

2012 - 2013 уч. год

**Задания для курсовых работ для 2-го курса по дифференциальным уравнениям  
(Краевые задачи)**

Руководитель Лазарева Н.Н.

1. Пусть  $\lambda_n$  и  $\lambda_m$  — два разных собственных значения краевой задачи:

$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda y$ ,  $p(x) > 0$ ,  $x \in [a; b]$ ,  $\alpha y(a) + \beta y(b) = 0$ ,  $\gamma y'(a) + \delta y'(b) = 0$ , а  $y_n$  и  $y_m$  — соответствующие этим значениям собственные функции. Доказать, что

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x) = 0.$$

2. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи  $y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda y = 0$ , а  $y(1) = 0$ ,  $y(x)$  ограничено при  $x \rightarrow 0$ .

3. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи  $y'' = \lambda y$ , а  $y'(0) = y(l) = 0$ ,  $l > 0$ .

4. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи  $y'' = \lambda y$ , а  $y(0) = y(l) = 0$ ,  $l > 0$ .

5. Оценить сверху и снизу решение задачи  $x^2y'' + 3xy' - 3y = f(x)$ , а  $y(x)$  ограничено при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow +\infty$ , и его первую производную, если известно, что  $0 \leq f(x) \leq M$ .

6. Построить функцию Грина для краевой задачи  $\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{m^2}{x}y = f(x)$ ,  $m > 0$ ,  $y(0)$  конечно,  $y(1) = 0$ .

7. Решить краевую задачу  $x^2y'' + 2xy' = m(m+1)x^m$ ,  $m > 0$ ,  $y(1) = y'(1)$ ,  $y(x)$  ограничена при  $x \rightarrow 0$ .

8. Решить краевую задачу  $xy'' - y' = \frac{3}{x^2}$ ,  $y(1) = y'(1)$ ,  $3y(2) - 2y'(2) = 3$ .

9. Построить функцию Грина для краевой задачи  $y'' = f(x)$ ,  $y(-1) = y(1) = 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .