < t \leqslant (n+1)\tau \end{cases} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1.$$

   слабо аппроксимирует единицу на отрезке $[0,T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} + u^2 + u^3 = 2, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.

Билет 11.

1. Дать определение оператора $A : B \to B^*$ с полуограниченной вариацией.

2. Дать определение монотонности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

3. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a,b)$, $t \in [0,1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

4. Дать определение слабой аппроксимации и доказать, что функция

$$b(\tau, t) = \begin{cases} -1, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 1, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

   слабо аппроксимирует ноль на отрезке $[0,T]$

5. Расщепить задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = u^4 - \sin tu^2 + 1, \quad u(0) = 0, \quad t \geq 0$$

   на два дробных шага и линеаризовать расщепление сдвигом по времени.