Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

Ю. Я. Белов, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков

АППРОКСИМАЦИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика» и 010200 «Математика и компьютерные науки» 28.12.2010 г.

Красноярск
СФУ
2012

УДК 517
ББК 22.161
Б435

Рецензент: В.М. Садовский, д-р. физ.-мат. наук, профессор, зам. директора Института вычислительного моделирования СО РАН;

Б435 Аппроксимация и корректность краевых задач для дифференциальных уравнений: учеб. пособие [Текст] / Ю.Я. Белов, Р.В. Сорокин, И.В. Фроленков. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012.-171 с.
ISBN 978-5-7638-2499-5

Учебное пособие посвящено изучению вопросов корректности и аппроксимации некоторых классов краевых задач для дифференциальных уравнений. Рассматриваются постановки прямых и обратных задач для уравнений в частных производных. Исследуются дифференциальные свойства решений и их поведение при больших значениях времени.

Предназначено для студентов направлений подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика».

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-7638-2499-5

Содержание

Предисловие

Многочисленные приложения дифференциальных уравнений в различных областях науки и техники требуют эффективных методов их решения. Большой интерес представляют вопросы корректности начально-краевых задач для дифференциальных уравнений и способы их аппроксимации корректными, как правило, хорошо изученными задачами.

В пособии рассмотрены некоторые современные методы исследования прямых и обратных задач для уравнений в частных производных. Значительное внимание уделено методу расщепления уравнений на дифференциальном уровне, который сформировался в основном в работах выдающихся российских математиков Н.Н. Яненко, А.А Самарского, их учеников и последователей. Один из подходов к расщеплению Н.Н. Яненко назвал методом слабой аппроксимации (МСА), широко применяемому к исследованию задач, рассматриваемым в данном учебном пособии. Изучены ε-аппроксимации различных задач, зависящие от малых параметров. Даны различные примеры использования указанных методов.

Пособие состоит из шести глав.

В первой главе приведены сведения из области функционального анализа и дифференциальных уравнений.

Во второй главе дана общая формулировка метода слабой аппроксимации. Для достаточно общих систем уравнений в частных производных в случае данных Коши сформулированы теоремы сходимости решений расщепленых задач к решению исходной системы при стремлении параметра расщепления к нулю. В качестве примеров предложены линейное параболическое уравнение в частных производных и квазилинейное уравнение типа Бюргерса.

В третьей главе рассмотрены аппроксимации, зависящие от малого параметра (ε-аппроксимации). Многие задачи механики сплошной среды описываются системами уравнений в частных производных смешанного и составного типа, при изучении которых важную роль играют их аппроксимации, зависящие некоторым образом от малых параметров. Класс задач, для решения которых тем или иным образом применяются аппроксимации, содержащие малые параметры, велик. Отметим два из основных, на наш взгляд, и взаимосвязанных вопроса: аппроксимацию в целях доказательства корректности краевых задач и аппроксимацию исходных задач для построения более эффективных численных алгоритмов [8, 9, 22, 55, 69]. Указанные вопросы исследуются для некоторых классов систем уравнений в частных производных и дифференциальных операторных уравнений, имеющих многочисленные приложения (например, в задачах механики сплошной среды).

В четвертой и пятой главах исследованы задачи идентификации входных данных — корректность, аппроксимация, устойчивость.

В шестой главе рассмотрены вопросы стабилизации решения при стремлении временной переменной к бесконечности задачи идентификации функции источника в параболических уравнениях и системах смешанного типа. Исследование проведено методом слабой аппроксимации.

Глава 1. Вспомогательные утверждения

1.1. Неравенства. Функциональные пространства

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Точка в E_n обозначается символом $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Символ $\partial\Omega$ обозначает границу области Ω.

Замыкание Ω обозначим через $\overline{\Omega}$. Через Q_T обозначим цилиндр $(0, T) \times \Omega$. Пусть α – мультииндекс, то есть $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$, где α_i – целые неотрицательные числа, и $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Обозначим $D_{x_i}^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial {x_i}^{\alpha_i}}$, $D_x^{\alpha} = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$.

Символом $C^k(\overline{\Omega})$ $(C^k(\Omega))$ будем обозначать совокупность всех k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $\overline{\Omega}$ (Ω).
Если ввести в $C^k(\overline{\Omega})$ норму

$$\|f\| = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^{\alpha} f(x)|,$$

то пространство $C^k(\overline{\Omega})$ становится банаховым пространством. При $k = 0$ вместо $C^o(\overline{\Omega})$ будем писать $C(\overline{\Omega})$.

$L_p(\Omega)$, где $1 \leqslant p < \infty$, — банахово пространство, состоящее из классов интегрируемых по Лебегу в p-й степени функций, определенных на Ω (в один класс включаются функции, равные почти всюду в Ω). Норма в этом пространстве определяется по формуле

$$\|f\| = (\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx)^{1/p}.$$

$H^k(\Omega)$ (k – целые числа) — гильбертово пространство, состоит из всех элементов $L_2(\Omega)$, имеющих все обобщенные производные до порядка k включительно, интегрируемые с квадратом [48, 67]. Через $(\cdot, \cdot)_H$ $(\| \cdot \|_H)$ обозначим скалярное произведение (норму) в гильбертовом пространстве H.

Неравенства

В дальнейшем часто используются известные неравенства Юнга, Гёльдера, Шварца, Гронуолла [5, 46, 43, 48].

Неравенство Юнга:

для любых чисел $a \geqslant 0, b \geqslant 0$

$$ab \leqslant \frac{1}{p}\varepsilon^p a^p + \frac{1}{q}\varepsilon^{-q} b^q \tag{1.1.1}$$

при любых ε, p, q, удовлетворяющих условиям

$$\varepsilon > 0, \quad p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Неравенство Коши с ε (неравенство Юнга при $p = q = 2$):

для любых чисел $a \geqslant 0, b \geqslant 0, \varepsilon > 0$

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(\varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.1.2}$$

Неравенство Гёльдера:

$$\|uv\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}, \quad p > 1, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.1.3}$$

Неравенство Шварца:

для любых элементов u, v гильбертова пространства H

$$|(u, v)_H| \leqslant \|u\|_H \|v\|_H. \tag{1.1.4}$$

В (1.1.4) $(u, v)_H$ — скалярное произведение и $\|u\|_H$ — норма в H.

Лемма 1.1.1 (Неравенство Гронуолла). *Пусть неотрицательная, измеримая и ограниченная на отрезке $[0, t^*]$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\chi(t) \leqslant C + \int_0^t [A + B\chi(\Theta)] d\Theta,$$

где постоянные $A, B, C \geqslant 0$. Тогда если $B > 0$, то при $0 \leqslant t \leqslant t^*$ имеет место оценка

$$\chi(t) \leqslant Ce^{Bt} + \frac{A}{B}(e^{Bt} - 1). \tag{1.1.5}$$

Если $B = 0$, то

$$\chi(t) \leqslant C + At. \tag{1.1.6}$$

Некоторые понятия функционального анализа

Ниже сформулируем некоторые понятия и теоремы функционального анализа, которые понадобятся в дальнейшем. Предполагается, что читатель знаком с понятиями нормированного, банахова, гильбертова пространств, с определением линейного оператора, функционала, их норм [46, 67].

Рассмотрим ограниченную в E_n область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и $C(\overline{\Omega})$ – пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|$. Пусть M — некоторое бесконечное множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций ($M \subset C(\overline{\Omega})$).

Определение. Множество M нормированного пространства X называется *компактным*, если из каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Интересен вопрос о компактности множества M в $C(\overline{\Omega})$. Для этого введем понятия равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности функций и сформулируем теорему Арцела о компактности [67].

Определение. Говорят, что функции множества M *равномерно ограничены* в $C(\overline{\Omega})$, если существует постоянная K, такая что $\|f\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant K$ для всех $f \in M$.

Определение. Говорят, что функции множества M *равностепенно непрерывны* в $\overline{\Omega}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in \overline{\Omega}$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, выполняющееся сразу для всех $f \in M$.

Теорема 1.1.1 (Арцел). *Для того чтобы множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ было компактно в $C(\overline{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$ и равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$.*

Пусть X – нормированное пространство, X' – сопряженное пространство, то есть пространство линейных ограниченных функционалов, определенных на X.

Значение функционала $F \in X'$ на элементе $x \in X$ будем обозначать $F(x)$ или $< F, x >$. Если в X' ввести норму

$$\|F\|_{X'} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|< F, x >|}{\|x\|},$$

то пространство X' превращается в банахово. Сопряженное к пространству $L_p(\Omega)$ при $p > 1$ можно отождествить с пространством $L_q(\Omega)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Это значит, что если $F \in (L_p(\Omega))'$, то существует такой элемент $y \in L_q(\Omega)$, что для любого $x \in L_p(\Omega)$ выполняется равенство

$$< F, x >= \int\limits_{\Omega} x(t)y(t)dt$$

и $\|F\|_{X'} = \|y\|_{L_q(\Omega)}$. Имея в виду это соответствие, говорят, что $(L_p(\Omega))' = L_q(\Omega)$. Аналогично можно показать, что $(L_1(\Omega))' = L_\infty(\Omega)$.

Пусть $X'' = (X')'$, то есть пространство всех линейных непрерывных функционалов, определенных на X'. Определим следующим образом отображение пространства X в X'': для $x \in X$ поставим в соответствие такой элемент $x'' \in X''$, что для любого $x' \in X'$ выполняется равенство $< x'', x' >=< x', x >$. В том случае, когда область значений этого отображения совпадает со всем пространством X'', пространство X называется *рефлексивным*.

Пространство $L_p(\Omega)$ при $p > 1$ рефлексивно. Пространства $L_1(\Omega)$, $L_\infty(\Omega)$, $C^k(\Omega)$ не являются рефлексивными.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ элементов из X называется *слабо сходящейся*, если существует такой элемент $x \in X$, что для каждого фунционала $F \in X'$ выполняется равенство $< F, x >= \lim\limits_{n\to\infty} < F, x_n >$. При этом говорят, что x *является слабым пределом последовательности* x_n, и обозначают это следующим образом: $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x$.

Если x_n сходится слабо к x, то справедливо неравенство $\|x\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

1.2. Линейное уравнение в частных производных первого порядка

Рассмотрим линейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$z_t + \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x, \lambda) z_{x_i} + f_0(t, x, \lambda) z = f(t, x, \lambda), \tag{1.2.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — параметр.

Условие 1.2.1. Пусть в области $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t, x) | t_0 \leqslant t \leqslant t_1, x \in E_n\}$ функции f_i, $i \geqslant 1$, ограничены при каждом фиксированном λ. Функции f_i и f непрерывны, а частные производные f_{ix_j}, $f_{i\lambda_r}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ и f_{x_j}, f_{λ_r} существуют, непрерывны и $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемы по всем своим $n+m+1$ аргументам ($k \geqslant 1$). Функция $\omega(x,\lambda)$ непрерывно дифференцируема k раз по всем $n+m$ аргументам в области $-\infty < x_1, \ldots, x_n < +\infty$, $-\infty < \lambda_1, \ldots, \lambda_m < +\infty$.

Теорема 1.2.1 ([34]). *При выполнении условия 1.2.1 для любых τ, λ из интервалов $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, $-\infty < \lambda_1, \ldots, \lambda_m < +\infty$ уравнение (1.2.1) имеет в $\Pi_{[t_0,t_1]}$ единственный интеграл $z = \psi(t,x;\tau,\lambda)$ с начальным значением $\psi(\tau,x;\tau,\lambda) = \omega(x,\lambda)$. Этот интеграл k раз непрерывно дифференцируем по всем $m+n+2$ аргументам.*

Если $x_i = \varphi_i(t,\tau,\eta_1,\ldots\eta_n,\lambda)$ — характеристические функции системы

$$x_i'(t) = f_i(t,x,\lambda), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1.2.2}$$

(то есть интегральные кривые системы (1.2.2), которые проходят через точку $(\tau,\eta_1,\ldots,\eta_n)$), то параметрическое представление интеграла имеет следующий вид:

$$x_i = \varphi_i(t,\tau,\eta_1,\ldots\eta_n,\lambda), \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$z = \exp\{-F_0\}\{\omega(\eta_1,\ldots\eta_n,\lambda) + \int\limits_\tau^t f(t,\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\lambda)\exp\{F_0\}dt\}, \tag{1.2.3}$$

где $F_0 = F_0(t,\tau,\eta_1,\ldots\eta_n,\lambda) = \int\limits_\tau^t f_0(t,\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\lambda)dt$.

1.3. Принцип максимума и априорные оценки первых производных для параболического уравнения второго порядка

Принцип максимума

Пусть $T > 0 - \mathrm{const}$, $\quad S_T = [0,T] \times \partial\Omega$, $\quad \Gamma_T = S_T \cup \Omega$, $\quad Q_T = (0,T) \times \Omega$ и Ω — ограниченная область пространства E^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим в Q_T линейное уравнение

$$L(u) = f, \tag{1.3.1}$$

где дифференциальный оператор L имеет вид

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t}$$

и коэффициенты a_{ij}, b_i, c и правая часть f уравнения (1.3.1) — вещественные конечнозначные функции переменных t, x.

Считаем, что $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$, $i,j = 1,\ldots,n$ и выполняется соотношение

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}_T \setminus \Gamma_T \tag{1.3.2}$$

при любых отличных от нуля $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in E_n$.

Уравнение (1.3.1) вследствие условия (1.3.2) является параболическим в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ (см., например [48, 66]).

О п р е д е л е н и е. Функция u называется классическим решением уравнения (1.3.1) в $\bar{Q}_T$, если её производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t}$, $i,j = 1,\ldots,n$ непрерывны в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$, сама функция $u(t,x)$ непрерывна в $\bar{Q}_T$ и в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ выполняется тождество $L(u(t,x)) = f(t,x)$.

Теорема 1.3.1. *Пусть функция $u(t,x)$ непрерывна в $\bar{Q}_T$, все ее производные, входящие в оператор L, непрерывны в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ и выполняются неравенства*

$$L(u(t,x)) \leqslant 0 \quad \text{в } \bar{Q}_T \setminus \Gamma_T,$$

$$u(t,x) \geqslant 0 \quad \text{на } \Gamma_T.$$

Пусть коэффициент c оператора L ограничен сверху некоторой постоянной M: $c(t,x) \leqslant M$ $\forall (t,x) \in \bar{Q}_T$. Тогда

$$u(t,x) \geqslant 0 \quad \text{в } \bar{Q}_T.$$

Теорема 1.3.2. *Пусть классическое решение $u(t,x)$ уравнения (1.3.1) удовлетворяет условию*

$$|u(t,x)| \leqslant q \quad \text{при } (t,x) \in \Gamma_T.$$

Пусть f — ограниченная функция, а коэффициент c ограничен сверху:

$$|f(t,x)| \leqslant N, \quad c(t,x) \leqslant M \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}_T; \quad q, N, M = const \geqslant 0.$$

Тогда всюду в $\bar{Q}_T$ выполняется неравенство

$$|u(t,x)| \leqslant e^{Mt}(Nt + q). \tag{1.3.3}$$

Теорема 1.3.3. *Пусть функция* $u(t,x)$ *в* $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\, 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_n\}$ *непрерывна и ограничена снизу:*

$$-d < u(t,x), \quad d = const > 0,$$

а в $\Pi_{(0,T]}$ *имеет все непрерывные производные, входящие в оператор* L*, и удовлетворяет неравенству* $L(u) \leqslant 0$*. Пусть коэффициенты* a_{ij}, b_i, c *удовлетворяют соотношениям*

$$|a_{ij}(t,x)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(t,x)| \leqslant M(|x|^2+1)^{1/2},$$

$$c(t,x) \leqslant M, \quad M = const > 0.$$

Тогда $u(t,x) \geqslant 0$ *всюду в* $\Pi_{[0,T]}$*, если* $u \geqslant 0$ *при* $t = 0$*.*

Рассмотрим для уравнения (1.3.1) задачу Коши: найти непрерывную в полосе $\Pi_{[0,T]}$ функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую в $\Pi_{(0,T]}$ уравнению (1.3.1) и при $t = 0$ совпадающую с заданной на E_n функцией φ:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in E_n. \tag{1.3.4}$$

Теорема 1.3.4. *Пусть* $u(t,x)$ *— классическое ограниченное решение задачи Коши (1.3.1), (1.3.4), коэффициенты* a_{ij}*,* b_i *оператора* L *подчинены условиям теоремы 1.3.3 и выполняются соотношения*

$$|\varphi(x)| \leqslant q, \quad x \in E_n,$$

$$|f(t,x)| \leqslant N, \quad c(t,x) \leqslant M, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \leqslant e^{Mt}(Nt+q). \tag{1.3.5}$$

Теоремы 1.3.1—1.3.4 относятся к группе теорем принципа максимума. Доказательство теорем 1.3.1 − 1.3.4 приведено в [1, 29]. Другие важные теоремы принципа максимума в [40, 43, 68].

Оценки первых производных

Зададим целое $n \geqslant 1$. Рассмотрим полосу

$$\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\, 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_2\},$$

вектор $u=(u_1,\ldots,u_{2n})$ и функции $b^i(t,x,u,v,w)$, $i=1,\ \ldots,\ 2n$, определенные при всех значениях аргументов, принадлежащих множеству

$$G=\{(t,x,u,v,w)|(t,x)\in\Pi_{[0,T]},\quad -\infty<u,v,w<+\infty\}.$$

Через G_M и G_M^N обозначим, соответственно, множества

$$\{(t,x,u,v,w)|(t,x,u,v,w)\in G,\quad |u|\leqslant M\},$$
$$\{(t,x,u,v,w)|(t,x,u,v,w)\in G_M,\ |x|<N\}.$$

Пусть $\mu_i=\mu_i(t)$ – заданные на отрезке $[0,T]$ функции класса $C[0,T]$, причём

$$\mu_i(t)\geqslant\mu>0,\quad t\in[0,T]. \tag{1.3.6}$$

Рассмотрим систему $2n$ уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\mu_i(t)\Delta u_i+b^i(t,x,u,\frac{\partial u_i}{\partial x_1},\frac{\partial u_i}{\partial x_2}),\quad i=1,\ \ldots,\ 2n. \tag{1.3.7}$$

Условие 1.3.1. Решение u системы (1.3.7) непрерывно и ограничено в $\Pi_{[0,T]}$:

$$|u|\leqslant M,\quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},\quad M=\mathrm{const}>0,$$

а в $\Pi_{(0,T]}$ существуют частные производные от u по x до третьего порядка. Функции $b^i=b^i(t,x,u,v,w)$ удовлетворяют в G_M неравенствам

$$|b^i|+|D_xb^i|+|D_ub^i|\leqslant c(1+|D_xu_i|),$$

$$|D_vb^i|+|D_wb^i|\leqslant c,\quad i=1,\ldots,2n;\quad c=\mathrm{const}>0; \tag{1.3.8}$$

$$|D_xf|=(\sum_{i=1}^{2}(D_{x_i}f)^2)^{1/2},\quad D_u=\frac{\partial}{\partial u},D_w=\frac{\partial}{\partial w}.$$

Лемма 1.3.1. *Пусть выполняется условие 1.3.1, производные D_xu_j, $j=1,\ \ldots,\ 2n$ непрерывны в $\Pi_{[0,T]}$ и*

$$|D_xu_j|\,\Big|_{t=0}\leqslant c_1,\quad j=1,\ \ldots,\ 2n. \tag{1.3.9}$$

Тогда в полосе $\Pi_{[0,T]}$ верна оценка

$$|D_xu_j|\leqslant M_1,\quad j=1,\ \ldots,\ 2n, \tag{1.3.10}$$

причём постоянная M_1 зависит лишь от M, c, c_1, μ и размерности $2n$ системы (1.3.7)*. Если соотношения* (1.3.9) *не выполнены (при этом* *выполнены остальные предположения леммы 1.3.1), то в полосе* $\Pi_{[\delta,T]}$, $0<\delta<T$ *имеет место оценка*

$$|D_x u_j| \leqslant M_1(\delta), \quad j=1,\ldots,2n, \tag{1.3.11}$$

где постоянная $M_1(\delta)$ *зависит лишь от* M, c, μ, δ, n.

Доказательство леммы 1.3.1 приведено в [9] (см. также доказательство леммы 4 в [38]).

Глава 2. Метод слабой аппроксимации

2.1. Понятие метода слабой аппроксимации

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих понятие метода слабой аппроксимации. Во всех примерах параметр τ мал и положителен.

Пример 1. Для решения на отрезке $[0, T]$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \equiv 0, \qquad x(0) = 0 \tag{2.1.1}$$

применим разностную схему дробных шагов [69]:

$$\frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^n}{\tau} = 1, \qquad \frac{x^{n+1} - x^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = -1, \qquad x^0 = 0, \tag{2.1.2}$$

где x^n — значение приближенного решения в точке $t_n = n\tau$; $x^{n+\frac{1}{2}}$ — в точке $t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\tau$; $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $N\tau = T$; $N > 1$ – целое.

Если исключить $x^{n+\frac{1}{2}}$ из соотношений (2.1.2), получим так называемую схему в целых шагах:

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = 0, \qquad x^0 = 0. \tag{2.1.3}$$

Отсюда следует, что $x^n = 0$ и, значит, совпадает с точным решением задачи (2.1.1) в точках t_n.

Схему (2.1.2) можно трактовать следующим образом: на первом дробном шаге решается уравнение $\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{dt} = 1$, на втором решается уравнение $\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{dt} = -1$. В целом же решается задача Коши

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = f(\tau, t), \qquad x(\tau, 0) = 0, \tag{2.1.4}$$

где

$$f(\tau, t) = \begin{cases} 2, & n\tau < t \leqslant (n + \frac{1}{2})\tau, \\ -2, & (n + \frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

На рис. 2.1. показаны сравнительные графики функций $f(t)$, $f(\tau, t)$ и решений $x(t)$, $x(\tau, t)$ задач (2.1.1) и (2.1.4).

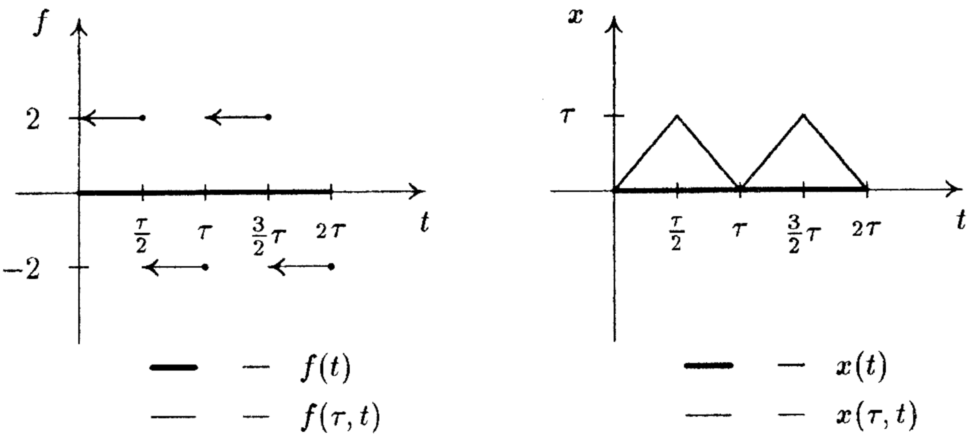

Рис. 2.1.1: Сравнительные графики функций $f(t)$, $f(\tau,t)$ и решений $x(t)$, $x(\tau,t)$ задач (2.1.1) и (2.1.4)

Легко заметить, что функции $f(\tau,t)$ аппроксимируют функцию $f(t)$ в том смысле, что при любых t_1, t_2 из $[0,T]$

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(\tau,s) - f(s))\; ds \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0. \tag{2.1.5}$$

В то же время $\max\limits_{[0,T]} |x(\tau,t) - x(t)| = \dfrac{\tau}{2}$, то есть имеет место равномерная сходимость $x(\tau,t)$ к $x(t)$ на отрезке $[0,T]$.

Пример 2. На отрезке [0,T] рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} + ax = b, \qquad x(0) = 1, \qquad a, b - \text{const}, \tag{2.1.6}$$

решением которой является функция $x(t) = e^{-at} + \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$. Заменим задачу (2.1.6) задачей

$$\frac{dx}{dt} + a(\tau,t)x = b(\tau,t), \qquad x(0) = 1, \tag{2.1.7}$$

где

$$a(\tau,t) = \begin{cases} 2a, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 0, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases}$$

$$b(\tau,t) = \begin{cases} 0, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ 2b, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Функции $a(\tau,t)$ слабо аппроксимируют постоянную a в смысле (2.1.5), а функции $b(\tau,t)$ — постоянную b. Для решения задачи (2.1.7) нужно последовательно решать уравнения

$$\frac{dx}{dt} + 2ax = 0 \quad \text{при} \quad t \in (n\tau, (n+\frac{1}{2})\tau],$$

$$\frac{dx}{dt} = 2b \quad \text{при} \quad t \in ((n+\frac{1}{2})\tau, (n+1)\tau],$$

причем значение решения на конце предыдущего промежутка берется в качестве начальных данных для решения на следующем промежутке.

Пусть сначала $b = 0$. Тогда решение $x(\tau, t)$ задачи (2.1.7) дается соотношениями вида

$$x(\tau, t) = \begin{cases} e^{-an\tau} e^{-2a(t-n\tau)}, & n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \\ e^{-a(n+1)\tau}, & (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\max\limits_{[0,T]} |x(\tau, t) - x(t)| = O(\tau)$ ($O(\tau)$ – "O" большое от τ), причем в точках $t_n = n\tau$ функции $x(\tau, t)$ и $x(t)$ совпадают.

Пусть теперь b любое. Тогда $x(\tau, \frac{\tau}{2}) = e^{-a\tau}$, $x(\tau, \tau) = e^{-a\tau} + b\tau$ и так далее:

$$x(\tau, t_n) = e^{-an\tau} + b\tau(e^{-a(n-1)\tau} + e^{-a(n-2)\tau} + \ldots + 1) =$$
$$= e^{-at_n} + b(1 - e^{-at_n})\frac{\tau}{1 - e^{-a\tau}}.$$

Из того, что при малых τ

$$\frac{\tau}{1 - e^{-a\tau}} = \frac{1}{a} + O(\tau),$$

имеем $|x(\tau, t_n) - x(t_n)| = O(\tau)$. Очевидно, что аналогичное равенство справедливо и во всех точках отрезка $[0, T]$.

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad u(0, x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2), -\infty < t, x, y < +\infty.$$

Функцию u_0 считаем непрерывно дифференцируемой по x_1, x_2 в пространстве E_2. Решением этой задачи является функция $u(t, x_1, x_2) =$
$= u_0(x_1 - t, x_2 - t)$.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + \alpha_1(\tau, t)\frac{\partial u_\tau}{\partial x_1} + \alpha_2(\tau, t)\frac{\partial u_\tau}{\partial x_2} = 0, u_\tau(0, x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2),$$

где

$$\alpha_1(\tau,t)=\begin{cases}2, & n\tau<t\leqslant(n+\frac{1}{2})\tau,\\ 0, & (n+\frac{1}{2})\tau<t\leqslant(n+1)\tau,\end{cases}$$

$$\alpha_2(\tau,t)=\begin{cases}0, & n\tau<t\leqslant(n+\frac{1}{2})\tau,\\ 2, & (n+\frac{1}{2})\tau<t\leqslant(n+1)\tau, \quad n=0,1,\ldots,N-1.\end{cases}$$

Ее решение равносильно последовательному решению задач:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\quad n\tau<t\leqslant(n+\frac{1}{2})\tau,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x_2}=0,\quad (n+\frac{1}{2})\tau<t\leqslant(n+1)\tau.$$

Начальные данные, как описано выше, берутся с предыдущих временных промежутков. Если обозначить функцию, совпадающую на каждом промежутке с решением соответствующей задачи последовательности, через $u_\tau(t,x_1,x_2)$, то после решения первой задачи (на первом дробном шаге) получим $u_\tau(\frac{\tau}{2},x_1,x_2)=u_0(x_1-\tau,x_2)$, после второго дробного шага $u_\tau(\tau,x_1,x_2)=$ $=u_0(x_1-\tau,x_2-\tau)$ и так далее. Таким образом, получим, что при $t=n\tau$ выполняется равенство $u(t,x_1,x_2)=u_\tau(t,x_1,x_2)$. Можно показать, что в случае непрерывно дифференцируемой функции $u_0(x_1,x_2)$ с ограниченной в E_2 производной выполняется равенство $u_\tau(t,x_1,x_2)-u(t,x_1,x_2)=O(\tau)$ равномерно по $(t,x,y)\in E_3$.

2.2. Общая формулировка метода слабой аппроксимации

В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt}+L(t)u=f(t),\quad t\in[0,T],\quad u(0)=u_0, \tag{2.2.1}$$

где $L(t)$ — нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор с переменной областью определения $D(L(t))$, причем при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ оператор $L(t)$ отображает $D(L(t))$ в $\mathfrak{B}$.

Пусть $L=\sum_{i=1}^m L_i$, $f=\sum_{i=1}^m f_i$ и $\cap_{i=1}^m D(L_i(t))\subseteq D(L(t))$. Считаем, что операторы $L_i(t)$ отображают $D(L_i(t))$ в $\mathfrak{B}$ и функции $f_i(t)\in\mathfrak{B}$, $i=1,\ldots,m$.

Наряду с задачей (2.2.1) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ:

$$\frac{du^\tau}{dt}+L_\tau(t)u^\tau=f_\tau(t),\quad t\in[0,T],\quad u^\tau(0)=u_0. \tag{2.2.2}$$

Здесь

$$L_\tau(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\tau, t) L_i(t), \quad f_\tau(t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(\tau, t) f_i(t),$$

а функции $\alpha_i(\tau, t)$, $\beta_i(\tau, t)$ слабо аппроксимируют единицу, т.е. для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$ при $\tau \to 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\alpha_i(\tau, t) - 1)\, dt \to 0, \quad \int_{t_1}^{t_2} (\beta_i(\tau, t) - 1)\, dt \to 0.$$

Метод решения задачи (2.2.1), при котором в качестве приближенных решений u^τ, $\tau > 0$, берутся решения задачи (2.2.2) и решение u задачи (2.2.1) находится как предел при $\tau \to 0$ решений u^τ ($u = \lim\limits_{\tau \to 0} u^\tau$), будем называть *методом слабой аппроксимации* [9, 25, 69, 71].

Часто коэффициенты $\alpha_i(\tau, t)$, $\beta_i(\tau, t)$ выбирают в виде

$$\alpha_i(\tau, t) = \beta_i(\tau, t) = \begin{cases} m, & (n + \frac{i-1}{m})\tau < t \leqslant (n + \frac{i}{m})\tau, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

В этом случае нахождение решения u^τ задачи (2.2.2) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_1(t)u^\tau = mf_1(t), \quad t \in (0, \frac{\tau}{m}] \text{ – первый дробный шаг,}$$

$$u^\tau(0) = u_0,$$

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_2(t)u^\tau = mf_2(t), \quad t \in (\frac{\tau}{m}, \frac{2\tau}{m}] \text{ – второй дробный шаг.}$$

В качестве начальных данных на этом шаге берется значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t = \frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $(\frac{2\tau}{m}, \frac{3\tau}{m}], \ldots, (\frac{(m-1)\tau}{m}, \tau]$. Тем самым находят решение на отрезке $[0, \tau]$ – нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на отрезке $[\tau, 2\tau]$– первом целом шаге, затем — на отрезке $[2\tau, 3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов (число это равно N) решение u^τ находят на отрезке $[0, T]$. Задачу (2.2.2) называют *расщеплением задачи* (2.2.1).

В тех случаях когда все операторы L_i имеют более простую структуру, чем оператор L, построение и исследование различных свойств решения задачи

(2.2.2) проще, чем аналогичное исследование задачи (2.2.1). Так в некоторых нелинейных задачах только расщепление позволяет получить априорные оценки, достаточные для доказательства теорем существования.

2.3. Теорема сходимости метода слабой аппроксимации

В полосе $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1, x \in E_n\}$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t,x,\overline{u}). \tag{2.3.1}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1(t,x),\dots,u_l(t,x))$, $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_l)$ – вектор-функции размерности l ($l \geq 0$). Через $\overline{u} = (v_0,v_1,\dots,v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом: $v_0 = u = (u_1,\dots,u_l)$; v_1 – вектор, составленный из всех производных первого порядка по x от u; v_2 – вектор, составленный из всех производных от u второго порядка по x и так далее; v_r – вектор, составленный из производных порядка r по x от u. Таким образом,

$$\overline{u} = (u_1,\dots,u_l,\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_1}{\partial x_2},...,\frac{\partial u_l}{\partial x_n},...,\frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r},...,\frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r})$$

и система уравнений (2.3.1) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно ($r \geq 0$).

Предполагаем, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m}\varphi^i, \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^{m}\varphi_j^i, \quad j = 1,\dots,l,$$

где φ^i – вектор-функции размерности l; φ_j, φ_j^i – j-е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\tau}(t)\varphi_i(t,x,\overline{u}^\tau), \tag{2.3.2}$$

где функции $a_{i,\tau}$ определены следующим соотношением:

$$\alpha_{i,\tau} = \begin{cases} m, & t_0 + (n+\frac{i-1}{m})\tau < t \leqslant t_0 + (n+\frac{i}{m})\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0,1,...,N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$.

Система (2.3.2) слабо аппроксимирует систему (2.3.1) [9, 25, 69].

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau), \tag{2.3.3}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \overline{u}^\tau)$, зависящие от τ.

Ниже будем рассматривать классические решения уравнения (2.3.1), ((2.3.2), (2.3.3)). Под классическим решением уравнения (2.3.2) ((2.3.3)) понимаем функцию u^τ, непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (2.3.2) ((2.3.3)), обладающую кусочно-непрерывной производной u_t^τ в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]}$ (u_t^τ может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = (n+i/m)\tau$; $n = 0, 1, ..., N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$; $j = 0, 1, ..., m-1$) и удовлетворяющую уравнению (2.3.2) ((2.3.3)) в $\Pi_{[t_0,t_1]}$.

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 2.3.1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau)$ на классических решениях $\overline{u}^\tau$ системы уравнений (2.3.3) непрерывны по переменным $(t, x) \in \Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \tau \leqslant \tau_0)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, таких что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$.

Через $u^{\tau_k}(t, x)$ обозначим решение системы (2.3.3) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2.3.2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u^{τ_k} системы (2.3.3) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в

$$\Pi_{[t_0,t_1]}^N = \{(t, x)|, t_0 \leqslant t \leqslant t_1, |x| \leqslant N\},$$

последовательность u^{τ_k} сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящим в (2.3.1), причем

$$\max_{\Pi_{[t_0,t_1]}^N} |\varphi_i(t, x, \overline{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t, x, \overline{u}^{\tau_k})| \to 0, \tag{2.3.4}$$

$$\tau_k \to 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняются условия* 2.3.1*,* 2.3.2*. Тогда вектор-функция* $u(t,x)$ *есть решение системы* (2.3.1) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

Доказательство приведем из [9]. Ниже для удобства обозначений будем опускать аргумент x и вместо индекса τ_k писать индекс ν, например будем писать $u^\nu(t)$ вместо $u^{\tau_k}(t,x)$. Введем средние функции $u^\nu_{\text{ср}}(t)$:

$$u^\nu_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{\nu}\int\limits_t^{t+\nu} u^\nu(\theta)\,d\theta. \tag{2.3.5}$$

При любом t^* из интервала (t_0,t_1) в прямоугольнике $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$ функции $u^\nu_{\text{ср}}(t)$ существуют (для достаточно малых ν) и сходятся при $\nu\to 0$ равномерно по t, x к функции $u(t)$.

Из (2.3.5) следует равенство

$$\frac{\partial u^\nu_{\text{ср}}(t)}{\partial t} = \frac{u^\nu(t+\tau)-u^\nu(t)}{\nu}.$$

Докажем, что $\frac{\partial u^\nu_{\text{ср}}(t)}{\partial t}$ сходится равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t_*]}$ к вектор-функции $\frac{\partial u}{\partial t}$. Осредним (2.3.3). Получим систему

$$\frac{\partial u^\nu_{\text{ср}}(t)}{\partial t} = \varphi(t,x,\bar(u)^\nu) + F_\nu,$$

где

$$F_\nu = F_\nu(t,x,\overline{u}^\nu) = \\ = \frac{1}{\nu}\int\limits_t^{t+\nu}\left\{\sum_{i=1}^m a_{i,\nu}(\theta)\varphi_{i,\nu}(\theta,x,\overline{u}^\nu(\theta)) - \sum_{i=1}^m \varphi_i(t,x,\overline{u}^\nu(t))\right\}d\theta.$$

Так как меры множеств σ_i, на которых $a_{i,\nu}(t)$ не обращаются в нуль на $[t,t+\nu]$, равны, то

$$F_v = \frac{m}{\nu}\sum_{i=1}^m\int\limits_{\sigma_i}\{\varphi_{i,\nu}(\theta,x,\overline{u}^\nu(\theta)) - \varphi_i(t,x,\overline{u}^\nu(t))\}\,d\theta. \tag{2.3.6}$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в (2.3.6):

$$|\varphi_{i,\nu}(\theta,x,\overline{u}^\nu(\theta)) - \varphi_i(t,x,\overline{u}^\nu(t))| \leqslant |\varphi_{i,\nu}(\theta,x,\overline{u}^\nu(\theta)) - \varphi_i(\theta,x,\overline{u}^\nu(\theta))| + \\ + |\varphi_i(\theta,x,\overline{u}^\nu(\theta)) - \varphi_i(t,x,\overline{u}^\nu(t))|.$$

При $\nu \to 0$ первый член в правой части последнего равенства равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ стремится к нулю вследствие соотношения (2.3.4).

Второй член равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ стремится к нулю вследствие равномерной непрерывности по всем своим аргументам вектор-функции φ_i (см. условие 2.3.1) и равностепенной непрерывности $\overline{u}^\nu(t)$ по t в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$. Следовательно, при $\nu \to 0$ функция $F_\nu \to 0$ равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$. Так как $\varphi(t, x, \overline{u}^\nu(t))$ сходится равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ к $\varphi(t, x, \overline{u}(t))$, то

$$\frac{\partial u^\nu_{\text{ср}}(t)}{\partial t} \to \varphi(t, x, \overline{u}(t)) \quad \text{равномерно в } \Pi^N_{[t_0,t^*]}.$$

По теореме о дифференцировании функциональных последовательностей $\frac{\partial u^\nu_{\text{ср}}}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$ равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$. Следовательно $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t, x, \overline{u}(t))$, то есть u – классическое решение системы (2.3.1) в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$.

Рассматривая средние функции

$$u^\nu_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{\nu} \int\limits_{t-\nu}^{t} u^\nu(\theta)\, d\theta,$$

докажем, что $u(t)$ есть решение системы (2.3.1) в $\Pi^N_{[t_*,t_1]}$ при любом $t_* \in (t_0, t_1)$ и, следовательно, в $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$. Теорема 2.3.1 доказана.

2.4. Линейное уравнение в частных производных

Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = [0, T] \times E_2$ задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \mu \Delta u + f, \qquad \mu > 0, \tag{2.4.1}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), x \in E_2. \tag{2.4.2}$$

Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа; a_1, a_2, μ — постоянные; u — неизвестная; f, φ — заданные функции.

Слабо аппроксимируем задачу (2.4.1), (2.4.2) задачей

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 5a_1\frac{\partial u^\tau}{\partial x_1} = 0, \qquad n\tau < t \leqslant (n+1/5)\tau, \tag{2.4.3}$$
$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 5\mu\frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_1^2}, \qquad (n+1/5)\tau < t \leqslant (n+2/5)\tau, \tag{2.4.4}$$
$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 5\mu\frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_2^2}, \qquad (n+2/5)\tau < t \leqslant (n+3/5)\tau, \tag{2.4.5}$$
$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 5a_2\frac{\partial u^\tau}{\partial x_2} = 0, \qquad (n+3/5)\tau < t \leqslant (n+4/5)\tau, \tag{2.4.6}$$
$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 5f, \qquad (n+4/5)\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \tag{2.4.7}$$

$$u^\tau(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in E_2. \tag{2.4.8}$$

Расщепили задачу (2.4.1), (2.4.2) на простейшие задачи, решения которых нетрудно выписать в явном виде.

Предположим, что функции φ, f бесконечно дифференцируемы по пространственным переменным и ограничены вместе со всеми своими производными:

$$|D_x^\beta \varphi(x)| \leqslant c_n, \quad |\beta| = n; \quad n = 0,1.\dots,j,\dots; \quad x \in E_2; \tag{2.4.9}$$
$$|D_x^\beta f(t,x)| \leqslant r_k, \quad |\beta| = k, \quad k = 0,1,\dots,j,\dots; \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{2.4.10}$$

Здесь c_n, r_k — неотрицательные постоянные.

Мы предполагаем также, что производные в соотношениях (2.4.10) непрерывны в $\Pi_{[0,T]}$.

Рассмотрим нулевой шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге решается уравнение (2.4.3) с начальными данными $\varphi(x)$. Решение даётся в явном виде:

$$u^\tau(t,x_1,x_2) = \varphi(x_1 - 5a_1 t, x_2), \qquad 0 < t \leqslant \tau/5. \tag{2.4.11}$$

На втором дробном шаге решаем задачу Коши для уравнения (2.4.4) с начальными данными $u^\tau(\tau/5,x) = \varphi(x_1 - a_1\tau, x_2)$. Её решение даётся формулой Пуассона

$$u^\tau(t,x_1,x_2) = \frac{1}{2\sqrt{5\pi\mu(t-\tau/5)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x_1-\xi_1)^2}{20\mu(t-\tau/5)}}\varphi(\xi_1 - a_1\tau, x_2)\,d\xi_1, \tag{2.4.12}$$
$$\tau/5 < t \leqslant 2\tau/5.$$

На третьем дробном шаге решается задача Коши для уравнения (2.4.5) с начальными данными:

$$u^\tau(2\tau/5, x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu\tau}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x_1-\xi_1)^2}{4\mu\tau}} \varphi(\xi_1 - a_1\tau, x_2) d\xi_1.$$

Её решение даётся формулой Пуассона

$$\begin{aligned} u^\tau(t, x_1, x_2) &= \frac{1}{2\sqrt{5\pi\mu(t-2\tau/5)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x_2-\xi_2)^2}{20\mu(t-2\tau/5)}} u^\tau(2\tau/5, x_1, \xi_2) d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{5\mu^2\tau(t-2\tau/5)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x_1-\xi_1)^2}{4\mu\tau}} e^{\frac{-(x_2-\xi_2)^2}{20\mu(t-2\tau/5)}} \times \\ &\times \varphi(\xi_1 - a_1\tau, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \qquad 2\tau/5 < t \leqslant 3\tau/5. \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

На четвёртом дробном шаге решается задача Коши для уравнения (2.4.6) с начальными данными $u^\tau(3\tau/5, x)$. Её решение:

$$\begin{aligned} u^\tau(t, x_1, x_2) &= u^\tau(3\tau/5, x_1, x_2 - 5a_2(t-3\tau/5)) = \\ &= \frac{1}{4\pi\mu\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2\}}{4\mu\tau}} \varphi(\xi_1 - a_1\tau, \xi_2 - 5a_2(t-3\tau/5)) d\xi_1 d\xi_2, \\ & \qquad 3\tau/5 < t \leqslant 4\tau/5. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

И, наконец, на пятом дробном шаге решается задача Коши для уравнения (2.4.7) с начальными данными $u^\tau(4\tau/5, x)$. Её решение:

$$\begin{aligned} u^\tau(t,x) &= u^\tau(4\tau/5,x) + 5\int\limits_{4\tau/5}^{t} f(\theta, x)\, d\theta = 5\int\limits_{4\tau/5}^{t} f(\theta, x)\, d\theta + \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2\}}{4\mu\tau}} \varphi(\xi_1 - a_1\tau, \xi_2 - a_2\tau) d\xi_1 d\xi_2, \\ & \qquad 4\tau/5 < t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Построили решение u^τ задачи (2.4.3) – (2.4.8) на отрезке $[0, \tau]$. Теперь строим решение на отрезке $[\tau, 2\tau]$, затем – на отрезке $[2\tau, 3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов построим u^τ на всём отрезке $[0, T]$ (в полосе $\Pi_{[0,T]}$).

Замечание 2.4.1. Следует отметить, что на первых и вторых дробных шагах переменная x_2 рассматривается в качестве параметра. На третьих и четвёртых дробных шагах в качестве параметра выступает уже переменная x_1, а на пятых дробных шагах обе переменные x_1 и x_2 рассматриваются как параметры.

Можно доказать, что решения u^τ и их производные по x равномерно по τ ограничены в $\Pi_{[0,T]}$. Действительно, ограниченность решения u^τ на первых четырех дробных шагах нулевого шага ($n = 0$) следует из принципа максимума (теорема 1.3.4) для решений рассматриваемых уравнений:

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant c_0, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,4\tau/5]}. \tag{2.4.16}$$

Здесь c_0 — постоянная из (2.4.9). Оценка (2.4.16) легко доказывается на основании представлений (2.4.11)–(2.4.14) решения u^τ в полосе $\Pi_{[0,4\tau/5]}$. Из представления (2.4.15), неравенства $|f| \leqslant r_0$ и неравенства (2.4.16) получим, что в $\Pi_{[4\tau/5,\tau]}$

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant c_0 + r_0\tau,$$

откуда и из (2.4.16) следует, что в $\Pi_{[0,\tau]}$

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant c_0 + r_0\tau. \tag{2.4.17}$$

Рассмотрим первый шаг ($n = 1$). На первых четырёх дробных шагах оценка (2.4.17) сохраняется, а на пятом дробном шаге, т. е. в $\Pi_{[9\tau/5,2\tau]}$,

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant c_0 + 2r_0\tau.$$

Продолжая наши рассуждения, получим, что при любом $k \leqslant N-1$ в $\Pi_{[0,(k+1)\tau]}$

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant c_0 + r_0(k+1)\tau.$$

Следовательно, во всей полосе $\Pi_{[0,T]}$

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant c_0 + r_0 T. \tag{2.4.18}$$

Для доказательства ограниченности первых производных по x_i в $\Pi_{[0,T]}$ достаточно продифференцировать задачу (2.4.3)–(2.4.8) по x_i и для $v_i^\tau = \frac{\partial u^\tau}{\partial x_i}$ провести предыдущие рассуждения (v_i^τ удовлетворяют на первых четырёх дробных шагах тем же уравнениям, что и u^τ, и лишь на пятых дробных шагах v_i^τ удовлетворяют уравнению $\dfrac{\partial v_i^\tau}{\partial t} = 5f_{x_i}(t,x)$). Получим, что в $\Pi_{[0,T]}$

$$\left|\frac{\partial u^\tau(t,x)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_1 + r_1 T, \qquad i = 1,2. \tag{2.4.19}$$

Для оценки производной $D_x^\alpha u^\tau$ достаточно применить к задаче (2.4.3)–(2.4.8) оператор дифференцирования D_x^α и повторить предыдущие рассуждения. При этом в $\Pi_{[0,T]}$ получим оценки

$$|D_x^\alpha u^\tau| \leqslant c_n + r_n T \equiv K_n, \qquad |\alpha| = n, \qquad n \geqslant 0. \tag{2.4.20}$$

Выражая производную по времени $\frac{\partial u^\tau}{\partial t}$ из системы уравнений (2.4.3)–(2.4.8), получим, что равномерно по τ ограничены в $\Pi_{[0,T]}$ все производные вида $D_t D_x^\alpha u^\tau$:

$$|D_t D_x^\alpha u^\tau| \leqslant M_n, \qquad |\alpha| = n; \qquad n \geqslant 0. \tag{2.4.21}$$

Из оценок (2.4.20) следует равномерная в $\Pi_{[0,T]}$ ограниченность по τ семейства производных $\{D_x^\alpha u^\tau\}$ (при α фиксированном), а из оценок (2.4.20), (2.4.21) — их равностепенная в $\Pi_{[0,T]}$ непрерывность по t и x. Действительно, учитывая ограниченность в $\Pi_{[0,T]}$ производных от $D_x^\alpha u^\tau$ по t и x, применяя неравенство треугольника и формулу конечных приращений Лагранжа, получим соотношения:

$$\begin{aligned}
|D_x^\alpha u^\tau(t^1,x^1) - D_x^\alpha u^\tau(t^2,x^2)| \leqslant{} & |D_x^\alpha u^\tau(t^1,x^1) - D_x^\alpha u^\tau(t^2,x^1)| + \\
& + |D_x^\alpha u^\tau(t^2,x_1^1,x_2^1) - D_x^\alpha u^\tau(t^2,x_1^2,x_2^1)| + |D_x^\alpha u^\tau(t^2,x_1^2,x_2^1) - \\
& - D_x^\alpha u^\tau(t^2,x_1^2,x_2^2)| \leqslant |D_t D_x^\alpha u^\tau(\tilde{t},x^1)| \cdot |t^1 - t^2| + \\
& + |D_{x_1} D_x^\alpha u^\tau(t^2,\tilde{x_1},x_2^1)| \cdot |x_1^1 - x_1^2| + \\
& + |D_{x_2} D_x^\alpha u^\tau(t^2,x_1^2,\tilde{x_2})| \cdot |x_2^1 - x_2^2| \leqslant \\
& \leqslant c\{|t^1 - t^2| + |x^1 - x^2|\} \qquad \forall\ (t^1,x^1),(t^2,x^2) \in \Pi_{[0,T]},
\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

где постоянная c не зависит от τ. Неравенства (2.4.22) гарантируют равностепенную непрерывность семейства производных $\{D_x^\alpha u^\tau\}$ по переменным t и x в $\Pi_{[0,T]}$.

Следовательно, при любом фиксированном α по теореме Арцела множество $\{D_x^\alpha u^\tau\}$ компактно в $C(\Pi_{[0,T]}^N)$, $N > 0$ — целое.

Диагональным способом выберем подпоследовательность $\{u^{\tau_k}\}$, сходящуюся вместе со всеми производными по x к некоторой функции u в полосе $\Pi_{[0,T]}$, причем равномерно в каждом $\Pi_{[0,T]}^N$. Ясно, что функция u непрерывна, имеет непрерывные в $\Pi_{[0,T]}$ производные любого порядка по x, причем $u(0,x) = \varphi(x)$ и

$$|D_x^\alpha u| \leqslant K_n, \qquad |\alpha| = n, \qquad n \geqslant 0, \tag{2.4.23}$$

$$|D_t^\beta D_x^\alpha u| \leqslant R_n, \qquad \beta + |\alpha| = n, \qquad n \geqslant 0. \tag{2.4.24}$$

Нетрудно проверить выполнение условий теоремы 2.3.1 в $\Pi^N_{[0,T]}$ при любом фиксированном N (в нашем случае $l = 1, \quad r = 2, \quad m = 5$):

$$\varphi_1(t,x,\bar{u}^\tau) = \varphi_{1,\tau}(t,x,\bar{u}^\tau) = -a_1\frac{\partial u^\tau}{\partial x_1},$$
$$\varphi_2(t,x,\bar{u}^\tau) = \varphi_{2,\tau}(t,x.\bar{u}^\tau) = \mu\frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_1^2},$$
$$\varphi_3(t,x,\bar{u}^\tau) = \varphi_{3,\tau}(t,x,\bar{u}^\tau) = \mu\frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_2^2},$$
$$\varphi_4(t,x,\bar{u}^\tau) = \varphi_{4,\tau}(t,x,\bar{u}^\tau) = -a_2\frac{\partial u^\tau}{\partial x_2},$$
$$\varphi_5(t,x,\bar{u}^\tau) = \varphi_{5,\tau}(t.x.\bar{u}^\tau) = f(t,x).$$

По теореме 2.3.1 функция u есть решение задачи (2.4.1), (2.4.2) в $\Pi^N_{[0,T]}$ при любом фиксированном N, а так как N произвольно, то и в $\Pi_{[0,T]}$. Поскольку классическое решение задачи (2.4.1), (2.4.2) с ограниченными начальными данными единственно, то и вся последовательность $\{u^\tau\}$ сходится к u со всеми производными аналогично выбранной подпоследовательности u^{τ_k}. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть выполняются условия* (2.4.9), (2.4.10). *Тогда существуют решение $u(t,x)$ задачи* (2.4.1), (2.4.2) *и решение $u^\tau(t,x)$ задачи* (2.4.3)–(2.4.8), *удовлетворяющие соотношениям* (2.4.20), (2.4.21), (2.4.23), (2.4.24). *При $\tau \to 0$*

$$D^\alpha_x u^\tau \to D^\alpha_x u$$

равномерно в $\Pi^N_{[0,T]}$ для любых фиксированных α, N.

Замечание 2.4.2. Можно установить скорость сходимости u^τ к u. Имеет место оценка

$$\sup_{\Pi_{[0,T]}} |u^\tau(t,x) - u(t,x)| \leqslant c\tau,$$

где постоянная c не зависит от τ.

Замечание 2.4.3. Вместо расщепления (2.4.3) – (2.4.8) можно взять другие расщепления задачи (2.4.1), (2.4.2), например расщепление (2.4.3), (2.4.6), (2.4.5), (2.4.4), (2.4.7), (2.4.8) (поменять порядок в (2.4.3)–(2.4.7)) или расщепление на однородные одномерные параболические уравнения и обыкновенное дифференциальное уравнение. При этом доказательство сходимости МСА можно провести аналогично доказательству теоремы 2.4.1.

Видим, что МСА является эффективным и простым методом построения приближённых решений достаточно сложных задач. Приближённые решения конструируются из решений существенно более простых, чем исходная, задач. При этом существование решения исходной задачи не предполагается, а доказывается на основании априорных оценок решений расщеплённой задачи.

2.5. Задача Коши для уравнения Бюргерса

Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = [0,T] \times E_1$ задачу Коши:

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \qquad \mu > 0 - const \tag{2.5.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in E_1. \tag{2.5.2}$$

Задача Коши (2.5.1), (2.5.2) широко известна в теории турбулентности, а уравнение (2.5.1) называют уравнением Бюргерса. Различные задачи, связанные с изучением этого уравнения даны в [5, 9, 53, 76].

Относительно начальных данных u_0 предположим, что $u_0 \in C^2(E_1)$ и

$$\left|\frac{d^n u_0(x)}{dx^n}\right| \leqslant c_n, \qquad x \in E_1, \qquad n = 0,1,2, \tag{2.5.3}$$

где c_n— некоторые заданные неотрицательные постоянные.

Вначале рассмотрим случай бесконечно дифференцируемых начальных данных. Предположим, что $u_0 \in C^\infty(E_1)$ и

$$\left|\frac{d^n u_0(x)}{dx^n}\right| \leqslant c_n, \qquad x \in E_1, \qquad n = 0,1,\ldots,k,\ldots. \tag{2.5.4}$$

Слабо аппроксимируем задачу (2.5.1), (2.5.2) задачей

$$u_t^\tau = 2\mu u_{xx}^\tau, \qquad n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \tag{2.5.5}$$

$$u_t^\tau + 2u^\tau u_x^\tau = 0, \qquad (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \tag{2.5.6}$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x), \tag{2.5.7}$$

где $\tau N = t^*, N > 1$ — целое, $n = 0,1,...,N-1$, и постоянная t^* удовлетворяет неравенству (2.5.13) (см. ниже).

Замечание 2.5.1. При построении решения задачи (2.5.5)–(2.5.7) на первых дробных шагах решается задача Коши для уравнения теплопроводности, а на вторых дробных шагах – задача Коши для уравнения переноса

$$w_t + 2ww_x = 0. \tag{2.5.8}$$

Известно, что в случае задачи Коши для уравнения (2.5.8) с начальными данными

$$w|_{t=t_0} = w_0, \tag{2.5.9}$$

ограниченными вместе со своими производными, может иметь место "градиентная катастрофа", то есть существовать $t_1 > t_0$ такое, что классическое решение w этой задачи существует в полосе $\Pi_{[t_0,t_1)}$, само остается в этой полосе ограниченным, но производная w_x в окрестности некоторой точки (t_1, x^0) становится неограниченной: $w_x(t,x) \to \infty$ при $t \to t_1$, $x \to x^0$ [53].

Нетрудно показать, что если

$$|\frac{dw_0(x)}{dx}| < c_1, \quad x \in (-infty, +infty), \tag{2.5.10}$$

то классическое решение задачи (2.5.8), (2.5.9) существует в полосе $\Pi_{[t_0,t^*]}$, ограничено и

$$|w_x(t,x)| \leqslant \frac{c_1}{1 - 2c_1(t - t_0)}, \qquad (t,x) \in \Pi_{[t_0,t^*]}, \tag{2.5.11}$$

где t^* удовлетворяет неравенству

$$1 - 2c_1(t^* - t_0) > 0. \tag{2.5.12}$$

Неравенство (2.5.11) доказывается следующим образом. Так как функции $V = w_x(t,x)$, $V^+ = \frac{c_1}{1+2c_1(t-t_0)}$, $V^- = \frac{-c_1}{1-2c_1(t-t_0)}$ являются решениями уравнения

$$W_t + 2wW_x + 2W^2 = 0$$

и выполнется соотношение

$$V^-\big|_{t=t_0} \leqslant V\big|_{t=t_0} \leqslant V^+\big|_{t=t_0},$$

то вследствие теоремы сравнения

$$V^-(t) \leqslant V(t,x) \leqslant V^+(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t^*, \qquad x \in E_1,$$

откуда следует (2.5.11).

Далее покажем, что если выполняется соотношение (2.5.4) и постоянные t^* и c_1 удовлетворяют условию

$$1 - 2c_1 t^* > 0 \tag{2.5.13}$$

(здесь c_1 — постоянная из (2.5.4), ограничивающая производную $\frac{du_0}{dx}$), то решение u^τ в полосе $\Pi_{[0,t^*]}$ существует и ограничено вместе со всеми своими производными по переменным t, x.

Очевидно, что при любом фиксированном τ решение u^τ задачи (2.5.5)–(2.5.7) ограничено постоянной c_0 (там, где это решение существует) независимо от величины τ:

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant c_0. \tag{2.5.14}$$

Оценим u_x^τ в полосе $\Pi_{[0,t^*]}$. Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). Так как на первом дробном шаге u_x^τ удовлетворяет уравнению (2.5.5) и начальным данным $\frac{du_0}{dx}$, то вследствие принципа максимума для уравнения теплопроводности

$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant c_1, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,\frac{\tau}{2}]}.$$

На втором дробном шаге в силу (2.5.11) при $t_0 = \frac{\tau}{2}$ получим неравенство

$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant \frac{c_1}{1 - c_1\tau}, \qquad (t,x) \in \Pi_{[\frac{\tau}{2},\tau]},$$

что вместе с предыдущим соотношением дает оценку

$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant \frac{c_1}{1 - c_1\tau}, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,\tau]}. \tag{2.5.15}$$

Рассмотрим первый целый шаг ($n = 1$). Вследствие принципа максимума на первом дробном шаге в $\Pi_{[\tau,\frac{3}{2}\tau]}$

$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant \frac{c_1}{1 - c_1\tau}, \qquad (t,x) \in \Pi_{[\tau,\frac{3}{2}\tau]}.$$

На втором дробном шаге в силу (2.5.11) при $t_0 = \frac{3}{2}\tau$, $c_1 = \frac{c_1}{1-c_1\tau}$ получим

$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant (\frac{c_1}{1 - c_1\tau})/(1 - \frac{c_1\tau}{1 - c_1\tau}) = \frac{c_1}{1 - 2c_1\tau}, \qquad (t,x) \in \Pi_{[\frac{3}{2}\tau,2\tau]},$$

что вместе с предыдущим соотношением и неравенством (2.5.15) дает оценку

$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant \frac{c_1}{1 - 2c_1\tau}, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,2\tau]}.$$

Повторяя наши рассуждения на втором целом шаге ($n = 2$), получим оценку
$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant \frac{c_1}{1-3c_1\tau}, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,3\tau]}.$$

Очевидно, в $\Pi_{[0,n\tau]}$ имеет место оценка
$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant \frac{c_1}{1-nc_1\tau}$$
и, следовательно, равномерно по $\tau > 0$
$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant \frac{c_1}{1-c_1t^*} = M_1, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}. \tag{2.5.16}$$

Оценим равномерно по параметру τ вторые производные u_{xx}^τ. Продифференцируем задачу (2.5.5)–(2.5.7) по x дважды. Функция $u_{xx}^\tau = z^\tau$ на первых дробных шагах удовлетворяет уравнению (2.5.5), а на вторых дробных шагах — уравнению
$$z_t^\tau + 2u^\tau z_x^\tau + 6u_x^\tau z^\tau = 0, \tag{2.5.17}$$
коэффициенты которого в $\Pi_{[0,t^*]}$ являются равномерно по τ ограниченными функциями. Применяя принцип максимума на первых дробных шагах, где z^τ удовлетворяет уравнению (2.5.5), формулу (1.2.3) решения задачи Коши для уравнения (2.5.17) на вторых дробных шагах и оценку (2.5.16), нетрудно получить неравенство
$$|u_{xx}^\tau(t,x)| \leqslant c_2 e^{3M_1t^*} \equiv M_2, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}. \tag{2.5.18}$$

Действительно, на первом дробном шаге нулевого целого шага ($n = 0$) вследствие теоремы принципа максимума
$$|u_{xx}^\tau(t,x)| \leqslant c_2, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,\frac{\tau}{2}]}.$$
На втором дробном шаге в силу (2.5.17), (2.5.16), (1.2.3)
$$|u_{xx}^\tau(t,x)| \leqslant c_2 e^{3M_1\tau}, (t,x) \in \Pi_{[\frac{\tau}{2},\tau]}.$$
Из последних двух неравенств следует, что
$$|u_{xx}^\tau(t,x)| \leqslant c_2 e^{3M_1\tau}, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,\tau]}.$$
На первом целом шаге ($n = 1$), следовательно, в $\Pi_{[0,2\tau]}$ получим оценку
$$|u_{xx}^\tau(t,x)| \leqslant c_2 e^{6M_1\tau}.$$

Очевидно, что в $\Pi_{[0,k\tau]}$, $k = 1, 2, ..., N$, имеет место неравенство

$$|u^\tau_{xx}(t, x)| \leqslant c_2 e^{3M_1 k\tau},$$

откуда при $k = N$ следует неравенство (2.5.18).

Доказали оценку (2.5.18), дважды дифференцируя задачу (2.5.5)–(2.5.7) по переменной x и рассматривая в качестве неизвестной функции вторую производную u^τ_{xx}.

Трижды дифференцируя задачу (2.5.5)–(2.5.7) по x, рассматривая третью производную u^τ_{xxx} в качестве неизвестной функции и учитывая уже доказанную равномерную по τ ограниченность производных по x от u^τ меньшего порядка, получим оценку

$$|\frac{\partial^3 u^\tau(t, x)}{\partial x^3}| \leqslant M_3, \qquad (t, x) \in \Pi_{[0,t^*]}.$$

Аналогично можно доказать ограниченность частных производных решения u^τ по x любого порядка равномерно по τ:

$$|\frac{\partial^k u^\tau(t, x)}{\partial x^k}| \leqslant M_k, (t, x) \in \Pi_{[0,t^*]}, k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots . \tag{2.5.19}$$

В (2.5.19) значение $M_0 = c_0$, где c_0 — постоянная из (2.5.14).

Из неравенств (2.5.14), (2.5.19) и уравнений (2.5.5), (2.5.6) следуют равномерные по τ оценки:

$$|\frac{\partial^{k+1} u^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k}| \leqslant r_k, \qquad (t, x) \in \Pi_{[0,t^*]}, k = 0, 1, \ldots, n, \ldots . \tag{2.5.20}$$

Из (2.5.19), (2.5.20) следует, что u^τ и ее производные по x любого порядка равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $\Pi_{[0,t^*]}$. На основании теоремы Арцела диагональным способом можно выбрать подпоследовательность $\{u^{\tau_k}\}$ последовательности $\{u^\tau\}$, сходящуюся в $\Pi_{[0,t^*]}$ к функции u вместе со всеми своими производными по x, равномерно в каждой ограниченной области полосы $\Pi_{[0,t^*]}$, вследствие чего функция u имеет производные любого порядка по x и выполняются соотношения

$$u(0, x) = u_0(x), \tag{2.5.21}$$

$$|\frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k}| \leqslant M_k, k = 0, 1, ..., n, \ldots, \qquad (t, x) \in \Pi_{[0,t^*]}. \tag{2.5.22}$$

Нетрудно проверить выполнение условий теоремы 2.3.1. В нашем случае $\ell = 1$, $r = 2$, $m = 2$, $\varphi_1(t, x, \bar{u}) \equiv \varphi_{1,\tau}(t, x, \bar{u}) = \mu u_{xx}$, $\varphi_2(t, x, \bar{u}) \equiv \varphi_{2,\tau}(t, x, \bar{u}) =$

$-uu_x, \bar{u} = (u, u_x, u_{xx})$, и в качестве сходящейся последовательности рассматривается подпоследовательность u^{τ_k}.

По теореме 2.3.1 функция u является решением уравнения (2.5.1) в $\Pi^N_{[0,t^*]}$ при любом $N > 0$ и , следовательно, в $\Pi_{[0,t^*]}$. Вследствие (2.5.22) легко доказать, применяя теорему 1.3.4, что u является единственным решением задачи (2.5.1), (2.5.2) в классе функций, имеющих ограниченные производные по x первого порядка. Следовательно, и сама последовательность функций u^τ при $\tau \to 0$ сходится, как и выбранная ранее подпоследовательность, равномерно в любой ограниченной области полосы $\Pi_{[0,t^*]}$ к функции u вместе со всеми производными по x.

Полученное решение u задачи (2.5.1), (2.5.2) удовлетворяет условиям теоремы 1.3.1. Так как $|\frac{\partial u_0}{\partial x}| \leqslant c_1$, то по лемме 1.3.1 имеет место неравенство $|\frac{\partial u}{\partial x}| \leqslant \widetilde{c}_1$. Продифференцировав уравнение (2.5.1) по x и обозначив $\frac{\partial u}{\partial x} = v$, ввиду того, что модуль v уже оценен, получим уравнение для v, снова удовлетворяющее условиям леммы 1.3.1. Далее, так как $|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}| \leqslant c_2$, то, применяя лемму (1.3.1) к уравнению для v, полученному из уравнения (2.5.1) дифференцированием, найдем, что $|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}| \leqslant \widetilde{c}_2$. Продолжая этот процесс, оценим производные любого порядка в $\Pi_{[0,t^*]}$:

$$|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}| \leqslant \widetilde{c}_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, k, \ldots . \tag{2.5.23}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.5.1) при $t \geqslant t^*$. Вследствие неравенств (2.5.23) на основании приведенных выше рассуждений можем построить решение в некоторой полосе $\Pi_{[t^*,t^*+\delta]}$, где величина $\delta > 0$ определяется постоянной $\widetilde{c}_1$. Так как в $\Pi_{[0,t^*]}$ решение задачи (2.5.1), (2.5.2) уже построено, то имеем решение в полосе $\Pi_{[0,t^*+\delta]}$. Снова, многократно дифференцируя задачу (2.5.1), (2.5.2), на основании леммы 1.3.1, примененной уже к полосе $\Pi_{[0,t^*+\delta]}$, получим те же самые оценки (2.5.23), где постоянные $\widetilde{c}_n$ не изменились, так как они зависят от максимума модуля решения u и постоянных $c_j, j = 1, \ldots, n$, а величина $\sup\limits_{E_1} |u(t,x)|$ не возрастает при росте t ($\sup\limits_{E_1} |u(t,x)| \leqslant c_0$). Следовательно, можем построить решение u в полосе $\Pi_{[0,t^*+2\delta]}$, где опять выполняются неравенства (2.5.23), и так далее. После конечного числа шагов построим решение u задачи (2.5.1), (2.5.2) в полосе $\Pi_{[0,T]}$ для произвольного $T > 0$.

Замечание 2.5.2. Из приведенного выше построения решения u задачи (2.5.1), (2.5.2) следует, что основой здесь является равномерная по τ оценка первой производной u_x^τ. Если эта оценка доказана в заданной полосе $\Pi_{[0,T]}$, то нетрудно доказать оценки высших производных по пространственной переменной и, следовательно, сходимость последовательности u^τ к u сразу во всей заданной полосе $\Pi_{[0,T]}$. Например, пусть $u_0(x)$ — периодическая с периодом 2π функция, удовлетворяющая условиям (2.5.4). Нетрудно показать, что u^τ является периодической по x с периодом 2π функцией. Вследствие периодичности имеет место равномерная сходимость в $\Pi_{[0,t^*]}$ последовательности $\{u_x^\tau\}$ к u_x, что вследствие оценки $|u_x| \leqslant \tilde{c}_1$ гарантирует существование такого числа $\tau_0 > 0$, что при всех $\tau < \tau_0$

$$|u_x^\tau(t,x)| \leqslant \widetilde{c}_1 + 1, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}. \tag{2.5.24}$$

Оценка (2.5.24) гарантирует существование решения u^τ системы (2.5.5), (2.5.6) с начальными данными $u^\tau(t^*,x)$ в некоторой полосе $\Pi_{[t^*,t^*+\delta]}$ (и, следовательно, в полосе $\Pi_{[0,t^*+\delta]}$), где $\delta > 0$ зависит лишь от постоянной $\widetilde{c}_1 + 1$. Так как $u_x^\tau \to u_x$ равномерно в $\Pi_{[0,t^*+\delta]}$, то существует $\tau_1 > 0$ ($\tau_1 \leqslant \tau_0$) такое, что при всех $\tau < \tau_1$

$$|\frac{\partial u^\tau(t,x)}{\partial x}| < \widetilde{c}_1 + 1, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,t^*+\delta]}. \tag{2.5.25}$$

Из (2.5.25) следует существование решения u^τ уже в полосе $\Pi_{[0,t^*+2\delta]}$, а также для всех $\tau < \tau_2$ (здесь $\tau_2 > 0$ — некоторое достаточно малое число, $\tau_2 \leqslant \tau_1$) выполняется неравенство

$$|\frac{\partial u^\tau(t,x)}{\partial x}| < \widetilde{c}_1 + 1, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,t^*+2\delta]}. \tag{2.5.26}$$

Продолжая рассуждения, через конечное число шагов получим, что существует число $\tau_* > 0$ такое, что при любых $\tau < \tau_*$ выполняется неравенство (2.5.26) в полосе $\Pi_{[0,T]}$. Отсюда следует сходимость периодического решения u^τ задачи (2.5.5)–(2.5.7) к периодическому решению u задачи (2.5.1), (2.5.2) в полосе $\Pi_{[0,T]}$, где $T > 0$ — произвольное заданное число.

Из сказанного выше и доказательства существования решения в $\Pi_{[0,t^*]}$, $0 < t^* \leqslant T$, задачи (2.5.1), (2.5.2), проведённого для непериодических начальных данных, следует лемма 2.5.1.

Лемма 2.5.1. *Пусть u_0 — периодическая с периодом 2π функция, удовлетворяющая условиям* (2.5.4). *Тогда решение $u^\tau(t,x)$ задачи*

(2.5.5)–(2.5.7) *сходится при* $\tau \to 0$ *равномерно в* $\Pi_{[0,T]}$ ($T > 0$ — *произвольная фиксированная постоянная) к решению* $u(t,x)$ *задачи* (2.5.1), (2.5.2). *Производные вида* $\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}$, $k = 1, \ldots, n, \ldots$, *сходятся равномерно в* $\Pi_{[0,T]}$ *к соответствующим производным от* $u(t,x)$. *Функция* $u(t,x)$ *как равномерный предел периодических функций с периодом* 2π *является периодической по переменной* x *с периодом* 2π.

Замечание 2.5.3. Рассмотрим случай, когда $u_0 \in C^2(E_1)$ и

$$|\frac{\partial^k u_0(x)}{\partial x^k}| \leqslant c_k, \quad k = 0,1,2; \quad x \in E_1. \tag{2.5.27}$$

Составим средние функции [58]

$$u_0^h(x) = \frac{1}{\varkappa h}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_h(x,y)u_0(y)dy,$$

где

$$w_h(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{r^2}{h^2-r^2}}, r < h \\ 0, r \geqslant h; \end{cases}$$

$$r = |x-y|, \quad \varkappa = \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{z^2}{1-z^2}}dz, \qquad h > 0 \text{ — const.}$$

Из (2.5.27) и свойств средних функций следует, что

$$u_0^h \in C^\infty(E_1) \tag{2.5.28}$$

и имеют место оценки

$$|\frac{\partial^k u_0^h(x)}{\partial x^k}| \leqslant c_k, k = 0,1,2; \qquad x \in E_1; \tag{2.5.29}$$

$$|\frac{\partial^k u_0^h(x)}{\partial x^k}| \leqslant c_k(h)c_0, k = 3,4,\ldots,m,\ldots; \qquad x \in E_1. \tag{2.5.30}$$

Здесь c_k, $k = 0{,}1{,}2$ — постоянные из (2.5.3), а $c_k(h)$, $k = 3{,}4, \ldots, m, \ldots$ — некоторые положительные постоянные, зависящие от $h > 0$. Вообще говоря, $c_k(h) \to \infty$ при $h \to 0$, если $k \geqslant 3$.

Вследствие соотношений (2.5.28)–(2.5.30) начальным данным u_0^h в полосе $\Pi_{[0,T]}$, как было доказано выше, соответствуют решения u^h задачи (2.5.1)–(2.5.2). Применяя лемму 1.3.1, учитывая при этом соотношение (2.5.29), нетрудно показать, что в $\Pi_{[0,T]}$

$$|\frac{\partial^k u^h(t,x)}{\partial x^k}| \leqslant \widetilde{c}_k, \quad k=0,1,2, \tag{2.5.31}$$

где постоянные $\widetilde{c}_k, k=0,1,2$ не зависят от h.

Дважды продифференцируем уравнение (2.5.1) по x. Получим параболическое уравнение на функцию $v^h = \frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2}$. Нетрудно проверить, что вследствие (4.2.31) для всех $h>0$ условия леммы 1.3.1 выполняются относительно решения v^h, причем постоянная c в условии (1.3.8) от h не зависит. Но равномерной по h оценки (1.3.9) на производную $\frac{\partial v^h}{\partial x}\Big|_{t=0}$ нет. Следовательно, по второй части леммы 1.3.1 заключаем, что в $\Pi_{[\delta,T]}, 0<\delta<T$ верна оценка

$$|\frac{\partial^3 u^h(t,x)}{\partial x^3}| \leqslant \widetilde{c}_3(\delta).$$

Еще раз продифференцировав уравнение (2.5.1) по x и применив (к функции $\frac{\partial^3 u^h}{\partial x^3}$) лемму 1.3.1, получим в полосе $\Pi_{[\delta+\frac{\delta}{2},T]}$ оценку

$$|\frac{\partial^4 u^h}{\partial x^4}| \leqslant \widetilde{c}_4(\delta).$$

Вообще же в полосе $\Pi_{[2\delta,T]}$, многократно дифференцируя уравнение (2.5.1) по x и применяя лемму 1.3.1 (ее вторую часть), получим оценки

$$|\frac{\partial^k u^h}{\partial x^k}| \leqslant \widetilde{c}_k(\delta), k=3,4,\ \ldots\ ,m,\ \ldots, \tag{2.5.32}$$

где $\widetilde{c}_k(\delta)$ — постоянные, зависящие от δ и не зависящие от $h>0$.

Из уравнения (2.5.1) и неравенств (2.5.31), (2.5.32) следует ограниченность в полосе $\Pi_{[0,T]}$ производной u_t^h и в полосе $\Pi_{[2\delta,T]}$ производных любого порядка вида $\frac{\partial^{n+1}u^h}{\partial t \partial x^n}, n=1,2,\ \ldots\ ,m,\ \ldots$ постоянными, зависящими от δ :

$$|u_t^h(t,x)| \leqslant M_0, \quad (t,x)\in \Pi_{[0,T]}, \tag{2.5.33}$$

$$|\frac{\partial^{n+1}u^h(t,x)}{\partial t \partial x^n}| \leqslant M_n(\delta), \qquad (t,x)\in \Pi_{[2\delta,T]}. \tag{2.5.34}$$

Из (2.5.31), (2.5.33) следует, что множество $\{u^h\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $\Pi_{[0,T]}$, а производные от u^h по x любого порядка равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $\Pi_{[2\delta,T]}$. Диагональным способом, применяя теорему Арцела, выберем последовательность $\{u^h\}$ (обозначения не меняем), такую, что в $\Pi^N_{[0,T]}$ она равномерно сходится к функции u, а в $\Pi^N_{[2\delta,T]}$ она сходится равномерно к u вместе со всеми своими производными по x. Следовательно, функция u непрерывна в $\Pi_{[0,T]}$, а в $\Pi_{[2\delta,T]}$ имеет производные любого порядка. Устремив δ к нулю, получим существование производных от u по x любого порядка в полосе $\Pi_{(0,T]}$. Ясно (см. (2.5.31)), что

$$|u_x(t,x)| \leqslant \widetilde{c}_1, \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \tag{2.5.35}$$

Нетрудно показать, что функция u является решением задачи (2.5.1), (2.5.2). Вследствие условия (2.5.35) это решение единственно, что может быть доказано стандартным методом: доказательством на основании теоремы 1.3.4 равенства нулю разности двух возможных решений задачи (2.5.1), (2.5.2). Следовательно, вся последовательность $\{u^h\}$ сходится к u при $h \to 0$ так же, как и выбранная нами ранее подпоследовательность.

Глава 3. Метод ε-аппроксимации

Многие задачи механики сплошной среды описываются системами уравнений в частных производных смешанного и составного типов, при изучении которых важную роль играют их аппроксимации, зависящие некоторым образом от малых параметров. Аппроксимации исходных краевых задач задачами, содержащими малые параметры, проводятся таким образом, чтобы последние были по возможности проще для применения как аналитических методов исследования, так и численных. Например, введение в исходные уравнения добавочных членов с малыми параметрами позволяет улучшить дифференциальные свойства решения, сделать задачу более устойчивой к изменениям входных данных и, что особенно важно в приложениях, строить простые и экономичные численные алгоритмы. Известную роль дифференциальные и интегродифференциальные уравнения, содержащие малые параметры, играют в теории некорректных задач, методе фиктивных областей, теории краевых задач для уравнений смешанного и переменного типов [41, 50].

Систему дифференциальных операторных уравнений первого (второго) порядка по времени

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + L(u) = f, \quad \left(\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + L(u) = f\right), \tag{3.0.1}$$

где $u = \{u_1, u_2\}$ – неизвестный, $f = \{f_1, f_2\}$ – заданный векторы, $\hat{u} = \{u_1, 0\}$, $L(u) = \{L_1(u), L_2(u)\}$, $L_i(u)$ – некоторые операторы, будем называть полуэволюционной в отличие от эволюционной системы

$$\frac{du}{dt} + L(u) = f, \quad \left(\frac{d^2u}{dt^2} + L(u) = f\right).$$

В случае линейных обыкновенных дифференциальных уравнений задача Коши для системы уравнений

$$\frac{du_1}{dt} + L_1(u) = f_1, \quad \varepsilon\frac{du_2}{dt} + L_2(u) = f_2,$$

вырождающихся при $\varepsilon = 0$ в полуэволюционные системы вида (3.0.1), исследовалась И.С. Градштейном [23, 24]. Общий нелинейных случай впервые изучен в классических работах А.Н. Тихонова [64, 65], давших толчок большому числу исследований по уравнениям, содержащим малый параметр [15].

Различные краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений с малыми параметрами при старших производных впервые изучались в работах Н. Левинсона, О.А. Олейник, О.А. Ладыженской, М.И. Вишика и Л.А. Люстерника.

Следует отметить работу А.М. Ильина [28], оказавшую глубокое влияние на развитие численных исследований.

Представляют интерес вопросы корректности краевых задач для полуэволюционных систем и их аппроксимации соответствующими краевыми задачами для эволюционных систем, содержащих малые параметры при производных по времени. Так, задача аппроксимации полуэволюционных систем эволюционными возникает при численных расчетах различных задач течения вязкой несжимаемой жидкости, когда система уравнений Навье — Стокса заменяется некоторой эволюционной системой. Обычно заменяется уравнение неразрывности div $u = 0$ на эволюционное с малым параметром ε, причем в необходимых случаях "подправляются"и остальные уравнения системы, так чтобы решение u^ε аппроксимирующей системы сходилось при $\varepsilon \to 0$ к решению соответствующей задачи для исходной системы уравнений Навье — Стокса. Идея указанной аппроксимации была впервые высказана в работе [17]. Теоретическое обоснование различных способов ε-аппроксимации дано в работах А.П. Осколкова, Ш. Смагулова, П.Е. Соболевского, В.В. Васильева, Ю.Я. Белова.

Суть метода ε-аппроксимации состоит в следующем. Исходные краевые задачи аппроксимируются корректными, хорошо изученными задачами, содержащими дополнительные члены с малым множителем $\varepsilon > 0$ (или члены со многими параметрами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$). Затем на основании полученных априорных оценок доказывается сходимость решения u^ε аппроксимирующих задач к решению исходной задачи u. При этом изучаются свойства решений исходных задач и скорость сходимости u^ε к u при $\varepsilon \to 0$. Указанный метод широко применяется при исследованиях систем уравнений составного типа, вырождающихся уравнений, уравнений смешанного и переменного типов [19, 50, 44].

Рассмотрим метод ε - аппроксимации в применении к некоторым классам дифференциальных уравнений и системам уравнений составного типа, играющим важную роль в математической физике.

То, что в следующих разделах рассматрены классы линейных дифференциальных операторных уравнений в гильбертовых пространствах, не затрудняет (а, может быть, даже упрощает) изложение основных результатов. И в то же время это, несомненно, дает большой выигрыш в общности, так как эти классы содержат системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, интегро-дифференциальных уравнений.

3.1. Эволюционные системы уравнений первого порядка с малым параметром при производной по времени

Через V, H обозначим действительные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть далее $(V)^2 = V \times V$, $(H)^2 = H \times H$. Скалярное произведение и норму в H обозначим соответственно (x, y), $\|x\|$. В других пространствах скалярное произведение (норму) будем отмечать индексом. Так, $(x, y)_V$, $\|x\|_V$ — скалярное произведение и норма в V. Предположим, что $V \subset H$ и вложение непрерывно, т. е. $\|x\| \leqslant \|x\|_V$, $\forall x \in V$. Отождествляя H со своим сопряженным, получим вложения $V \subset H \subset V'$, где V' — пространство, сопряженное к V. Считаем отношение двойственности $< x, y >$ пространств V' и V согласованным со скалярным произведением в H:

$$(x, y) =< x, y >, \quad \forall x \in H, y \in V.$$

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ задачу Коши

$$\begin{gathered} u_1'(t) + A_{11}(t)u_1(t) + A_{12}(t)u_2(t) = f_1(t), \\ \varepsilon u_2'(t) + A_{21}(t)u_1(t) + A_{22}(t)u_2(t) = f_2(t), \ (0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon = const, \end{gathered} \tag{3.1.1}$$

$$u(0) = u^0, \tag{3.1.2}$$

где $u^0 = \{u_1^0, u_2^0\}$, $f = \{f_1, f_2\}$ — заданные элементы. $A_{ij}(t)$ — линейные ограниченные операторы из V в V': $A_{ij}(t) \in L(V; V')$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Считаем, что $f(0) \in (H)^2$.

Будем говорить, что билинейная форма $b(t; x, y)$, определенная на некотором пространстве $X \times Y$, порождается оператором $B(t) \in L(X; Y')$, если $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется равенство

$$b(t; x, y) =< B(t)x, y >_Y, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $< \cdot, \cdot >_Y$ — отношение двойственности пространств Y и Y'.

Предположим, что операторы $A_{ij}(t)$ порождают ограниченые билинейные формы $a_{ij}(t;x,y)$:

$$|a_{ij}(t;x,y)| \leqslant \nu\|x\|_V\|y\|_V \quad \forall x,y\in V,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ 0<\nu=const. \qquad (3.1.3)$$

Эти формы считаем непрерывно дифференцируемыми по t, причем

$$|a'_{ij}(t;x,y)| \leqslant \mu\|x\|_V\|y\|_V \quad \forall x,y\in V,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ 0<\mu=const. \qquad (3.1.4)$$

Определение 3.1.1. *Функцию u^ε класса*

$$\big\{u|u\in L_2(0,T;(V)^2),\ u'\in L_2(0,T;(V')^2)\big\}$$

назовем решением задачи (3.1.1), (3.1.2) на отрезке $[0,T]$, если она удовлетворяет условию (3.1.2) и почти для всех $t\in[0,T]$ удовлетворяет системе (3.1.1).

Рассмотрим случай, когда форма

$$a(t;u,v)=\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(t;u_j,v_i)$$

коэрцитивна на V:

$$|a(t;u,u)|\geq \alpha\|u\|^2_{(V)^2} \quad \forall u\in (V)^2,\ 0<\alpha=const. \qquad (3.1.5)$$

Теорема 3.1.1. *Пусть $u^0\in(V)^2$, $f\in W_2^1(0,T;(V')^2)$ и выполняются условия (3.1.3)–(3.1.5). Тогда задача (3.1.1), (3.1.2) имеет единственное решение u^ε в пространстве $W_2^1(0,T;(V)^2)$.*

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.2 гл. 3 в [45].

Рассмотрим случай, когда условие (3.1.5) не выполняется, т. е. оператор $A=(A_{ij})$ не является коэрцитивным в $(V)^2$. Предположим, что при всех $t\in[0,T]$

$$A_{11}(t)\in L(V;V');\quad A_{12}\in L(H;V'),$$
$$A_{21}(t)\in L(V;H);\quad A_{22}\in L(H;H),$$

а билинейные формы $a_{11}(t;\cdot,\cdot)$, $a_{12}(t;\cdot,\cdot)$, $a_{21}(t;\cdot,\cdot)$, $a_{22}(t;\cdot,\cdot)$, порожденные соответственно операторами $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$, $A_{21}(t)$, $A_{22}(t)$ и определенные на пространствах $V \times V$, $H \times V$, $V \times H$, $H \times H$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$a_{11}(t;x,x) \geq \alpha\|x\|_V^2 \quad \forall x \in V, \tag{3.1.6}$$

$$|a'_{11}(t;x,y)| + |a_{11}(t;x,y)| \leqslant \beta\|x\|_V\|y\|_V \quad \forall x,y \in V,\ 0 < \alpha, \beta = const,$$

$$|a'_{12}(t;z,x)| + |a_{12}(t;z,x)| \leqslant \beta\|z\|\|x\|_V,$$

$$|a'_{21}(t;x,z)| + |a_{21}(t;x,z)| \leqslant \beta\|x\|_V\|z\|,$$

$$|a'_{22}(t;z,w)||a_{22}(t,z,w)| \leqslant \beta\|z\|\|w\| \quad \forall z,w \in H. \tag{3.1.7}$$

В данном случае под решением задачи (3.1.1), (3.1.2) будем понимать функцию u^ε класса

$$\{u|u \in L_2(0,T;V \times H), u' \in L_2(0,T;V' \times H)\},$$

удовлетворяющую начальным данным (3.1.2) и системе (3.1.1).

Через $\{w^j\}_{j=1}^\infty$ обозначим базис в V, т. е. систему линейно независимых элементов (линейно независимы любые n элементов w^{j_1},w^{j_2},...,w^{j_n}), таких что суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j w^j$ плотны в V. В дальнейшем систему $\{w^j\}_{j=1}^\infty$ будем считать ортонормированной в H.

Рассмотрим пространство

$$W = \{u|u_1, u_1' \in L_\infty(0,T;H) \cap L_2(0,T;V);\ u_2, u_2' \in L_\infty(0,T;H)\}.$$

Теорема 3.1.2. *Пусть $u^0 \in V \times H$, $f \in W_2^1(0,T;V' \times H)$ и выполняются соотношения (3.1.6), (3.1.7). Тогда задача (3.1.1), (3.1.2) имеет единственное решение в пространстве W.*

Доказательство данной теоремы проведем методом Галеркина для $u^0 = 0$. Общий случай сводится к рассматриваемому заменой $v = u - u^0$. Так как $\varepsilon > 0$ фиксировано, то при доказательстве в обозначениях этот индекс будем опускать.

Приближенные решения задачи (3.1.1), (3.1.2) будем искать в виде

$$u_1^n(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_1^{jn}(t) w^j, \quad u_2^n(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_2^{jn}(t) w^j,$$

где $u^n = \{u_1^n, u_2^n\}$ является решением задачи

$$(u_1^{n\prime}(t), w^j) + a_{11}(t, u_1^n(t), w^j) + a_{12}(t, u_2^n(t), w^j) =< f_1(t), w^j >, \tag{3.1.8}$$

$$\varepsilon(u_2^{n\prime}(t), w^j) + a_{21}(t, u_1^n(t), w^j) + a_{22}(t, u_2^n(t), w^j) = < f_2(t), w^j >, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$u(0) = 0. \tag{3.1.9}$$

Задача (3.1.8), (3.1.9) есть задача Коши для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\alpha_1^n(t)}{dt} + B_{11}^n \alpha_1^n(t) + B_{12}^n(t)\alpha_2^n(t) = f_1^n(t), \\ &\varepsilon\frac{d\alpha_2^n(t)}{dt} + B_{21}^n \alpha_1^n(t) + B_{22}^n(t)\alpha_2^n(t) = f_2^n(t), \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

$$\alpha_k^n(0) = 0, \tag{3.1.11}$$

где $B_{kl}^n(t)$ – матрица размерности $n \times n$,

$$B_{kl}^n(t) = ((b_{kl}^{ij}(t))), \qquad b_{kl}^{ij}(t) = a_{kl}(t; w^i, w^j),$$
$$f_k^n(t) = \left\{< f_k(t), w^1 >, \ldots, < f_k(t), w^n >\right\},$$
$$\alpha_k^n(t) = \{\alpha_k^{1n}(t), \alpha_k^{2n}(t), \ldots, \alpha_k^{nn}(t)\}, \qquad k, l = 1, 2, i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что задача (3.1.10), (3.1.11) имеет на отрезке $[0, T]$ единственное решение класса $W_2^1(0, T)$, так как все b_{kl}^{ij}, f_k^n — функции класса $W_2^1(0, T)$. Таким образом, приближенные решения u^n определены.

Умножим первое уравнение в (3.1.8) на $\alpha_1^{jn} e^{-\theta t}$, второе — на $\alpha_2^{jn} e^{-\theta t}$, просуммируем соответствующие результаты по j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, затем сложим и проинтегрируем по отрезку $[0, t]$, $0 < t \leqslant T$. Учитывая (3.1.6), (3.1.7), применяя неравенство Коши $(2ab \leqslant \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2, \ \delta > 0)$ и выбирая постоянную θ достаточно большой, получим оценку

$$\|u^n(t)\|_{(H)^2}^2 + \int_0^t \|u_1^n(\tau)\|_V^2 \, d\tau \leqslant C_1 \|f\|_{L_2(0,T;V' \times H)}^2, \tag{3.1.12}$$

где постоянная C_1 зависит лишь от α, β, ε, T и не зависит от n.

Из (3.1.10), (3.1.11) следует, что

$$\frac{d\alpha_1^n}{dt}(0) = f_1^n(0), \ \frac{d\alpha_2^n}{dt}(0) = \frac{1}{\varepsilon} f_2^n(0).$$

Значит,

$$u_1^{n\prime}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{d\alpha_1^{jn}}{dt}(0) w^j = \sum_{j=1}^n f_1^{jn}(0) w^j \to f_1(0) \text{ в } H, \tag{3.1.13}$$

$$u_2^{n\prime}(0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{d\alpha_2^{jn}}{dt}(0)w^j=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}f_2^{jn}(0)w^j\to\frac{1}{\varepsilon}f_2(0)\text{ в }H.$$

В этих соотношениях учли тот факт, что $f(0)\in(H)^2$. Дифференцируя (3.1.8) по t, аналогично неравенству (3.1.12) получаем оценку

$$\begin{gathered}\|u^{n\prime}(t)\|^2_{(H)^2}+\int_0^t\|u^{n\prime}{}_1(\tau)\|_V^2\,d\tau\leqslant\\ \leqslant C_2\left(\|(u^n)'(0)\|^2_{(H)^2}+\|f\|^2_{W_2^1(0,T;V'\times H)}\right),\end{gathered}\tag{3.1.14}$$

где постоянная C_2 зависит от тех же величин, что и C_1.

Из соотношений (3.1.12)–(3.1.14) следует ограниченность семейства $\{u^n\}$ в пространстве W. Значит, существует подпоследовательность $\{u^n\}$ (обозначения не меняем), такая что

$$u_1^n\to u_1,\ u_1^{n\prime}\to u_1'\text{ - слабо в }L_{\infty(0,T;H)}\text{ и слабо в }L_2(0,T;V),\tag{3.1.15}$$

$$u_2^n\to u_2,\ u_2^{n\prime}\to u_2'\text{ - слабо в }L_{\infty(0,T;H)}.$$

Переходя к пределу по n в (3.1.8), получаем, что u удовлетворяет этим тождествам при любом фиксированном $j\geq 1$ и, следовательно, системе (3.1.1). На основании соотношений (3.1.9), (3.1.15) доказывается равенство $u(0)=0$.

Таким образом, u – решение задачи (3.1.1), (3.1.2) из пространства W. Нетрудно получить оценку

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;(H)^2)}+\|u_1\|_{L_2(0,T;V)}\leqslant C_3\left(\|u^0\|_{(H)^2}+\|f\|_{L_2(0,T;V'\times H)}\right),$$

где постоянная C_3 зависит лишь от α, β, ϵ, T. Последнее неравенство гарантирует единственность решения задачи 3.1.1, 3.1.2. Теорема доказана.

3.2. Аппроксимация полуэволюцииoнных систем уравнений первого порядка эволюционными

Рассмотрим полуэволюционную систему

$$u_1'(t)+A_{11}(t)u_1(t)+A_{12}(t)u_2(t)=f_1(t),\tag{3.2.1}$$

$$A_{21}(t)u_1(t)+A_{22}(t)u_2(t)=f_2(t),$$

получающуюся из (3.1.1) при $\varepsilon = 0$. Зададим достаточно гладкие начальные данные

$$u(0) = u^0, \tag{3.2.2}$$

удовлетворяющие условияю согласования

$$A_{21}(0)u_1^0 + A_{22}(0)u_2^0 = f_2(0). \tag{3.2.3}$$

Заменой неизвестной функции $v = u - u^0$ задача (3.2.1)–(3.2.3) сводится к задаче (обозначения не меняем)

$$u_1'(t) + A_{11}(t)u_1(t) + A_{12}(t)u_2(t) = f_1(t),$$

$$A_{21}(t)u_1(t) + A_{22}(t)u_2(t) = f_2(t), \tag{3.2.4}$$

$$u(0) = 0, \tag{3.2.5}$$

где функция $f_2(t)$ удовлетворяет условию

$$f_2(0) = 0. \tag{3.2.6}$$

Коэрцитивный случай. Пусть u^ε – решение задачи (3.1.1), (3.2.5), (3.2.6) и $u^{\varepsilon,n}$ — его галеркинские приближения.

Повторяя выкладки, проделанные при получении неравенства (3.1.12) и учитывая коэрцитивность формы $a(t; u, v)$ (см. (3.1.5)), находим, что

$$\|u_1^{\varepsilon,n}(t)\|^2 + \varepsilon\|u_2^{\varepsilon,n}(t)\|^2 + \|u^{\varepsilon,n}(t)\|^2_{L_2(0,T;(V)^2)} \leqslant C_4\|f\|^2_{L_2(0,T;(V')^2)}, \tag{3.2.7}$$

где постоянная C_4 зависит лишь от α, β, T и не зависит от ε, n.

Условия (3.2.5), (3.2.6) (см. (3.1.10), (3.1.11), (3.1.13)) гарантируют равенство

$$\frac{du_2^{\varepsilon,n}}{dt}(0) = 0. \tag{3.2.8}$$

Учитывая (3.2.8) и (3.1.5), тем же методом, что и неравенство (3.1.14), получим оценку

$$\begin{gathered}\left\|\frac{du_1^{\varepsilon,n}(t)}{dt}\right\|^2 + \varepsilon\left\|\frac{du_2^{\varepsilon,n}(t)}{dt}\right\|^2 + \left\|\frac{du^{\varepsilon,n}(t)}{dt}\right\|^2_{L_2(0,T;(V)^2)} \leqslant \\ \leqslant C_5\left(\left\|\frac{du_1^{\varepsilon,n}(0)}{dt}\right\|^2 + \|f\|^2_{W_2^1(0,T;(V')^2)}\right),\end{gathered} \tag{3.2.9}$$

где постоянная C_5 зависит лишь от α, β, T и не зависит от ε, n.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Используя слабую сходимость $u^{\varepsilon,n}$ к u^{ε} в $L_2(0,T;(V)^2)$, можно доказать сильную сходимость $u^{\varepsilon,n}$ к u^{ε} в $L_2(0,T;(V)^2)$ (см. сноску на с. 114 в [45]). Таким же образом доказывается сильная сходимость $\frac{du^{\varepsilon,n}}{dt}$ к $u^{\varepsilon\prime}$ в $L_2(0,T;(V')^2)$. Следовательно, в неравенствах (3.2.7), (3.2.9) можно перейти к пределу по n (почти для всех $t \in [0,T]$):

$$\|u_1^{\varepsilon}(t)\|^2 + \varepsilon\|u_2^{\varepsilon}(t)\|^2 + \|u^{\varepsilon}(t)\|^2_{L_2(0,T;(V)^2)} \leqslant C_4\|f\|^2_{L_2(0,T;(V)^2)}, \tag{3.2.10}$$

$$\begin{gathered}\|u_1^{\varepsilon\prime}(t)\|^2 + \varepsilon\|u_2^{\varepsilon\prime}(t)\|^2 + \\ + \|u^{\varepsilon\prime}\|^2_{L_2(0,T;(V)^2)} \leqslant C_5\left(\|f_1(0)\|^2 + \|f\|^2_{W_2^1(0,T;(V')^2)}\right).\end{gathered} \tag{3.2.11}$$

Из (3.2.10), (3.2.11) следует равномерно по $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$

$$\sqrt{\varepsilon}\|u_2^{\varepsilon\prime}\|_{L_\infty(0,T;H)} \leqslant C_6, \tag{3.2.12}$$

$$\|u^{\varepsilon}\|_{W_2^1(0,T;(V)^2)} \leqslant C_7. \tag{3.2.13}$$

Зафиксируем $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и обозначим через v^{ε} разность $u^{\varepsilon_1} - u^{\varepsilon_2}$: $v^{\varepsilon} = \{v_1^{\varepsilon}, v_2^{\varepsilon}\} = \{u_1^{\varepsilon_1} - u_1^{\varepsilon_2}, u_2^{\varepsilon_1} - u_2^{\varepsilon_2}\}$. Нетрудно показать, что v^{ε} удовлетворяет тождеству

$$(v_1^{\varepsilon\prime}(t), v_1^{\varepsilon}(t)) + (\varepsilon_1 u_2^{\varepsilon_1\prime}(t) - \varepsilon_2 u_2^{\varepsilon_2\prime}(t), v_2^{\varepsilon}(t)) + a(t; v^{\varepsilon}(t), v^{\varepsilon}(t)) = 0.$$

Интегрируя последнее тождество по отрезку $[0,t]$ и используя соотношения (3.1.5), (3.2.12), находим, что

$$\|v_1^{\varepsilon}(t)\|^2 + \|v^{\varepsilon}\|^2_{L_2(0,T;(V)^2)} \leqslant C_7 \max\{\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}\}, \tag{3.2.14}$$

где $C_7 > 0$ не зависит от ε.

По теореме 3.1.1 функция u^{ε} принадлежит пространству $W_2^1(0,T;(V)^2)$ и, значит, пространству $C([0,T];(V)^2)$.

В силу (3.2.14)

$$\begin{gathered} u^{\varepsilon} \to u \text{ сильно в } L_2(0,T;(V)^2), \\ u_1^{\varepsilon} \to u_1 \text{ сильно в } C([0,T];H). \end{gathered} \tag{3.2.15}$$

Из (3.2.13) следуют ограниченность семейства $\{u^{\varepsilon\prime}\}$ в $L_2(0,T;(V)^2)$ и сходимость

$$u^{\varepsilon\prime} \to u' \text{ слабо в } L_2(0,T;(V)^2). \tag{3.2.16}$$

Учитывая равенства $u^{\varepsilon}(0) = 0$ и соотношения (3.2.15), (3.2.16), нетрудно доказать, что $u(0) = 0$.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ выполняются тождества

$$
\begin{aligned}
&(u_1^{\varepsilon\prime}(t), \varphi(t)) + a_{11}(t; u_1^\varepsilon(t), \varphi(t)) + a_{12}(t; u_2^\varepsilon(t), \varphi(t)) =< f_1(t), \varphi(t) >, \\
&\varepsilon(u_2^{\varepsilon\prime}(t), \psi(t)) + a_{21}(t; u_1^\varepsilon(t), \psi(t)) + \\
&\qquad\qquad + a_{22}(t; u_2^\varepsilon(t), \psi(t)) =< f_2(t), \psi(t) >,
\end{aligned}
\tag{3.2.17}
$$

при любых $\varphi, \psi \in L_2(0, T; (V)^2)$. На основании соотношений (3.2.12), (3.2.15), (3.2.16) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в тождествах (3.2.17). Функция u удовлетворяет тождествам

$$
(u_1{}'(t), \varphi(t)) + a_{11}(t; u_1(t), \varphi(t)) + a_{12}(t; u_2(t), \varphi(t)) =< f_1(t), \varphi(t) >, \tag{3.2.18}
$$

$$
a_{21}(t; u_1(t), \psi(t)) + a_{22}(t; u_2(t), \psi(t)) =< f_2(t), \psi(t) >
$$

при любых $\varphi, \psi \in L_2(0, T; (V)^2)$, откуда следует, что u удовлетворяет системе (3.2.4). Таким образом, u − решение задачи (3.2.4)–(3.2.6). Его единственность очевидна.

Для разности $v^\varepsilon = u^\varepsilon - u$ из соотношений (3.2.17), (3.2.18) получим равенство

$$
(v_1^{\varepsilon\prime}(t), v_1^\varepsilon(t)) + \varepsilon(u_2^{\varepsilon\prime}(t), v_2^\varepsilon(t)) + a(t; v^\varepsilon(t), v^\varepsilon(t)) = 0. \tag{3.2.19}
$$

Проинтегрируем тождество (3.2.19) по отрезку $[0, t]$, $0 < t \leqslant T$. Вследствие равенства $v_1^\varepsilon(0) = 0$ и условия (3.1.5)

$$
\|v_1^\varepsilon(t)\|^2 + \alpha \int_0^t \|v^\varepsilon(\tau)\|^2_{(V)^2}\, d\tau \leqslant \varepsilon \int_0^T |(u_2^{\varepsilon\prime}(t), v_2^\varepsilon(t))|\, dt.
$$

Применяя неравенства Шварца и Коши к правой части последнего неравенства и учитывая равномерную ограниченность семейства $\{u^{\varepsilon\prime}\}$ в $L_2(0, T; (V)^2)$ (см. неравенство (3.2.11)), получаем, что

$$
\|v_1^\varepsilon\|_{C([0,T],H)} + \|v^\varepsilon\|_{L_2(0,T;(V)^2)} \leqslant C_4 \varepsilon^{1/2}. \tag{3.2.20}
$$

Доказана теорма 3.2.1.

Теорема 3.2.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1.1. Тогда существует единственное в пространстве $W_2^1(0, T; (V)^2)$ решение u задачи* (3.2.4)−(3.2.6). *Решение u^ε задачи* (3.1.1), (3.2.5), (3.2.6) *сходится к u в норме пространства $L_2(0, T; (V)^2)$ со скоростью $O(\varepsilon^{1/2})$, $\varepsilon \to 0$.*

Замечание. Из неравенства (3.2.20) следует, что компонента u_1^ε сходится к u_1 в норме пространства $C([0,T];H)$ со скоростью $O(\varepsilon^{1/2})$, $\varepsilon \to 0$.

В предположениях теоремы 3.2.1 фигурирует условие согласования входных данных (нулевые начальные условия (3.2.5) плюс условие (3.2.6)), играющее важную роль при доказательстве сходимости u^ε к u (см. вывод соотношений (3.2.8), (3.2.9)). В случае, когда нас не интересует проблема аппроксимации полуэволюционной системы эволюционной, начальные данные следует задавать лишь для компонены u_1:

$$u_1(0) = u_1^0. \tag{3.2.21}$$

Некоэрцитивный случай. Ниже будем предполагать, что форма $a(t;u,v)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.2.

Теорема 3.2.2. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1.2 и существуют положительные постоянные θ, κ, δ, такие что $\frac{\theta}{2}\delta < \alpha$, $\theta\frac{\delta}{2} < \kappa$, где α из* (3.1.6) *и для всех $x \in H$, $y \in V$*

$$|a_{12}(t;x,y) + a_{21}(t;y,x)| \leqslant \theta\|x\|\|y\|_V,$$

$$a_{22}(t,x,x) \geq \kappa\|x\|^2.$$

Тогда существует и единственно в пространстве $W_2^1(0,T;V\times H)$ решение u задачи (3.2.4)–(3.2.6). *При этом*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L_2(0,T;V\times H)} + \|u_1^\varepsilon - u_1\|_{C([0,T];H)} = O(\varepsilon^{1/2}),\ \varepsilon \to 0,$$

где u^ε – решение задачи (3.1.1), (3.2.5), (3.2.6) *класса $W_2^1(0,T;V\times H)$.*

Доказательство теоремы 3.2.2 аналогично доказательству теоремы 3.2.1.

В случае, когда операторы A_{12}, A_{21} не зависят от t, когда $f_2 \equiv 0$ и $A_{22}(t) \equiv 0$, система (3.1.1) принимает вид

$$\begin{gathered} {u_1^\varepsilon}'(t) + A_{11}(t)u_1^\varepsilon(t) + A_{12}u_2^\varepsilon(t) = f_1(t), \\ \varepsilon {u_2^\varepsilon}'(t) + A_{21}u_1^\varepsilon(t) = 0. \end{gathered} \tag{3.2.22}$$

Рассмотрим задачу

$$u_1'(t) + A_{11}(t)u_1(t) + A_{12}u_2(t) = f_1(t),$$

$$A_{21}u_1(t) = 0, \tag{3.2.23}$$

$$u_1(0) = u_1^0, \quad u_1^0 \in V, \quad A_{21}u_1^0 = 0. \tag{3.2.24}$$

Пусть J — множество всех нулей оператора A_{21}. Предполагая, что J содержит элементы, отличные от нулевого, через S обозначим замыкание J по норме пространства H. Ортогональное дополнение S обозначим через $S^\perp$. Ясно, что $H = S \oplus S^\perp$.

Предполагаем далее, что

$$R(A_{12}) = S^\perp, \tag{3.2.25}$$

$$a_{12}(x, y) = -a_{21}(y, x) \quad \forall x \in H, \ \forall y \in V. \tag{3.2.26}$$

Определение 3.2.1. *Назовем решением задачи* (3.2.23), (3.2.24) *функцию* $u_1 \in W_2^1(0, T; J)$*, такую что* $u_1(0) = u_1^0$ *и тождество*

$$(u_1'(t), \varphi(t)) + a_{11}(t; u_1(t), \varphi(t)) =< f_1(t), \varphi(t) > \tag{3.2.27}$$

выполняется при любых $\varphi \in L_2(0, T; J)$.

Единственность такого решения очевидна в силу условия (3.1.6). Покажем, что введенное понятие решения есть действительно расширение понятия классического решения. Пусть $u = \{u_1, u_2\}$ — классическое решение задачи (3.2.23), (3.2.24). Умножая первое уравнение (3.2.23) на $\varphi(t)$ и учитывая (3.2.25), получим (3.2.27). Однако, для гладких обобщенных решений u_1 задачи (3.2.23), (3.2.24), таких что $u_1'(t), A_{11}(t)u_1(t) \in H$, $0 \leqslant t \leqslant T$, функционал $l(t) = u_1'(t) + A_{11}(t)u_1(t) - f_1(t)$ обращается в нуль на элементах из J и в силу плотности J в S на S. Значит $l(t) \in S^\perp$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Из (3.2.25) вытекает существование элемента $u_2(t)$, такого что $A_{12}u_2(t) = -l(t)$. Вывод: $u = \{u_1, u_2\}$ удовлетворяет системе (3.2.23), что и требовалось доказать.

Для эволюционной системы (3.2.22) при $t = 0$ зададим произвольным образом значение u_2^ε:

$$u_2^\varepsilon(0) = u_2^0 \in V. \tag{3.2.28}$$

Докажем сходимость решения u^ε задачи (3.2.22), (3.2.24), (3.2.28) к решению u задачи (3.2.23), (3.2.24). В силу (3.2.26) легко получить равенство

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u_1^\varepsilon(t)\|^2 + \varepsilon\|u_2^\varepsilon(t)\|^2\right\} + 2a_{11}(t; u_1^\varepsilon(t), u_1^\varepsilon(t)) = 2 < f_1(t), u_1^\varepsilon(t) >,$$

откуда следует оценка

$$\begin{gathered} \|u_1^\varepsilon(t)\|^2 + \varepsilon\|u_2^\varepsilon(t)\|^2 + \\ + \|u_1^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_8\left\{\|u^0\|^2_{(H)^2} + \|f_1\|^2_{L_2(0,T;V')}\right\}. \end{gathered} \tag{3.2.29}$$

Учитывая, что $u_2^{\varepsilon}{}'(0) = -\frac{1}{\varepsilon}A_{21}u_1^0 = 0$, известным способом (дифференцируя систему (3.2.22) по t) получаем оценку

$$\|u_1^{\varepsilon}{}'(t)\|^2 + \varepsilon\|u_2^{\varepsilon}{}'(t)\|^2 + \\ + \|u_1^{\varepsilon}{}'(t)\|^2_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_9\left\{\|u^0\|^2_{(H)^2} + \|u_1^{\varepsilon}{}'(0)\|^2 + \|f\|^2_{W_2^1(0,T;V')}\right\}. \tag{3.2.30}$$

Здесь постоянные C_8, C_9 не зависят от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, элемент $u_1^{\varepsilon}{}'(0)$ находится из первого уравнения системы (3.2.22).

Из (3.2.30) следует, что

$$\sqrt{\varepsilon}\|u_2^{\varepsilon}{}'(t)\| \leqslant C_{10}. \tag{3.2.31}$$

Для произвольных $\varphi \in L_2(0,T;J)$, $\psi \in L_2(0,T;H)$ выполняются тождества

$$\begin{gathered}(u_1^{\varepsilon}{}'(t), \varphi(t)) + a_{11}(t; u_1^{\varepsilon}(t), \varphi(t)) =< f_1(t), \varphi(t) >, \\ \varepsilon(u_2^{\varepsilon}{}'(t), \psi(t)) + a_{21}(u_1^{\varepsilon}(t), \psi(t)) = 0.\end{gathered} \tag{3.2.32}$$

Оценки (3.2.29), (3.2.30) позволяют утверждать существование подпоследовательности $\{u_1^{\varepsilon}\}$ (обозначение не меняем), такой что

$$u_1^{\varepsilon} \to u_1,\ u_1^{\varepsilon}{}' \to u_1' \text{ - слабо в } L_\infty(0,T;H), \text{ и слабо } L_2(0,T;V). \tag{3.2.33}$$

Переходя в (3.2.32) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что

$$(u_1'(t), \varphi(t)) + a_{11}(t; u_1(t), \varphi(t)) =< f_1(t), \varphi(t) >, \tag{3.2.34}$$

и в силу (3.2.31) имеет место равенство $a_{21}(u_1(t), \psi(t)) = 0$. Так как $a_{21}(u_1(t), \psi(t)) = (A_{21}u_1(t), \psi(t))$ и ψ — произвольный элемент, то

$$A_{21}u_1(t) = 0. \tag{3.2.35}$$

Из соотношений (3.2.33) и условия $u_1^{\varepsilon}(0) = u_1^0$ следует равенство

$$u_1(0) = u_1^0. \tag{3.2.36}$$

Из (3.2.34)–(3.2.36) заключаем, что u_1 — решение задачи (3.2.23), (3.2.24). Доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.3. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1.2, а также соотношения* (3.2.25), (3.2.26). *Тогда существует единственное в пространстве* $W_2^1(0,T;J) \cap W_\infty^1(0,T;H)$ *решение* u_1 *задачи* (3.2.23), (3.2.24), *являющееся слабым в* $W_2^1(0,T;V)$ *пределом последовательности решений* $\{u_1^{\varepsilon}\}$ *задачи* (3.2.22), (3.2.24), (3.2.28).

Замечание. В случае, когда вложение V в H компактно, последовательность $\{u_1^{\varepsilon}\}$ сходится к u_1 сильно в $L_2(0,T;H)$ (см. теорему 5.1 гл. 1 в [46]).

3.3. Эволюционные системы уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной

Рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$
\begin{aligned}
&u_1^{\varepsilon}{}''(t) + A_{11}(t)u_1^{\varepsilon}(t) + A_{12}u_2^{\varepsilon}(t) = f_1(t),\\
&\varepsilon u_2^{\varepsilon}{}''(t) + A_{21}(t)u_1^{\varepsilon}(t) + A_{22}u_2^{\varepsilon}(t) = f_2(t), \quad \varepsilon > 0
\end{aligned} \tag{3.3.1}
$$

с начальными данными

$$
u^{\varepsilon}(0) = 0, \quad u^{\varepsilon}{}'(0) = d. \tag{3.3.2}
$$

Относительно форм $a_{ij}(t; x, y)$ дополнительно предположим, что они дважды непрерывно дифференцируемы по t, причем формы $a(t; u, v)$, $a'(t; u, v) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a'_{ij}(t; u_j, v_i)$, $a''(t; u, v) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a''_{ij}(t; u_j, v_i)$ ограничены:

$$
\begin{aligned}
|a(t; u, v)| + |a'(t; u, v)| + |a''(t; u, v)| \leqslant \mu \|u\|_{(V)^2} \|v\|_{(V)^2}\\
\forall u, v \in (V)^2, \quad \mu > 0 - const.
\end{aligned} \tag{3.3.3}
$$

Форму $a(t; u, v)$ будем считать симметрической:

$$
a(t; u, v) = a(t; v, u) \quad \forall u, v \in (V)^2. \tag{3.3.4}
$$

Назовем систему (3.3.1) сильно гиперболической, если выполняются соотношения (3.1.5), (3.3.4).

Теорема 3.3.1. *Пусть $d \in (V)^2$, $f \in W_2^2(0, T; (V')^2)$ и выполняются соотношения (3.1.5), (3.3.3), (3.3.4). Тогда задача (3.3.1), (3.3.2) имеет единственное решение в пространстве*

$$
\big\{u | u, u' \in L_\infty(0, T; (V)^2),\ u'' \in L_\infty(0, T; (H)^2)\big\}
$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. При доказательстве теоремы будем опускать в обозначениях индекс ε. Разложим элемент d по базису $\{w^j\}$:

$$
d_i = \sum_{j=1}^{\infty} d_i^j w^j, \quad i = 1, 2. \tag{3.3.5}
$$

За приближенные решения задачи (3.3.1), (3.3.2) возьмем функции $u^n = \{u_1^n, u_2^n\}$, $u_i^n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i^{jn}(t) w^j$, $i = 1, 2$, являющиеся решением задачи

$$
\begin{aligned}
&(u_1^n{}''(t), w^j) + a_{11}(t; u_1^n(t), w^j) + a_{12}(t; u_2^n(t), w^j) =< f_1(t), w^j >,\\
&\varepsilon(u_2^n{}''(t), w^j) + a_{21}(t; u_1^n(t), w^j) + a_{22}(t; u_2^n(t), w^j) =< f_2(t), w^j >,
\end{aligned} \tag{3.3.6}
$$

$$u_i^n(0) = 0, \quad u_i^{n\prime}(0) = \sum_{j=1}^{n} d_i^j w^j. \tag{3.3.7}$$

Из (3.3.5)) получаем, что

$$u_i^{n\prime}(0) = \sum_{j=1}^{n} d_i^j w^j \to d_i \text{ сильно в } V,\ i = 1, 2. \tag{3.3.8}$$

Задача (3.3.6), (3.3.7) приводится к задаче

$$\frac{d^2\alpha_1^n(t)}{dt^2} + B_{11}^n(t)\alpha_1(t) + B_{12}^n(t)\alpha_2^n(t) = f_1^n(t), \tag{3.3.9}$$

$$\varepsilon\frac{d^2\alpha_2^n(t)}{dt^2} + B_{21}^n(t)\alpha_1(t) + B_{22}^n(t)\alpha_2^n(t) = f_2^n(t),$$

$$\alpha_i^n(0) = 0, \quad \frac{d\alpha_i^n(0)}{dt} = d_{in}, \tag{3.3.10}$$

где B_{il}^n – матрицы размерности $n \times n$, $B_{il}^n(t) = ((b_{il}^{kj}(t)))$, $b_{il}^{kj}(t) = a_{il}(t; w^k, w^j)$, $f_i^n(t) = \{< f_i, w^1 >, \dots, < f_i, w^n >\}$, $\alpha_i^n(t) = \left\{\alpha_i^{1n}(t), \alpha_i^{2n}(t), \dots, \alpha_i^{nn}(t)\right\}$, $d_{in} = \left\{d_i^1, d_i^2, \dots, d_i^n\right\}$, $i, l = 1, 2$; $k, j = 1, 2, \dots, n$.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [51] следует, что задача (3.3.9), (3.3.10) имеет на отрезке $[0, T]$ единственное решение $\alpha^n(t) = \{\alpha_1^n(t), \alpha_2^n(t)\}$ класса $W_2^3(0, T)$.

Умножим первое тождество в (3.3.6) на $e^{-\theta t}\frac{d\alpha_1^{jn}(t)}{dt}$ и просуммируем по j от 1 до n. Второе тождество в (3.3.6) умножим на $e^{-\theta t}\frac{d\alpha_2^{jn}(t)}{dt}$ и также просуммируем результат по j. Сложим результаты суммирования и полученную сумму проинтегрируем по отрезку $[0, t]$, $0 < t \leqslant T$. Получим равенство

$$\begin{aligned} &e^{-\theta t}\left\{\|u_1^{n\prime}(t)\|^2 + \varepsilon\|u_2^{n\prime}(t)\|^2\right\} = \|u_1^{n\prime}(0)\|^2 + \varepsilon\|u_2^{n\prime}(0)\|^2 - \\ &- \int_0^t e^{-\theta\tau}\left\{\theta\|u_1^{n\prime}(\tau)\|^2 + \varepsilon\theta\|u_2^{n\prime}(\tau)\|^2\right\} d\tau - \\ &- 2\int_0^t a(\tau; u^n(\tau), u^{n\prime}(\tau))e^{-\theta\tau}\, d\tau + 2\int_0^t < f(\tau, u^{n\prime}(\tau)) >_{(V)^2} e^{-\theta\tau}\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Из (3.3.4) следует, что

$$2\int\limits_0^t a(\tau;u^n(\tau),u^{n\prime}(\tau))e^{-\theta\tau}\,d\tau = -\int\limits_0^t a'(\tau;u^n(\tau),u^n(\tau))e^{-\theta\tau}\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \frac{d}{d\tau}\left\{a(\tau;u^n(\tau),u^n(\tau))e^{-\theta\tau}\right\}\,d\tau + \theta\int\limits_0^t a(\tau;u^n(\tau),u^n(\tau))e^{-\theta\tau}\,d\tau,$$

$$\int\limits_0^t < f(\tau),u^{n\prime}(\tau) >_{(V)^2} e^{-\theta\tau}\,d\tau = \int\limits_0^t \frac{d}{d\tau}\left\{< f(\tau),u^n(\tau) >_{(V)^2} e^{-\theta\tau}\right\}\,d\tau +$$

$$+\theta\int\limits_0^t < f(\tau),u^n(\tau) >_{(V)^2} e^{-\theta\tau}\,d\tau - \int\limits_0^t < f'(\tau),u^n(\tau) >_{(V)^2} e^{-\theta\tau}\,d\tau,$$

то из (3.3.11), применяя неравенства Шварца, Коши, учитывая условия (3.1.5), (3.3.3) и выбирая θ достаточно большим, получаем оценку

$$\begin{aligned}&\|u_1^{n\prime}(t)\| + \sqrt{\varepsilon}\|u_2^{n\prime}(t)\| + \|u^n(t)\|_{(V)^2} \leqslant \\ &\leqslant C_1\left\{\|u^{n\prime}(0)\|_{(H)^2} + \|f\|_{L_2(0,T;(V')^2)} + \|f'\|_{L_2(0,T;(V')^2)}\right\},\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

где $C_1 > 0$ зависит лишь от α, μ, T и не зависит от ε, n.

Продифференцируем тождества (3.3.6) по t. Умножим первое дифференцированное тождество на функцию $\frac{d^2\alpha_1^{jn}(t)}{dt^2}e^{-\theta t}$ и просуммируем результат по j ($j = 1,\ldots,n$). Второе дифференцированное тождество умножим на функцию $\frac{d^2\alpha_2^{jn}(t)}{dt^2}e^{-\theta t}$ и просуммируем результат по j ($j = 1,\ldots,n$). Сложив результат суммирования, получим равенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{-\theta t}\frac{d}{dt}\Big\{\|u_1^{n\prime\prime}(t)\|^2 + \varepsilon\|u_2^{n\prime\prime}(t)\|^2\Big\} = e^{-\theta t} < f'(t),u^{n\prime\prime}(t) >_{(V)^2} -\\ - e^{-\theta t}\left\{a(t;u^{n\prime}(t),u^{n\prime\prime}(t)) + a'(t;u^{n\prime}(t),u^{n\prime\prime}(t))\right\}.\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Из (3.3.13) так же, как было получено неравенство (3.3.12), учитывая (3.3.3) и тот факт, что u^n уже оценены, получим неравенство

$$\begin{aligned}\|u_1^{n\prime\prime}(t)\| + \sqrt{\varepsilon}\|u_2^{n\prime\prime}(t)\| + \|u^{n\prime}(t)\|_{(V)^2} \leqslant C_2\Big\{\|u_1^{n\prime\prime}(0)\| +\\ + \sqrt{\varepsilon}\|u_2^{n\prime\prime}(0)\| + \|u^{n\prime}(0)\|_{(V)^2} + \|f\|_{W_2^1(0,T;(V')^2)} + \|f''\|_{L_2(0,T;(V')^2)}\Big\},\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

где $C_2 > 0$ зависит лишь от α, μ, T и не зависит от ε, n.

Замечание. Пусть f_2 удовлетворяет условию

$$f_2(0) = 0. \tag{3.3.15}$$

В этом случае $f_2^n(0) = 0$ при всех n, а, значит, из (3.3.9) получим

$$u_2^{n\prime\prime}(0) = 0. \tag{3.3.16}$$

В силу (3.3.14), (3.3.16)

$$\begin{aligned} &\|u_1^{n\prime\prime}(t)\| + \sqrt{\varepsilon}\|u_2^{n\prime\prime}(t)\| + \|u^{n\prime}(t)\|_{(V)^2} \leqslant \\ &\leqslant C_2 \left\{ \|u_1^{n\prime\prime}(0)\| + \|u^{n\prime}(0)\|_{(V)^2} + \|f\|_{W_2^1(0,T;(V')^2)} + \|f''\|_{L_2(0,T;(V')^2)} \right\}. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Из соотношений (3.3.7)–(3.3.9) следует, что

$$\|u^{n\prime}(0)\|_{(V)^2} \leqslant C, \quad \|u^{n\prime\prime}(0)\|_{(V)^2} \leqslant C(\varepsilon), \tag{3.3.18}$$

где $C(\varepsilon) > 0$ зависит от ε и не зависит от n.

Из (3.3.12), (3.3.14), (3.3.18) следует ограниченность множеств $\{u^n\}$, $\{u^{n\prime}\}$ и $\{u^{n\prime\prime}\}$ в пространствах $L_\infty(0,T;(V)^2)$ и $L_\infty(0,T;(H)^2)$ соответственно. Существует подпоследовательность $\{u^n\}$ (обозначения не меняем), такая что

$$\begin{gathered} u^n \to u,\ u^{n\prime} \to u' \text{ - слабо в } L_\infty(0,T;(V)^2), \\ u^{n\prime\prime} \to u'', \text{ - слабо в } L_\infty(0,T;(H)^2). \end{gathered} \tag{3.3.19}$$

Вследствие (3.3.7), (3.3.19)

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = d. \tag{3.3.20}$$

Переходя в (3.3.6) к пределу при $n \to \infty$, находим, что u удовлетворяет тождествам (3.3.6) для всех w^j. Отсюда и из (3.3.20) следует, что u – решение задачи (3.3.1), (3.3.2). Единственность решения в классе

$$\left\{ u | u, u' \in L_\infty(0,T;(V)^2), u'' \in L_\infty(0,T;(H)^2) \right\}$$

очевидна. Теорема 3.3.1 доказана.

3.4. Аппроксимация полуэволюционных систем уравнений второго порядка эволюционными

Для полуэволюционной системы

$$
\begin{gathered}
u_1''(t) + A_{11}(t)u_1(t) + A_{12}(t)u_2(t) = f_1(t),\\
A_{21}(t)u_1(t) + A_{22}(t)u_2(t) = f_2(t),
\end{gathered} \tag{3.4.1}
$$

получающейся из (3.3.1) при $\varepsilon = 0$, рассмотрим начальные данные

$$
u(0) = 0, \quad u_1'(0) = d_1. \tag{3.4.2}
$$

Предположим, что

$$
f_2(0) = 0. \tag{3.4.3}
$$

Пусть u^ε — решение задачи (3.3.1), (3.3.2), (3.4.3).

Из соотношения (3.3.17), (3.3.19) следует, что

$$
\|u_1^{\varepsilon\,\prime\prime}\|_{L_\infty(0,T;H)} + \sqrt{\varepsilon}\|u_2^{\varepsilon\,\prime\prime}\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|u^{\varepsilon\,\prime}\|_{L_\infty(0,T;(V)^2)} \leqslant C_3, \tag{3.4.4}
$$

где C_3 не зависит от ε.

Зафиксируем $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Разность $v^\varepsilon = u^{\varepsilon_1} - u^{\varepsilon_2}$ удовлетворяет равенству

$$
\int\limits_0^t \Big\{ \big(v_1^{\varepsilon\,\prime\prime}(\tau), v_1^{\varepsilon\,\prime}(\tau)\big) + \Big(\varepsilon_1 u_2^{\varepsilon_1\,\prime\prime}(\tau) - \varepsilon_2 u_2^{\varepsilon_2\,\prime\prime}(\tau), v_2^{\varepsilon\,\prime}(\tau)\Big) \Big\} e^{-\theta\tau}\, d\tau +
$$

$$
+ \int\limits_0^t a(\tau; v^\varepsilon(\tau), v^{\varepsilon\,\prime}(\tau)) e^{-\theta\tau}\, d\tau = 0,
$$

откуда, учитывая (3.1.5), (3.3.3), (3.3.4), (3.4.4), получаем

$$
\|v_1^{\varepsilon\,\prime}(t)\| + \|v^\varepsilon(t)\|_{(V)^2} \leqslant C_4 \max\{\varepsilon_1^{\frac14}, \varepsilon_2^{\frac14}\}. \tag{3.4.5}
$$

По теореме 3.3.1 функция u^ε принадлежит пространству $W^2_\infty(0,T;(H)^2) \cap W^1_\infty(0,T;(V)^2)$ и, значит, пространству $C([0,T];(V)^2) \cap C^1([0,T];(H)^2)$.

Вследствие (3.4.5)

$$
u^\varepsilon \to u \text{ сильно в } C([0,T];(V)^2),\ u_1^{\varepsilon\,\prime} \to u_1' \text{ сильно в } C([0,T];H). \tag{3.4.6}
$$

Из (3.4.4), в частности, вытекают ограниченность множеств $u_1^{\varepsilon\,\prime\prime}$, $u^{\varepsilon\,\prime}$ в $L_\infty(0,T;H)$, $L_\infty(0,T;(V)^2)$ соответственно и, следовательно, их слабая сходимость. Отсюда и из (3.4.6)

$$
u^{\varepsilon\,\prime} \to u' \text{ - слабо в } L_\infty(0,T;(V)^2), \tag{3.4.7}
$$

$$u_1^{\varepsilon\prime\prime} \to u_1'' \text{ - слабо в } L_\infty(0,T;H). \tag{3.4.8}$$

Так как u^ε удовлетворяет при любых $\varphi \in W_2^1(0,T;(V)^2)$ тождествам

$$\begin{aligned} (u_1^{\varepsilon\prime\prime}(t),\varphi_1(t)) + a_{11}(t;u_1^\varepsilon(t),\varphi_1(t)) &+ \\ + a_{12}(t;u_2^\varepsilon(t),\varphi_1(t)) &=< f_1(t),\varphi_1(t) >, \\ \varepsilon(u_2^{\varepsilon\prime\prime}(t),\varphi_2(t)) + a_{21}(t;u_1^\varepsilon(t),\varphi_2(t)) &+ \\ + a_{22}(t;u_2^\varepsilon(t),\varphi_2(t)) &=< f_2(t),\varphi_2(t) >, \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

то, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в первом тождестве (3.4.9) и учитывая (3.4.6), (3.4.8), получаем

$$\begin{aligned} (u_1{}''(t),\varphi_1(t)) + a_{11}(t;u_1(t),\varphi_1(t)) &+ \\ + a_{12}(t;u_2(t),\varphi_1(t)) &=< f_1(t),\varphi_1(t) > . \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Из второго тождества (3.4.9), учитывая (3.4.4), в пределе получим равенство

$$a_{21}(t;u_1(t),\varphi_2(t)) + a_{22}(t;u_2(t),\varphi_2(t)) =< f_2(t),\varphi_2(t) > . \tag{3.4.11}$$

Из (3.4.6)–(3.4.8) следует, что u удовлетворяет условиям (3.4.2) и в силу (3.4.10), (3.4.11) является решением задачи (3.4.1)–(3.4.3) в классе

$$Z = \left\{ u | u \in W_\infty^1(0,T;(V)^2),\ u_1'' \in L_\infty(0,T;H) \right\}.$$

Для разности $v^\varepsilon = u^\varepsilon - u$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\|v_1^{\varepsilon\prime}(t)\|^2 e^{-\theta t} + \theta \int_0^t \|v_1^{\varepsilon\prime}(\tau)\| e^{-\theta\tau}\, d\tau + \alpha\|v^\varepsilon(t)\|^2_{(V)^2} e^{-\theta t} + \\ &+ (\theta\alpha - \mu)\int_0^t \|v^\varepsilon\|^2_{(V)^2} e^{-\theta\tau}\, d\tau \leqslant 2\varepsilon \int_0^t e^{-\theta\tau}\|u_2^{\varepsilon\prime\prime}(\tau)\|\|v_2^{\varepsilon\prime}(\tau)\|\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Вследствие (3.4.4) и того факта, что $u_2' \in L_\infty(0,T;V)$, получим оценку

$$2\varepsilon \int_0^T \|u_2^{\varepsilon\prime\prime}(\tau)\|\|v_2^{\varepsilon\prime}(\tau)\|\, d\tau \leqslant \sqrt{\varepsilon} C_5,$$

которая совместно с (3.4.12) дает неравенство

$$\|v_1^{\varepsilon\prime}\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|v^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;(V)^2)} \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{4}} C_6. \tag{3.4.13}$$

Таким образом, доказана теорема 3.4.1.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $d_1 \in V$, $f \in W_2^2(0,T;(V')^2)$ *и выполняются соотношения* (3.1.5), (3.3.3), (3.3.4). *Тогда существует единственное в пространстве* Z *решение* u *задачи* (3.4.1)−(3.4.3). *Решение* u^ε *задачи* (3.3.1), (3.3.2), (3.4.3) *сходится к* u *в норме пространства* $L_\infty(0,T;(V)^2)$ *со скоростью* $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$, $\varepsilon \to 0$.

Замечание. Из неравенства (3.4.13) следует, что $u_1^{\varepsilon\prime}$ сходится к u_1' в норме пространства $L_\infty(0,T;H)$.

3.5. Аппроксимация параболических уравнений гиперболическими

Рассмотрим на отрезке $[0,T]$ задачу Коши

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t), \tag{3.5.1}$$

$$v(0) = 0, \tag{3.5.2}$$

где $A(t) \in L(V;V')$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Через $a(t;x,y)$ обозначим билинейную форму, порожденную на V оператором $A(t)$:

$$a(t;x,y) =< A(t)\,x, y >, \quad \forall x,y \in V.$$

При выполнении условия

$$a(t;x,x) \geq \alpha\|x\|_V^2, \quad \forall x \in V \tag{3.5.3}$$

уравнение (3.5.1) естественно назвать сильно параболическим.

Аппроскимируем уравнение (3.5.1) уравнением

$$\varepsilon v^{\varepsilon\prime\prime}(t) + v^{\varepsilon\prime}(t) + A(t)v^\varepsilon(t) = f(t), \quad \varepsilon > 0 - const. \tag{3.5.4}$$

Предположим, что форма $a(t;x,y)$ — симметрическая и дважды непрерывно дифференцируема:

$$a(t;x,y) = a(t;y,x), \tag{3.5.5}$$

$$|a(t;x,y)| + |a'(t;x,y)| + |a''(t;x,y)| \leqslant \mu\|x\|_V\|y\|_V \quad \forall x,y \in V, \tag{3.5.6}$$

Уравнение (3.5.4) назовем сильно гиперболическим, если выполняются соотношения (3.5.3), (3.5.5).

Для уравнения (3.5.4) зададим начальные данные

$$v^\varepsilon(0) = 0, \tag{3.5.7}$$

$$v^{\varepsilon\prime}(0) = f(0). \tag{3.5.8}$$

Теорема 3.5.1. *Пусть* $f \in W_2^2(0,T;V')$ *и выполняются условия* (3.5.3), (3.5.6). *Тогда существует единственное в пространстве* $W_2^2(0,T;V)$ *решение* v *задачи* (3.5.1), (3.5.2).

Доказательство теоремы 3.5.1 проводится по схеме, примененной при доказательстве теоремы 1.2 гл. 3 в [45].

Теорема 3.5.2. *Пусть* $f(0) \in V$, $f \in W_2^2(0,T;V')$ *и выполняются соотношения* (3.5.3), (3.5.5), (3.5.6). *Тогда существует единственное в пространстве* $W_\infty^2(0,T;H) \cap W_\infty^1(0,T;V)$ *решение* v^ε *задачи* (3.5.4), (3.5.7), (3.5.8).

Доказательство теоремы 3.5.2 проводится аналогично доказательству теоремы 3.3.1, так как новый член $v^{\varepsilon\prime}$ не затрудняет вывод оценок вида (3.3.12), (3.3.17).

Пусть $f(0) = 0$, v — решение задачи (3.5.1), (3.5.2), v^ε — решение задачи (3.5.4), (3.5.7), (3.5.8). Разность $w^\varepsilon = v^\varepsilon - v$ удовлетворяет неравенству

$$e^{-\theta t}\left(\varepsilon v''(t) + \varepsilon w^{\varepsilon\prime\prime}(t) + w^{\varepsilon\prime}(t), w^{\varepsilon\prime}(t)\right) + e^{-\theta t} a(t, w^\varepsilon(t), w^{\varepsilon\prime}(t)) = 0. \quad (3.5.9)$$

Интегрируя равенство (3.5.9) по отрезку $[0,t], 0 < t \leqslant T$, учитывая при этом равенства $w^\varepsilon(0) = 0$, $w^{\varepsilon\prime}(0) = 0$ и условия (3.5.3), (3.5.5), (3.5.6), находим:

$$\|w^{\varepsilon\prime}(t)\|_{L_2(0,T;H)} + \|w^\varepsilon(t)\|_{C(0,T;V)} \leqslant C\varepsilon^{1/2}, \quad (3.5.10)$$

где постоянная C зависит лишь от α, μ, T, $\|v''\|_{L_2(0,T;H)}$ и не зависит от ε. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.5.3. *Пусть* $f(0) = 0$ *и выполняются условия теоремы 3.5.2. Тогда существуют решения* v *и* v^ε *задач* (3.5.1), (3.5.2) *и* (3.5.4), (3.5.7), (3.5.8), *определяемые теоремами 3.5.1, 3.5.2 соответственно. При этом*

$$\varepsilon^{1/2}\|v^{\varepsilon\prime} - v'\|_{L_\infty([0,T];H)} + \|v^\varepsilon - v\|_{L_\infty([0,T];V)} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Отметим, что поведение решения задачи Коши для уравнений второго порядка в банаховом пространстве, содержащих малый параметр ε при старшей производной, изучал П.Е. Соболевский [60].

3.6. Примеры

Пример 1. Рассмотрим в пространстве E_3 область

$$Q = \big\{x = (x_1, x_2, x_3)\,|(x_1, x_2) \in \Omega, 0 < x_3 < h(x_1, x_2)\big\},$$

где Ω — односвязная ограниченная область плоскости $x_3 = 0$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $h(x_1, x_2)$ — заданная гладкая функция переменных (x_1, x_2). Пусть, далее $Q_T = \{(t, x)|0 < t < T, x \in Q\}$.

Поставим задачу динамики баротропного океана: найти в Q_T решение системы

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial x_3}\right) + \kappa\Delta v + g\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + lw + F_1,\\
&\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu\frac{\partial w}{\partial x_3}\right) + \kappa\Delta w + g\frac{\partial \xi}{\partial x_2} - lv + F_2,\\
&\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^{h(x_1,x_2)} v\,dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_0^{h(x_1,x_2)} w\,dx_3 + F_3
\end{aligned}\tag{3.6.1}$$

с однородными начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial x_3} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \quad \text{при } \ x_3 = 0,\\
&v = w = 0 \quad \text{при } \ x_3 = h,\\
&v|_{(x_1,x_2)\in\partial\Omega} = w|_{(x_1,x_2)\in\partial\Omega} = 0,\\
&v|_{t=0} = w|_{t=0} = \xi|_{t=0} = 0.
\end{aligned}\tag{3.6.2}$$

Здесь $g, \nu, \kappa = const > 0, l, F_k(k = 1, 2, 3)$ — заданные в Q_T достаточно гладкие функции, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа.

Постановка задачи (3.6.1), (3.6.2) и доказательство единственности гладкого решения даны в [39].

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0,\\
&\Psi|_{t=0} = 0.
\end{aligned}\tag{3.6.3}$$

Через Z обозначим подпространство пространства $W_2^1(Q)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{Q})$, равных нулю вблизи границы $\partial\Omega$ цилиндра Q за исключением точек $\{x|(x_1, x_2) \in \Omega, x_3 = 0\}$. Очевидно, что пространство Z сепарабельно.

Введем следующие обозначения:

$$H = (L_2(Q))^2, \quad V = (Z)^2, \quad u_1 = (v, w), \quad u_2 = (\xi, \Psi),$$
$$f_1 = (F_1, F_2), \quad f_2 = (F_3, 0),$$
$$A_{11}u_1 = \left(-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu \frac{\partial v}{\partial x_3}\right) - \kappa\Delta v - lw, -\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu\frac{\partial w}{\partial x_3}\right) - \kappa\Delta w + lv \right),$$
$$A_{12}u_2 = \left(-g\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, -g\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right),$$
$$A_{21}u_1 = \left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^h v\,dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_0^h w\,dx_3, 0 \right), \qquad A_{22}u_2 \equiv 0.$$

Задача (3.6.1), (3.6.2) сведена к задаче (3.1.1), (3.1.2) (в случае $\varepsilon = 1, u^0 \equiv 0$). Определим формы $a_{ij}(t; u_1, u_2)$ равенствами

$$a_{11}(t, u_1, u_2) = \int\limits_Q \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial \xi}{\partial x_3} + \kappa \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} - lw\xi + \right.$$
$$\left. + \nu\frac{\partial w}{\partial x_3}\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \kappa\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + lv\Psi \right) dx,$$

$$a_{12}(t, u_2, u_1) = g\int\limits_Q \xi \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) dx,$$

$$a_{21}(t, u_1, u_2) = -\int\limits_Q \xi \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^h v\,dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_0^h w\,dx_3 \right) dx,$$
$$a_{22}(t, u_1, u_2) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Формы $a_{11}(t, u_1, u_2), a_{12}(t, u_1, u_2), a_{21}(t, u_1, u_2)$ определены соответственно на пространствах $(V)^2$, $H \times V$, $V \times H$. Вследствие предположений относительно коэффициентов и правой части системы (3.6.1) легко проверить выполнение условий теоремы 3.1.2. Таким образом, решение (v, w, ξ, Ψ) задачи (3.6.1)–(3.6.3) существует и единственно в классе

$$\left\{ (v, w, \xi, \Psi) | v, w, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \in L_\infty(0, T, L_2(Q)) \cap L_2(0, T, Z); \right.$$
$$\left. \xi, \Psi, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial t} \in L_\infty(0, T, L_2(Q)) \right\}.$$

Первые компоненты (v, w, ξ) являются решеннием задачи (3.6.1), (3.6.2). Ясно, что $\Psi \equiv 0$ (см. (3.6.3)).

Пример 2. В $\Omega_T = \{(t.x)|0 < t < T, x \in \Omega \subset E_n\}$, где Ω — ограниченная в E_n область рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_{11}^i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} A_{12}^i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + B_{11}u_1 + B_{12}u_2 = \Delta u_1 + f_1$$

$$\varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_{21}^i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \theta_1 \sum_{i=1}^{n} A_{22}^i \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + B_{21}u_1 + B_{22}u_2 = \theta_2 \Delta u_2 + f_2. \quad (3.6.4)$$

Здесь $A_{kj}^i = A_{kj}^i(t, x)$, $B_{kj} = B_{kj}(t, x)$ — матрицы размерности $n \times n$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа, $\theta_k = const$, $0 \leqslant \theta_k \leqslant 1$, $u_j = (u_j^1, \dots, u_j^n)$ — неизвестные функции, $f_k = (f_k^1, \dots, f_k^n)$ — заданные n-мерные функции $(k, j = 1, 2,\ i = 1, \dots, n)$.

При $\theta_2 \neq 0$, $\varepsilon > 0$ система (3.6.4) явяется сильно параболической. В этом случае теоремы существования и единственности решений различных краевых задач дает теорема 3.1.1.

В случае $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\varepsilon > 0$ начальные данные и краевые условия для u_1 задаются так же, как и для параболических систем, а для u_2 задаются лишь начальные данные. Теоремы существования и единственности соответствующим образом определенных обобщенных решений этих краевых задач вытекают из теоремы 3.1.2

В качестве пространства H возмем пространство $(L_2(\Omega))^n$. Тип краевой задачи определяет выбор пространства V. Нетрудно привести те ограничения на коэффициенты системы (3.6.4), при которых выполняются условия теорем 3.2.1, 3.2.2. Каким образом вводятся операторы $A_{ij}(t)$, см. в примере 4.

Пример 3. Рассмотрим в $\Omega_T = \{(t, x)|0 < t < T, x \in \Omega\}$, где $\Omega \subset E_3$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, линеаризованную систему уравнений Навье—Стокса:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + (w, \nabla)v + \nabla p - \nu \Delta v = F, \\ &div\, v = 0. \end{aligned} \qquad (3.6.5)$$

Здесь p — неизвестная функция, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — неизвестная вектор-функция, $w = (w_1, w_2, w_3)$, $F = (F_1, F_2, F_3)$ — заданные достаточно гладкие вектор-функции, $\nu > 0 - const$,

$$(w, \nabla) = \sum_{i=1}^{3} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}).$$

Зададим начальные и краевые условия

$$v|_{t=0} = 0, \qquad v|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{3.6.6}$$

Рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + (w, \nabla)v^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \nu\Delta v^\varepsilon = F, \\ &\varepsilon\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} + div\, v^\varepsilon = 0, \\ &v^\varepsilon|_{t=0} = p^\varepsilon|_{t=0} = 0, \qquad v^\varepsilon|_{x\in\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

$$\varepsilon\frac{\partial p_i^\varepsilon}{\partial t} = 0, \qquad p_i^\varepsilon|_{t=0} = 0,\ i = 2, 3. \tag{3.6.8}$$

Ясно, что задача (3.6.7) и задача (3.6.7), (3.6.8) эквивалентны, причем $p_i^\varepsilon = 0, i = 2, 3$. Эквивалентность понимается следующим образом: пара $(v^\varepsilon, p^\varepsilon)$ тогда и только тогда является решением задачи (3.6.7), когда вектор $(v^\varepsilon, p^\varepsilon, 0, 0)$ — решение задачи (3.6.7), (3.6.8).

Введем следующие обозначения:

$$u_1 = v, \quad u_2 = (p, p_2, p_3), \quad f_1 = F, \quad f_2 = 0,$$

$$H = (L_2(\Omega))^3, \quad V = (\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))^3,$$

$$A_{11}u_1 = -\nu\Delta u_1 + (w, \nabla)u_1,$$

$$A_{12}u_2 = \nabla p, \quad A_{21}u_1 = (div\, u_1, 0, 0), \quad A_{22} = 0.$$

Итак, задача (3.6.7), (3.6.8) сведена к задаче (3.2.22), (3.2.24), (3.2.28). Нетрудно проверить выполнение условий теоремы 3.2.3, учитывая возможность разложения пространства $(L_2(\Omega))^3$ в прямую сумму подпространств $\overset{0}{J}(\Omega)$ и $G(\Omega)$. Здесь $\overset{0}{J}(\Omega)$ — замыкание в норме пространства $(L_2(\Omega))^3$ множества соленоидальных и финитных в Ω векторов, $G(\Omega)$ состоит из $\nabla\varphi$, где φ — однозначная в Ω функция класса $W_2^1(\Omega)$ [42].

По теореме 3.2.3 существует решение $u_1 = (v_1, v_2, v_3)$ задачи (3.6.5), (3.6.6) в пространстве $W_2^1(0, T; J) \cap W_\infty^1(0, T; (L_2(\Omega))^3)$, причем u_1 является слабым в $L_2(0, T; (W_2^1(\Omega))^3)$ пределом последовательности первых компонент v^ε решений $(v^\varepsilon, p^\varepsilon)$ задачи (3.6.7). Здесь J – замыкание в $(W_2^1(\Omega))^3$ пространства финитных соленоидальных векторов.

Заметим, что соотношения (3.6.8) нужны для формального сведения задачи (3.6.7), (3.6.8) или, что то же самое, задачи (3.6.7) к задаче (3.2.22), (3.2.24), (3.2.28).

Пример 4. В цилиндре Ω_T для системы $2n$ уравнений

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{n}A_{11}^i\frac{\partial v_1}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}A_{12}^i\frac{\partial v_2}{\partial x_i}+B_{11}v_1+B_{12}v_2-\Delta v_1=F_1,$$
$$\varepsilon\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{n}A_{21}^i\frac{\partial v_1}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}A_{22}^i\frac{\partial v_2}{\partial x_i}+B_{21}v_1+B_{22}v_2-\Delta v_2=F_2 \qquad (3.6.9)$$

рассмотрим первую краевую задачу

$$v|_{t=0}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=w,\ w\in(\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))^{2n}, \qquad v|_{x\in\partial\Omega}=0. \qquad (3.6.10)$$

Здесь $A_{kj}^i = A_{kj}^i(t,x)$, $B_{kj} = B_{kj}(t,x)$ — заданные матрицы размерности $n\times n$ с элементами, зависящими от t, x. Вектор-функция $v=(v_1,v_2)$ — неизвестная, а $w=(w_1,w_2)$, $F=(F_1,F_2)$ — заданные вектор-функции размерности $2n$.

Через $(3.6.9^0)$ обозначим систему (3.6.9) с $\varepsilon = 0$. Для системы $(3.6.9^0)$ поставим начальные и краевые условия

$$v|_{t=0}=0, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial t}|_{t=0}=w_1, \qquad v|_{x\in\partial\Omega}=0. \qquad (3.6.11)$$

Введем обозначения

$$u_1=v_1,\quad u_2=v_2,\quad f_1=F_1,\quad f_2=F_2,$$
$$H=(L_2(\Omega))^n,\quad V=(\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))^n,$$
$$A_{11}\varphi=-\Delta\varphi+\sum_{i=1}^{n}A_{11}^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+B_{11}\varphi,$$
$$A_{12}\varphi=\sum_{i=1}^{n}A_{12}^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+B_{12}\varphi,$$
$$A_{21}\varphi=\sum_{i=1}^{n}A_{21}^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+B_{21}\varphi,$$
$$A_{22}\varphi=-\Delta\varphi+\sum_{i=1}^{n}A_{22}^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+B_{22}\varphi,$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ — элементы пространства $(\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))^n$.

Выпишем билинейные формы $a_{ij}(t, \varphi, \psi)$, порожденные на V операторами $A_{ij}(t)$:

$$a_{11}(t; \varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\Big)\Big) + \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} A_{11}^i(t, \cdot)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \psi\Big)\Big) + \Big(\Big(B_{11}(t, \cdot)\varphi, \psi\Big)\Big),$$

$$a_{12}(t; \psi, \varphi) = \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} A_{12}^i(t, \cdot)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \varphi\Big)\Big) + \Big(\Big(B_{12}(t, \cdot), \psi, \varphi\Big)\Big),$$

$$a_{21}(t; \varphi, \psi) = \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} A_{21}^i(t, \cdot)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \psi\Big)\Big) + \Big(\Big(B_{21}(t, \cdot), \varphi, \psi\Big)\Big),$$

$$a_{22}(t; \psi, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big)\Big) + \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} A_{22}^i(t, \cdot)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \varphi\Big)\Big) + \Big(\Big(B_{22}(t, \cdot)\psi, \varphi\Big)\Big),$$

$$((\cdot, \cdot)) = (\cdot, \cdot)_{(L_2(\Omega))^n}.$$

Будем считать матрицы A_{kj}^i, B_{kj} такими, что форма

$$a(t; u, v) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(t, u_j, v_i)$$

удовлетворяет условиям (3.1.5), (3.3.3), (3.3.4). Вектор F считаем достаточно гладким, причем $F_2(0, x) = 0$.

Следовательно, задачи (3.6.9), (3.6.10) и ($3.6.9^0$), (3.6.11) сведены к задачам (3.3.1), (3.3.2), (3.4.3) и (3.4.1)–(3.4.3) соответственно, причем выполняются условия теоремы 3.4.1. По теореме 3.4.1 существует единственное решение v задачи ($3.6.9^0$), (3.6.11) в пространстве

$$\left\{ v | v \in W_\infty^1(0, T; (\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))^{2n}), \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \in L_\infty(0, T; (L_2(\Omega))^n) \right\}.$$

Решение v^ε задачи (3.6.9), (3.6.10) сходится к v по норме пространства $L_\infty(0, T; (\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))^{2n})$ со скоростью $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$, $\varepsilon \to 0$. Существование и единственность решения u^ε задачи (3.6.9), (3.6.10) в пространстве

$$W_\infty^2(0, T; (L_2(\Omega))^{2n}) \cap W_\infty^1(0, T; (\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))^{2n}).$$

следует из теоремы 3.3.1.

Пример 5. Рассмотрим в $\Omega_T = \{(t,x)|0 < t < T, x \in \Omega \subset E_n\}$ задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + L(t,x)v = F(t,x), \\ &v|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial n}|_S = 0, \qquad F(0,x) \equiv 0, \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

где n — внешняя конормаль к боковой поверхности $S = [0,T] \times \partial\Omega$, $L(t,x)u = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u\Big)$ — линейное дифференциальное выражение.

Предположим, что функции a_{ij}, c, F принадлежат классу $C^2(\overline{\Omega}_T)$, $c(t,x) \geq 0$ и выполняется соотношение

$$\kappa|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j, \quad \forall \xi \in E_n, \quad \kappa > 0 - const.$$

Аппроксимируем задачу (3.6.12) задачей

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + L(t,x)v^\varepsilon = F(t,x), \\ &v^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}|_{t=0} = F|_{t=0}, \quad \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n}|_S = 0. \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Положим $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, $f = F$, $u = v$. Оператор $A(t) : W_2^1(\Omega) \to (W_2^1(\Omega))'$ определим равенством

$$< A(t)u, v >_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + c(t,x)uv\,dx \equiv a(t;u,v).$$

Задачи (3.6.12) и (3.6.13) сведены нами соответственно к задачам (3.5.1), (3.5.2) и (3.5.4), (3.5.7), (3.5.8). Ограничения, сформулированные ранее на функции a_{ij}, c, F, гарантируют выполнения предположений теоремы 3.5.3. Следовательно, существуют решения $v \in W_2^2(0,T;W_2^1(\Omega))$ и $v^\varepsilon \in W_\infty^2(0,T;L_2(\Omega)) \cap W_\infty^1(0,T;W_2^1(\Omega))$ задач (3.6.12) и (3.6.13), причем

$$\varepsilon^{1/2}\left\|\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L_2([0,T],L_\infty\Omega)} + \|v^\varepsilon - v\|_{L_\infty([0,T];W_2^1\Omega)} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

3.7. Линейная стационарная задача динамики океана

В данном разделе рассмотрим линейную модель динамики океана, учитывающую ветровые течения.

Обозначим через Q исследуемую область Мирового океана:

$$Q = \{(x, y, z)|(x, y) \in \Omega \subset E_2, H < z < 0\},$$

где Ω — ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей σ, $z = 0$ — поверхность океана, $z = H$ — рельеф дна океана. Пусть U — пространство, полученное замыканием по норме $W_2^1(Q)$ множества функций из $C^1(\overline{Q})$, равных нулю вблизи $\hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma}$ — граница области Q без точек $z = 0$. Пусть V — пространство, полученное замыканием по норме $W_2^1(Q)$ множества функций из $C^1(\overline{Q})$, равных нулю вблизи поверхности $z = H$.

Для произвольной функции u из пространств U, V выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leqslant d\|u_x\|_{L_2(Q)}, \qquad 0 < d = const, \tag{3.7.1}$$

где

$$u_x = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая вид области Q, нераверство (3.7.1) можно доказать аналогично тому, как доказывается неравенство Пуанкаре—Фридрихса для функции $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(Q)$.

Постановка задачи

Найти решение (u, v, w, p, ρ) системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta u + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + lv = \frac{1}{\bar{p}}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\mu\Delta v + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - lu = \frac{1}{\bar{p}}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
&\mu_1\Delta\rho + \nu_1\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} = \Gamma w,
\end{aligned} \tag{3.7.2}$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_1}{\bar\rho\nu}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_2}{\bar\rho\nu}, \\
&\nu_1\frac{\partial \rho}{\partial z} = \gamma, \quad w = 0 \qquad \text{при } z = 0, \\
&u = v = w = 0, \quad \rho = \rho_0 \qquad \text{при } z = H, \\
&u = v = \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \qquad \text{на } \sigma.
\end{aligned}
\tag{3.7.3}
$$

В формулах (3.7.2), (3.7.3) использованы следующие обозначения: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, u, v, w — компоненты вектора скорости, p — давление, ρ — плотность, $\tau_k, k = 1, 2$, γ, ρ_0 — заданные функции переменных x, y; ν, μ — коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентности, ν_1, μ_1 — коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентной диффузии плотности соответственно ($0 < \nu, \nu_1, \mu, \mu_1$ — константы), $\bar\rho$ — средняя по толще океана плотность воды, Γ — средний градиент плотности в океане, l — параметр Кориолиса, g — ускорение силы тяжести.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$
u = u_1, \quad v = u_2, \quad x = x_1, \quad y = x_2.
$$

Бедем считать, что глубина рассматриваемого бассейна постоянна: $H = const, H < 0$. Предположим также, что функции τ_k принадлежат пространству $C^2(\overline{\Omega}) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\overline{\Omega})$ и существует функция $\hat\rho$ из класса $C^2(\overline{Q})$, удовлетворяющая условиям (3.7.3), т. е.

$$
\nu_1\frac{\partial \hat\rho}{\partial z} = \gamma \;\text{ при }\; z = 0, \qquad \hat\rho = \rho_0 \;\text{ при } z = H \;\text{ и }\; \frac{\partial \hat\rho}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; \sigma.
$$

В указанных предположениях существуют функции $\hat u_k \in C^2(\overline{Q})$, удовлетворяющие условиям (3.7.3) на u_k и условию

$$
\int\limits_H^0 \left(\frac{\partial \hat u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat u_2}{\partial x_2}\right) dz = 0.
$$

Достаточно, например, взять $\hat u_k = [\varphi_1(z) - \varphi_2(z)]\dfrac{\tau_k}{\nu\bar\rho}$, где функция $\varphi_1(z) \in C^2$ равна нулю вблизи H и $\varphi_1'(0) = 1$, функция $\varphi_2(z)$ финитна в (H,0) и

$$
\int\limits_H^0 (\varphi_1 - \varphi_2)\, dz = 0.
$$

Из третьего уравнения системы (3.7.2) имеем

$$p = g\int\limits_0^z \rho\, dz + \bar{\rho}\xi, \tag{3.7.4}$$

где $\xi = \xi(x_1, x_2) = \frac{1}{\bar{\rho}} p|_{z=0}$ — неизвестная функция.

Из четвертого уравнения системы (3.7.2), учитывая условие $w|_{z=0}$, получим

$$w = -\int\limits_0^z div_x\, u\, dz. \tag{3.7.5}$$

Здесь $div_x\, u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$.

Подставим (3.7.4), (3.7.5) в соответствующие уравнения системы (3.7.2) и, сделав замену

$$u_k' = u_k - \hat{u}_k, \qquad \rho' = \rho - \hat{\rho}, \tag{3.7.6}$$

приведем задачу (3.7.2), (3.7.3) к задаче

$$\mu\Delta u_k + \nu\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + (-1)^{k+1} l u_{3-k} = \frac{g}{\bar{\rho}}\int\limits_0^z \frac{\partial \rho}{\partial x_k}\, dz + \frac{\partial \xi}{\partial x_k} + f_k, \quad k = 1, 2 \tag{3.7.7}$$

$$\int\limits_H^0 div_x\, u\, dz = 0, \tag{3.7.8}$$

$$\mu_1\Delta\rho + \nu_1\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \Gamma\int\limits_0^z div_x\, u\, dz = f_3, \tag{3.7.9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_k}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0,\\ &u_k = \rho = 0 \qquad\quad \text{при } z = H,\\ &u_k = \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \qquad \text{на } \sigma. \end{aligned} \tag{3.7.10}$$

Здесь

$$f_k = -\mu\Delta\hat{u}_k - \nu\frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial z^2} + (-1)^k l\hat{u}_{3-k} + \frac{g}{\bar{\rho}}\int\limits_0^z \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x_k}\, dz, \quad k = 1, 2,$$

$$f_3 = -\mu_1\Delta\hat{\rho} - \nu_1\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial z^2} - \Gamma\int\limits_0^z div_x\, \hat{u}\, dz$$

и для удобства обозначения опущен штрих у неизвестных u_k, ρ.

Пусть

$$M = \{(u, \rho, \xi) | u \in V^2, \rho \in V, \xi \in L_2(Q)\}.$$

Введем билинейные формы

$$a(u, \varphi) = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{(L_2(Q))^2} + \mu \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)_{(L_2(Q))^2} +$$
$$+ l \sum_{k=1}^{2} (-1)^k (u_{3-k}, \varphi_k)_{L_2(Q)},$$

$$b(\rho, \chi) = \nu_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}, \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_{L_2(Q)} + \mu_1 \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k}, \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \right)_{L_2(Q)},$$

определенные на $(W_2^1(Q))^2$ и $W_2^1(Q)$ соответственно. Здесь

$$(\chi, \psi)_{L_2(Q)} = \int_H^0 \left(\int_\Omega \chi(x, z) \psi(x, z) \, dx_1 dx_2 \right) dz$$

— скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Решением задачи (3.7.7)–(3.7.10) в классе M назовем такой элемент (u, ρ, ξ) из M, что

$$\int_H^0 div_x \, u \, dz = 0 \tag{3.7.11}$$

и тождества

$$a(u, \varphi) = \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\int_0^z \rho \, dz, div_x \, \varphi \right)_{L_2(Q)} + (\xi, div_x \, \varphi)_{L_2(Q)} - (f, \varphi)_{(L_2(Q))^2}, \tag{3.7.12}$$

$$b(\rho, \chi) - \Gamma \left(\int_0^z div_x \, u \, dz, \chi \right)_{L_2(Q)} + (f_3, \chi)_{L_2(Q)} \tag{3.7.13}$$

выполняются для всех $\varphi \in (U)^2$, $\chi \in V$. Здесь $f = (f_1, f_2)$.

Замечание. Так как $w|_{z=0} = 0, w|_{z=H} = 0$, то (см. замену (3.7.5) последнее условие учитывается в задаче (3.7.7)–(3.7.10) в виде соотношения (3.7.8).

Аппроксимируем задачу (3.7.7)–(3.7.10) задачей [6]

$$\begin{aligned}\mu\Delta v_k^\varepsilon + \nu\frac{\partial^2 v_k^\varepsilon}{\partial z^2} + (-1)^{k+1} l v_{3-k}^\varepsilon = \\ = \frac{g}{\bar\rho}\int\limits_0^z \frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial x_k}\,dz + \frac{\partial\xi^\varepsilon}{\partial x_k} + f_k, \quad k = 1, 2,\end{aligned} \tag{3.7.14}$$

$$\int\limits_H^0 div_x\, v^\varepsilon\,dz + \varepsilon\Delta\xi^\varepsilon = 0, \tag{3.7.15}$$

$$\mu_1\Delta\rho^\varepsilon + \nu_1\frac{\partial^2\rho^\varepsilon}{\partial z^2} + \Gamma\int\limits_0^z div_x\, v^\varepsilon\,dz = f_3 - \Gamma\int\limits_H^0 div_x\, v^\varepsilon\,dz, \tag{3.7.16}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0,\\ &v_k^\varepsilon = \rho^\varepsilon = 0 \qquad \text{при } z = H,\\ &v_k^\varepsilon = \frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial n} = 0 \qquad \text{на } \sigma,\\ &\xi^\varepsilon = 0 \qquad \text{на } \partial\Omega.\end{aligned} \tag{3.7.17}$$

Решением задачи (3.7.14)–(3.7.17) назовем такой вектор $(v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$, что $v^\varepsilon \in (U)^2$, $\rho^\varepsilon \in V$, $\xi^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ и тождества

$$a(v^\varepsilon, \varphi) = \frac{g}{\bar\rho}\left(\int\limits_0^z \rho^\varepsilon\,dz, div_x\,\varphi\right)_{L_2(Q)} + (\xi^\varepsilon, div_x\,\varphi)_{L_2(Q)} - (f, \varphi)_{(L_2(Q))^2}, \tag{3.7.18}$$

$$\left(\int\limits_0^H div_x\, v^\varepsilon\,dz, \psi\right)_{L_2(Q)} - \varepsilon\sum_{k=1}^2\left(\frac{\partial\xi^\varepsilon}{\partial x_k}, \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{3.7.19}$$

(3.7.20)

$$\begin{aligned}b(\rho^\varepsilon, \chi) - \Gamma\left(\int\limits_0^z div_x\, v^\varepsilon\,dz + \int\limits_H^0 div_x\, v^\varepsilon\,dz, \chi\right)_{L_2(Q)} + \\ + (f_3, \chi)_{L_2(Q)} = 0\end{aligned} \tag{3.7.21}$$

выполняются для всех $\varphi \in U^2$, $\psi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\chi \in V$.

Решение $(v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$ задачи (3.7.14)–(3.7.17) удовлетворяет неравенству

$$\|u^\varepsilon\|_{U^2} + \|\rho^\varepsilon\|_V + \sqrt{\varepsilon}\|\xi^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|^2_{(L_2(Q))^2} + \|f_3\|^2_{L_2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.7.22)$$

где постоянная C зависит лишь от $f, d, g, \bar{\rho}, \Gamma$ и не зависит от ε.

Неравенство (3.7.22) нетрудно получить, если положить $\varphi = v^\varepsilon$, $\psi = \xi^\varepsilon$, $\chi = \dfrac{g\rho^\varepsilon}{\bar{\rho}\Gamma}$ в формулах (3.7.18), (3.7.19), (3.7.21) соответственно, а затем сложить полученные результаты, учитывая при этом неравенство (3.7.1) и интегрируя по частям члены

$$\left(\int\limits_0^z \rho^\varepsilon\, dz, div_x\, v^\varepsilon\right)_{L_2(Q)}.$$

В силу неравенства (3.7.22) легко доказывается, например, методом Галеркина [46, 48] следующее утверждение.

Теорема 3.7.1. *Решение* $(v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$ *задачи* (3.7.14)–(3.7.17) *существует и единственно.*

Из результатов п. 1.2 работы [59] следует лемма 3.7.1.

Лемма 3.7.1. *Для любой функции* $\xi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\|\nabla\xi\|_{(W^{-1}(\Omega))^2} \geq \alpha\|\xi\|_{L_2(\Omega)}, \qquad (3.7.23)$$

где постоянная α *не зависит от* ξ.

Лемма 3.7.2. *Справедливо неравенство*

$$\|\nabla\xi^\varepsilon\|_{(W^{-1}(\Omega))^2} \leqslant C, \qquad (3.7.24)$$

где постоянная C *не зависит от* ε.

Доказательство. Выразим $\nabla\xi^\varepsilon$ через остальные члены уравнения (3.7.14), в силу (3.7.22) и того факта, что $f_k \in C(\overline{Q})$, $k = 1, 2$, получим оценку

$$\|\nabla_x\xi^\varepsilon\|_{(W^{-1}(Q))^2} \leqslant C \qquad (3.7.25)$$

с постоянной C, не зависящей от ε. Рассмотрим функцию $\varphi(x_1, x_2, z) = \gamma(z)\hat{\varphi}(x_1, x_2)$, где $\hat{\varphi}$ — произвольная фиксированная функция из пространства $(\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))^2$, а функция $\gamma(z)$ — гладкая и финитная на $(H, 0)$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_H^0 \gamma(z)\,dz = 1. \tag{3.7.26}$$

Ясно, что $\varphi \in V^2$. Так как ξ^ε не зависит от z, то в силу (3.7.25), (3.7.26) и неравенства $\|\varphi\|_{(W_2^1(Q))^2} \leqslant C\|\hat{\varphi}\|_{(W_2^1(Q))^2}$ выполняются соотношения

$$|(\nabla_x\xi^\varepsilon, \hat{\varphi})_{(L_2(\Omega))^2}| = |(\nabla_x\xi^\varepsilon, \varphi)_{(L_2(Q))^2}| \leqslant$$
$$\leqslant \|\nabla\xi^\varepsilon\|_{(W^{-1}(Q))^2}\|\varphi\|_{(W_2^1(Q))^2} \leqslant C\|\hat{\varphi}\|_{(W_2^1(\Omega))^2},$$

откуда следует (3.7.24). Лемма доказана.

В силу неравенств (3.7.23), (3.7.24)

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C. \tag{3.7.27}$$

Неравенства (3.7.22), (3.7.27) гарантируют существование последовательности ε_k ($\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$), такой, что

$$v^{\varepsilon_k} \to u \qquad \text{слабо в } U^2, \tag{3.7.28}$$

$$\rho^{\varepsilon_k} \to \rho \qquad \text{слабо в } V, \tag{3.7.29}$$

$$\xi^{\varepsilon_k} \to \xi \qquad \text{слабо в } L_2(\Omega) \text{ (и в } L_2(Q). \tag{3.7.30}$$

Легко заметить, что u, ρ, ξ удовлетворяют тождеству (3.7.12). Вследствие ограниченности $\sqrt{\varepsilon}\|\xi^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}$ (см. (3.7.22), переходя в (3.7.19) к пределу по ε_k, получаем, что

$$\left(\int\limits_H^0 div_x\, u\, dz, \psi\right)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Так как ψ произвольно, то выполняется соотношение (3.7.11). Отсюда следует, что u, ρ удовлетворяют тождеству (3.7.13). Значит, (u, ρ, ξ) есть решение задачи (3.7.7)–(3.7.10).

Возмем $\varphi = u$, $\chi = \dfrac{g\rho}{\bar{\rho}\Gamma}$ в формулах (3.7.12), (3.7.13) соответственно и сложим полученные результаты. Учитывая, что

$$(\xi, div_x\, u)_{L_2(Q)} = \left(\xi, \int\limits_H^0 div_x\, u\, dz\right)_{L_2(\Omega)} = 0$$

(см. также соотношения (3.7.38), получаем неравенство

$$\|u\|_{U^2} + \|\rho\|_V \leqslant C\left(\|f\|^2_{(L_2(Q))^2} + \|f_3\|^2_{L_2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда следует единственность компонент u, ρ решения задачи (3.7.7)–(3.7.10). Ясно, что ξ определяется с точностью до аддитивной постоянной. Тем самым доказана теорема

Теорема 3.7.2. *Решение* (u, ρ, ξ) *задачи* (3.7.7)–(3.7.10) *в пространстве* M *существует. Компоненты* u, ρ *определяются единственным образом, компонента* ξ *— с точностью до аддитивной постоянной.*

Скорость сходимости

Оценим скорость сходимости u^ε, ρ^ε к u, ρ при $\varepsilon \to 0$. Для этого мы сначала докажем, что компонента ξ решения задачи (3.7.7)–(3.7.10) принадлежит классу $W_2^1(\Omega)$.

Предварительно докажем, что множество следов $\dfrac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial z}|_{z=H}$, $k = 1, 2$ равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ограничено в норме пространства $L_2(\Omega)$:

$$\left\| \frac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial z}|_{z=H} \right\| \leqslant C. \tag{3.7.31}$$

Можно доказать (например, в методе Галеркина взяв более гладкий базис), что вектор $(v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, \xi^\varepsilon)$ принадлежит пространству $(W_2^2(Q))^3 \times W_2^1(\Omega)$ и, следовательно, удовлетворяет уравнениям (3.7.14)–(3.7.16) почти всюду в Q. Умножим (3.7.14) на $\dfrac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial z}$, просуммируем результат умножения по k и проинтегрируем сумму по области Q. Получим равенство

$$\begin{gathered}
\mu \sum_{i,k=1}^{2} \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial x_i}|z=0\right)^2 dx_1\, dx_2 + \nu \sum_{k=1}^{2} \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial z}|z=H\right)^2 dx_1\, dx_2 = \\
= 2\sum_{k=1}^{2} \int\limits_Q \left((-1)^{k+1} l v_{3-k}^\varepsilon - \frac{g}{\bar\rho} \int\limits_0^z \frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial x_k}\, dz - f_k \right) \frac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial z}\, dx_1\, dx_2 + \\
+ 2\sum_{k=1}^{2} \int\limits_\Omega \xi^\varepsilon \frac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial x_k}|_{z=0}\, dx_1\, dx_2.
\end{gathered} \tag{3.7.32}$$

В силу (3.7.22), (3.7.27) правая часть неравенства (3.7.32) (при этом к первому члену следует применять неравенство Коши) ограничена величиной

$$\frac{\mu}{2}\sum_{i,k=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial x_i}|_{z=0}\right)^2 dx_1\,dx_2 + C, \tag{3.7.33}$$

где постоянная C не зависит от ε. Из соотношений (3.7.32), (3.7.33) следует (3.7.31).

Лемма 3.7.3. *Компонента* ξ *решения задачи* (3.7.7)–(3.7.10) *принадлежит пространству* $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Так как $\xi \in L_2(\Omega)$, то нужно лишь доказать, что и $\xi_x = (\xi_{x_1}, \xi_{x_2}) \in (L_2(\Omega))^2$. Проинтегрируем уравнение (3.7.14) по z на отрезке $[H, 0]$. Обозначим $\int\limits_H^0 v_k^\varepsilon\,dz = W_k^\varepsilon$, $-H\xi^\varepsilon = \theta^\varepsilon$, получим уравнение

$$\mu\Delta W^\varepsilon + \nabla\theta^\varepsilon = \Phi^\varepsilon, \tag{3.7.34}$$

где

$$W^\varepsilon = (W_1^\varepsilon, W_2^\varepsilon), \qquad \Phi^\varepsilon = (\Phi_1^\varepsilon, \Phi_2^\varepsilon),$$

$$\Phi_k^\varepsilon = \int\limits_H^0 \left(f_k + \frac{g}{\bar\rho}\int\limits_0^z \frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial x_k}\,dz + (-1)^k l v_{3-k}^\varepsilon\right) dz + \nu\frac{\partial v_k^\varepsilon}{\partial z}|_{z=H}.$$

В силу оценок (3.7.22), (3.7.31) функции $\Phi_k^\varepsilon \in L_2(\Omega)$ и

$$\|\Phi_k^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C \tag{3.7.35}$$

равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Оценка (3.7.35) гарантирует сходимость Φ_k^ε при $\varepsilon \to 0$ слабо в $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $\Phi_k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2$. Так как

$$W_k^\varepsilon \to W_k \equiv \int\limits_H^0 u_k\,dz \qquad \text{слабо в } W_2^1(\Omega),$$

$$\theta^\varepsilon \to -H\xi \equiv \theta \qquad \text{слабо в } L_2(\Omega),$$

$$div_x W = \int\limits_H^0 div_x u\,dz = 0 \qquad \text{в } \Omega,$$

то вектор (W_1, W_2, θ) является решенем двумерной задачи Стокса:

$$\mu \Delta W + \nabla \theta = \Phi, \qquad div\, W = 0, \qquad W|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.7.36}$$

класса $(W_2^1(\Omega))^2 \times L_2(\Omega)$. Так как $\Phi \in (L_2(\Omega))^2$, то по теореме 2 гл. 3 [42] решение (w, θ) задачи (3.7.36) удовлетворяет условию $W \in (W_2^2(\Omega))^2$, $\theta_x \in (L_2(\Omega))^2$.

Лемма 3.7.3 доказана.

Вектор $(w^\varepsilon, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)$, где $w^\varepsilon = v^\varepsilon - u$, $\eta^\varepsilon = \rho^\varepsilon - \rho$, $\zeta^\varepsilon = \xi^\varepsilon - \xi$, удовлетворяет тождествам

$$\left(\int_0^H div_x\, w^\varepsilon\, dz, \psi \right)_{L_2(\Omega)} = \varepsilon \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)},$$

$$a(w^\varepsilon, \varphi) = \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\int_0^z \eta^\varepsilon\, dz, div_x\, \varphi \right)_{L_2(Q)} + (\zeta^\varepsilon, div_x\, \varphi)_{L_2(Q)},$$

$$b(\eta^\varepsilon, \chi) = \Gamma \left(\int_H^z div_x\, w^\varepsilon\, dz, \chi \right)_{L_2(Q)}.$$

Взяв в последних тождествах $\psi = \zeta^\varepsilon$, $\varphi = w^\varepsilon$, $\chi = \dfrac{g\eta^\varepsilon}{\bar{\rho}\Gamma}$ соответственно, а затем сложив их, получим соотношение

$$\begin{gathered} a(w^\varepsilon, w^\varepsilon) + \frac{g}{\bar{\rho}\Gamma} b(\eta^\varepsilon, \eta^\varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_k}, \frac{\partial (\xi^\varepsilon - \xi)}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} = \\ = \left(\int_0^H div_x\, v^\varepsilon\, dz, \zeta^\varepsilon \right)_{L_2(\Omega)} + (\zeta^\varepsilon, div_x\, w^\varepsilon)_{L_2(Q)} + \\ + \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\int_0^z \eta^\varepsilon\, dz, div_x\, w^\varepsilon \right)_{L_2(Q)} + \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\int_H^z div_x\, w^\varepsilon\, dz, \eta^\varepsilon \right)_{L_2(Q)} \end{gathered} \tag{3.7.37}$$

Ясно, что сумма первых двух членов в правой части равенства (3.7.37) равна нулю. Так как

$$\left(\int_H^z div_x\, w^\varepsilon\, dz, \eta^\varepsilon\right)_{L_2(Q)} = \left(\int_H^z div_x\, w^\varepsilon\, dz, \frac{\partial}{\partial z}\int_0^z \eta^\varepsilon\, dz\right)_{L_2(Q)} =$$

$$= \left.\left(\int_H^z div_x\, w^\varepsilon\, dz, \int_0^z \eta^\varepsilon\, dz\right)_{L_2(Q)}\right|_{z=H}^{z=0} - \left(div_x\, w^\varepsilon, \int_0^z \eta^\varepsilon\, dz\right)_{L_2(Q)}, \quad (3.7.38)$$

то сумма третьего и четвертого членов также равна нулю. Следовательно, имеет место равенство

$$a(w^\varepsilon, w^\varepsilon) + \frac{g}{\bar\rho\Gamma} b(\eta^\varepsilon, \eta^\varepsilon) + \varepsilon\|\xi_x^\varepsilon\|^2_{(L_2(\Omega))^2} = \varepsilon(\xi_x^\varepsilon, \xi_x)_{(L_2(\Omega))^2}, \qquad (3.7.39)$$

где

$$\|\xi_x^\varepsilon\|^2_{(L_2(\Omega))^2} = \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\, dx_2,$$

$$(\xi_x^\varepsilon, \xi_x)_{(L_2(\Omega))^2} = \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2.$$

Оценивая правую часть в (3.7.39) по неравенству Шварца и отбрасывая при этом первые два члена в левой части, получим оценку

$$\|\xi_x^\varepsilon\|_{(L_2(\Omega))^2} \leqslant \|\xi_x\|_{(L_2(\Omega))^2}. \qquad (3.7.40)$$

Учитывая коэрцитивность форм $a(u,\varphi)$ и $b(\rho, x)$ в $W_2^1(\Omega)$ (коэрцитивность имеет место благодаря неравенству (3.7.1) и лемму 3.7.1, из (3.7.39), (3.7.40) получаем оценку

$$\|w^\varepsilon\|_{(W_2^1(Q))^2} + \|\eta^\varepsilon\|_{W_2^1(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}.$$

Таким образом, доказана теорема 3.7.3.

Теорема 3.7.3. *Последовательности* $\{v_1^\varepsilon\}$, $\{v_2^\varepsilon\}$, $\{\rho^\varepsilon\}$ *сходятся соответственно к* u_1, u_2, ρ *в норме пространства* $W_2^1(Q)$ *со скоростью* $O(\varepsilon^{1/2})$, $\varepsilon \to 0$:

$$\sum_{k=1}^2 \|v_k^\varepsilon - u_k\|_{W_2^1(Q)} + \|\rho^\varepsilon - \rho\|_{W_2^1(Q)} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \qquad (3.7.41)$$

Замечание. Исследумая задача (3.7.7)–(3.7.10) не является коэрцитивной в рассматриваемом функциональном пространстве $(W_2^1(Q))^3 \times L_2(\Omega)$ (нет априорной оценки на компоненту ξ). В качестве регуляризирующей берется эллиптическая задача (3.7.14)–(3.7.17), допускающая необходимые априорные оценки на все компоненты решения. Отметим, что введением в уравнение (3.7.8) одного члена $\varepsilon\Delta\xi^2$ "портим" исходную задачу: теряются априорные оценки на первые компоненты ее решения. Добавочный член $-\Gamma\int\limits_H^0 div_x\, u\, dz$ в правой части уравнения (3.7.16) полностью выправляет ситуацию.

Метод эллиптической регуляризации может быть применен и к стационарным квазилинейным уравнениям динамики атмосферы и океана. Однако их исследование требует специальной техники, больших усилий [7, 63].

Глава 4. Разрешимость обратных задач в классах гладких функций. Задача Коши

4.1. Обратные задачи математической физики

При изучении физических объектов или явлений экспериментальными методами типична ситуация, когда интересующие исследователя количественные характеристики объекта недоступны для непосредственного наблюдения или проведение самого эксперимента вообще невозможно, потому что он либо запрещен (например, при изучении здоровья человека), либо слишком опасен (например, при изучении экологических явлений). Наконец, эксперимент может быть связан с очень большими финансовыми затратами. Тем не менее, практически всегда можно получить некоторую косвенную информацию об исследуемом объекте, по которой возможно сделать заключение о его свойствах. Данная информация определяется природой изучаемого объекта и используемым экспериментальным комплексом. В таких ситуациях для диагностики объектов (например, их внутренней структуры) требуются математическая обработка и интерпретация результатов наблюдений.

Речь идет о задачах, в которых нужно определить причины, если известны полученные в результате наблюдения следствия. Например, определить место и мощность землетрясения по измеренным на поверхности земли колебаниям. При обработке данных натурных экспериментов по дополнительным косвенным измерениям делается вывод о внутренних связях явления или процесса. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, можно ставить проблему ее идентификации, например определение коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, границы области, граничных или начальных условий. Такие задачи относятся к классу обратных задач математической физики и в настоящий момент играют большую роль в естественных науках и их приложениях.

В целом под обратными задачами понимаются задачи, решение которых проводится в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта или процесса и заключается в определении параметров данной модели по имеющимся результатам наблюдений и другой экспериментальной информации.

Некоторые постановки обратных задач для параболических уравнений

Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности являются математическими моделями многих физических процессов.

Рассмотрим задачу

$$cu_t = (ku_x)_x - qu + f, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$u(t, 0) - \lambda_1 u_x(t, 0) = \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(t, l) - \lambda_2 u_x(t, l) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Коэффициенты, входящие в уравнение, и граничные условия представляют собой некоторые эффективные характеристики исследуемого процесса. В том случае, когда поставленная задача описывает процесс распространения тепла в стержне, коэффициенты c и k являются соответсвенно коэффициентами теплоемкости и теплопроводности и характеризуют материал, из которого изготовлен стержень. Функция f есть плотность тепловых источников. Теплофизическую интерпретацию имеют также все остальные функции, входящие в уравнение, краевые и начальные условия.

В рамках данной математической модели температура в стержне в момент времени t в точке x — функция $u(t, x)$, которая является решением поставленной задачи и определяется величинами c, k, q, f, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, φ — характеристиками теплофизического процесса.

Если рассматривать процесс теплопроводности в очень длинном стержне, то в течение небольшого промежутка времени влияние температуры, заданной на концах отрезка, практически отсутствует, и температура на рассматриваемом участке зависит лишь от ее начального распределения, то есть можно решать в $G_{[0,T]} = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x \in E_n\}$ задачу Коши:

$$cu_t = (ku_x)_x - qu + f,$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in E_1.$$

В том случае, когда входные данные заданы, решив прямую задачу, можно найти $u(t, x)$, то есть определить характер процесса диффузии тепловой энергии. Во многих реальных теплофизических процессах те или иные характеристики среды неизвестны, но экспериментально можно получить дополнительную информацию о температуре. Например, все коэффициенты и функции известны, кроме коэффициента теплопроводности $k(x)$. Из эксперимента при помощи датчиков в точке x_0 определяется функция $g(t) = u(t, x_0)$— температура в некоторой внутренней точке стержня — как функция от времени. Таким образом, возникает обратная задача: определить коэффициент теплопроводности $k(x)$, если задана функция $g(t)$. Можно рассмотреть случаи, когда неизвестны другие коэффициенты или несколько коэффициентов одновременно.

Необходимо отметить, что многообразие обратных задач определяется не только многими возможными неизвестными величинами, но и различными типами задания дополнительной информации, то есть характером проведения эксперимента.

Рассмотрим ряд типовых постановок обратных задач для многомерных параболических уравнений с условиями переопределения различных типов, а также познакомимся с физическим смыслом тех или иных задач и условий.

Задача идентификации функции источника с условием переопределения, заданным на фиксированной гиперплоскости.

Изучим задачу определения источников тепла по дополнительной информации о решении задачи Коши для параболического уравнения.

Рассмотрим в области $G_{(0,T)} = \{(t, x, z) \mid 0 < t < T, x \in E_n, z \in E_1\}$ уравнение

$$u_t(t, x, z) = L_x(u(t, x, z)) + a(t)u_{zz} + c(t)u + \lambda(t, x)f(t, x, z) \qquad (4.1.1)$$

с начальными данными

$$u(0, x, z) = u_0(x, z), \quad x \in E_n, \quad z \in E_1. \qquad (4.1.2)$$

Здесь

$$L_x(u(t, x, z)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) \frac{\partial^2 u(t, x, z)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t) \frac{\partial u(t, x, z)}{\partial x_i},$$

$b_i(t), c(t) \in C[0, T]$, коэффициенты $a_{ij}(t) \in C[0, T]$ удовлетворяют условию

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\xi_i\xi_j, \quad \forall t \in [0, T],$$

для любых отличных от нуля $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E_n$. Коэффициент $a(t)$ удовлетворяет условию $a(t) > 0 \; \forall t \in [0, T]$.

Функция $\lambda(t,x)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (4.1.1), (4.1.2), удовлетворяющим дополнительному условию переопределения

$$u(t,x,\gamma) = \varphi(t,x), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in E_n, \tag{4.1.3}$$

где $\gamma \in E_1$ — некоторая фиксированная постоянная.

В данной задаче условие (4.1.3) является как раз той дополнительной информацией о решении, которая позволяет наряду с неизвестной функцией $u(t,x,z)$ отыскать неизвестный коэффициент $\lambda(t,x)$, стоящий при функции источника. Это условие с физической точки зрения можно интерпретировать как измерение некоторым прибором температуры на гиперплоскости $z=\gamma$.

Задача идентификации теплоемкости с условием переопределения, заданным на некоторой параметрической гиперповерхности.

Рассмотрим в области $G_{[0,T]}$ уравнение

$$\begin{aligned}\lambda(t,x)u_t(t,x,z) = a_1(t,x)u_{xx}(t,x,z)) + a_2(t,x)u_{zz} + \\ + b(t,x)u_x + c(t,x)u + f(t,x,z)\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

с начальными данными (4.1.2).

Коэффициент теплоемкости $\lambda(t,x)$ зависит от временной и пространственной переменных и подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (4.1.4), (4.1.2), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t,x,z(t)) = \varphi(t,x), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in E_1, \quad z(t) \in C^1[0,T]. \tag{4.1.5}$$

Здесь дополнительная информация о решении задается на гиперповерхности, зависящей от параметра t.

Задачи определения нескольких коэффициентов многомерного параболического уравнения.

Часто возникают задачи, когда неизвестны функция $u(t,x,z)$ и одновременно сразу несколько коэффициентов, входящих в уравнение

$$\begin{aligned}\lambda_1(t,x)u_t(t,x,z) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a(t,x)u_{zz} + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u + \lambda_2(t,x)f(t,x,z)\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

с начальными данными (4.1.2), см. [12].

Можем, например, рассмотреть задачу идентификации функции источника и коэффициента теплоемкости, где неизвестными выступают функции $u(t, x, z)$, $\lambda_1(t, x)$, $\lambda_2(t, x))$, или задачу идентификации коэффициента при младшем члене и функции источника, где неизвестными являются функции $u(t, x, z)$, $c(t, x)$, $\lambda_2(t, x)$.

Как и ранее, для определения неизвестных коэффициентов требуется некоторая дополнительная информация, причем поскольку количество неизвестных коэффициентов увеличилось, такой информации требуется больше. Вид условия переопределения при решении практических задач чаще всего определяется характером проведения эксперимента. Для указанных задач можно сформулировать условия переопределения следующим образом:

$$u(t, x, a) = \varphi_1(t, x), \quad u_z(t, x, a) = \varphi_2(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in E_n, \qquad (4.1.7)$$

это означает, что на гиперплоскости $z = a$ установлены датчики, измеряющие температуру и тепловой поток. Также условия могут быть заданы не на фиксированной гиперплоскости, а на некоторой гиперповерхности $z = a(t)$, $t \in [0, T]$, то есть датчики, измеряющие физические параметры среды, со временем могут передвигаться [13].

Эти же задачи могут быть решены, если условия переопределения задать в виде

$$u(t, x, a_1) = \varphi_1(t, x), \quad u(t, x, a_2) = \varphi_2(t, x), \qquad (4.1.8)$$

$t \in [0, T]$, $x \in E_n$, $a_1 < a_2 - const$. С физической точки зрения это означает, что датчики, меряющие температуру, установлены на различных гиперплоскостях.

Задачи с финальным и интегральным условиями переопределения

В рассмотренных выше постановках обратных задач все неизвестные коэффициенты зависят от временной переменной и не зависят от одной из пространственных переменных x или z. Но возможна ситуация, когда искомые характеристики среды не меняются со временем, но могут быть различны в разных точках пространства, то есть коэффициенты зависят только от пространственных переменных. Задачи такого рода исследовались в работах А.И. Кожанова, А.И. Прилепко, И.А. Васина, Д.Г. Орловского и др. [36], [74], [75].

Можно рассмотреть задачу нахождения коэффициента теплопроводности с финальным условием переопределения (условие (4.1.12)), где дополнительная информация представляет собой сведения о состоянии среды (т. е. о температуре) в определенный момент времени.

Пусть D – интервал $(0,1)$, Q – прямоугольник $(0,T)\times(0,1)$, $0<T<+\infty$. Пусть $q(t,x)$, $f(t,x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ суть функции, заданные при $t\in[0,T]$, $x\in\overline{D}$. Рассмотрим уравнение

$$u_t-\frac{\partial}{\partial x}(p(x)u_x(t,x))+q(t,x)u=f(t,x),\quad 0<x<1,\quad 0<t\leqslant T. \quad (4.1.9)$$

Требуется найти функции $u(t,x)$, $p(x)$, удовлетворяющие в прямоугольнике Q уравнениею (4.1.9), и для $u(t,x)$ условиям

$$u(0,x)=u_0(x),\quad 0<x<1, \quad (4.1.10)$$

$$u(t,0)=\mu_0(t),\quad u(t,1)=\mu_1(t),\quad 0<t<T, \quad (4.1.11)$$

$$u(T,x)=u_1(x),\quad 0<x<1. \quad (4.1.12)$$

Можно в этом же прямоугольнике рассматривать краевую задачу идентификации пары функций $u(t,x)$, $p(x)$ с финальным условием переопределения, т. е. неизвестным является коэффициент в дивергентном члене.

Когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственного измерения, возникают нелокальные интегральные условия переопределения, которые дают информацию об усредненной температуре.

В области $Q_{(0,T)}=\{(t,x)\mid 0<t<T,\ x\in\Omega\}$, где Ω – ограниченная область в пространстве R^n с гладкой границей, рассматривается уравнение

$$u_t=\Delta u+p(t)u+f(t,x) \quad (4.1.13)$$

с начальным условием

$$u(0,x)=\varphi(x) \quad (4.1.14)$$

и граничным условием

$$u\mid_{S_T}=0, \quad (4.1.15)$$

где $S_T=\{(t,x)\mid 0<t\leqslant T,\ x\in\partial\Omega\}$ – боковая поверхность цилиндра $Q_{(0,T)}$.

Функция $p(t)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (4.1.13)–(4.1.15), удовлетворяющим условию переопределения

$$\int\limits_{\Omega}K(t,x)u(t,x)\,dx=E(t), \quad (4.1.16)$$

где функции $K(t,x)$ и $E(t)$ заданы.

Если неизвестный коэффициент зависит от пространственных переменных, то можно рассмотреть следующую постановку с интегральным условием переопределения [74].

В цилиндре $Q_T = (0,T) \times \Omega$ рассматривается задача нахождения пары функций $(u(t,x), f(x)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t(t,x) - (Lu)(t,x) = f(x)h(t,x) + g(t,x), \quad (t,x) \in Q_T,$$

начальному условию

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

краевому условию

$$(Bu)(t,x) = b(t,x), \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega$$

и условию переопределения

$$\int_0^T u(\tau,x)\omega(\tau)\,d\tau = \chi(x), \quad x \in \Omega.$$

Выше символом L обозначен линейный равномерно эллиптический оператор, коэффициенты которого не зависят от переменной t:

$$(Lu)(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)u_{x_j}\big(t,x)\right] + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i},$$

$$a_{ij} = a_{ji},\ 0 < \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \nu, \mu - const > 0.$$

Оператор B имеет вид

$$(Bu)(t,x) \equiv u(t,x)$$

(краевое условие первого рода) или

$$(Bu)(t,x) \equiv \frac{\partial u(t,x)}{\partial N} + \sigma(x)u(t,x)$$

(краевое условие третьего рода), где

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}u_{x_j}(t,x)\cos(N,x_i).$$

Заметим, что приведенный здесь обзор постановок затрагивает лишь небольшую часть множества обратных задач, возникающих при иследовании тех или иных физических объектов или явлений и не претендует на полноту.

4.2. Задача идентификации функции источника многомерного параболического уравнения

Разрешимость задачи Коши

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 < t < T, x \in E_n, z \in E_1\}$ уравнение

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + a(t)u_{zz} + c(t)u + \lambda(t,x)f(t,x,z) \qquad (4.2.1)$$

с начальными данными

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad x \in E_n, \quad z \in E_1. \qquad (4.2.2)$$

Здесь

$$L_x(u(t,x,z)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$a(t), b_i(t), c(t) \in C[0,T]$, коэффициенты $a_{ij}(t) \in C[0,T]$ удовлетворяют условию

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\xi_i\xi_j, \quad \forall t \in [0,T]$$

для любых отличных от нуля $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in E_n$. Коэффициент $a(t) > 0$ $\forall t \in [0,T]$.

Функция $\lambda(t,x)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (4.2.1), (4.2.2), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t,x,\gamma) = \varphi(t,x), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in E_n, \qquad (4.2.3)$$

где $\gamma \in E_1$ – некоторая фиксированная постоянная.

Пусть выполняется условие согласования

$$u_0(x,\gamma) = \varphi(0,x), \quad x \in E_n. \qquad (4.2.4)$$

Все входные данные в поставленной задаче считаем действительнозначными функциями, достаточно гладкими и ограниченными вместе с необходимым количеством производных в $G_{[0,T]}$.

Пусть также выполняется условие

$$|f(t,x,\gamma)| \geq \delta > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in E_n. \qquad (4.2.5)$$

Приведем задачу (4.2.1)–(4.2.3) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Для этого положим в уравнении (4.2.1) $z = \gamma$, использовав условие (4.2.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = L_x(\varphi(t,x)) + a(t)u_{zz}(t,x,\gamma) + c(t)\varphi(t,x) + \lambda(t,x)f(t,x,\gamma).$$

Отсюда находим
$$\lambda(t,x) = \frac{\psi(t,x) - a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)}, \tag{4.2.6}$$
где $\psi(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) - L_x(\varphi(t,x)) - c(t)\varphi(t,x)$ – известная функция.

Заметим, что знаменатель выражения (4.2.6) не обращается в нуль в силу условия (4.2.5).

Таким образом, функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + a(t)u_{zz}(t,x,z) + c(t)u(t,x,z) + \\ + \frac{\psi(t,x) - a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)}f(t,x,z). \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Докажем классическую разрешимость задачи (4.2.7), (4.2.2).

Зафиксируем постоянную $\theta > 0$ такую, что $\theta N = T$, где N – целое. Сделаем сдвиг по переменной t на величину θ в члене, содержащем следы неизвестных функций:

$$\begin{aligned} u_t^\theta(t,x,z) = L_x(u^\theta(t,x,z)) + a(t)u_{zz}^\theta + c(t)u^\theta + \\ + \frac{\psi(t,x) - a(t)u_{zz}^\theta(t-\theta,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)}f(t,x,z). \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

$$u^\theta(t,x,z)|_{t\leqslant 0} = u_0(x,z), \quad x \in E_n, \quad z \in E_1. \tag{4.2.9}$$

Полуинтервал $((n-1)\theta, n\theta]$ будем называть n-м временным шагом.

Относительно функций $\varphi(t,x)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в соотношения (4.2.10) и удовлетворяют им:

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha\varphi(t,x)| + |D_x^\alpha\varphi_t'(t,x)| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u_0(x,z)\right| + \\ + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k = 0,1,\ldots,6, \quad |\alpha| \leqslant 4. \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i\geq 0$ – мультииндекс, $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$, $D_x^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$, C – постоянная.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\theta(t,x,z)$ задачи (4.2.8), (4.2.9) в классе гладких ограниченных функций.

Введем обозначения

$$U^\theta(t)=\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{6}U^\theta_{k_1,k_2}(t),$$

$$U^\theta_{k_1,k_2}(t)=\max_{|\alpha|=k_1}\sup_{(n-1)\theta<\xi\leqslant t}\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^\alpha u^\theta(\xi,x,z)\right|, \tag{4.2.11}$$

$$U_{k_1,k_2}(0)=\max_{|\alpha|=k_1}\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^\alpha u_0(x,z)\right|,$$

$$(n-1)\theta<t\leqslant n\theta.$$

Функции $U^\theta(t)$, $U^\theta_{k_1,k_2}(t)$ являются неотрицательными, неубывающими и удовлетворяют условию

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u^\theta(\xi,x,z)\right|\leqslant U^\theta_{|\alpha|,k}(t)\leqslant U^\theta(t),\quad (n-1)\theta<\xi\leqslant t,\ x\in E_n,\ z\in E_1,$$

на каждом временном шаге $t\in((n-1)\theta,n\theta]$.

Рассмотрим нулевой временной шаг ($n=0$). В силу принципа максимума получим

$$\begin{aligned}&\left|u^\theta(\xi,x,z)\right|\leqslant\\ &\leqslant e^{C\xi}\left\{\sup_{0<\zeta\leqslant t}\left\{\sup_{x\in E_n}\left|\frac{\psi(\zeta,x)-a(\zeta)u^\theta_{zz}(\zeta-\theta,\gamma)}{f(\zeta,x,\gamma)}\right|\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}|f(\zeta,x,z)|\right\}\xi+\right.\\ &\left.+\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}|u_0(x,z)|\right\},\ \text{при}\ 0<\xi\leqslant t\leqslant\theta.\end{aligned}$$

Использовав условия (4.2.5), (4.2.10) и обозначения (4.2.11), данное неравенство можно переписать в виде

$$\left|u^\theta(\xi,x,z)\right|\leqslant e^{C\theta}\left(C(U_{0,2}(0)+1)t+U_{0,0}(0)\right), \tag{4.2.12}$$

при $0 < \xi \leqslant t, 0 < t \leqslant \theta$.

Здесь и далее $C > 1$ — некоторые константы, вообще говоря, различные, зависящие от констант, ограничивающих коэффициенты $a_{ij}(t), a(t), b(t), c(t)$, константы δ из неравенства (4.2.5) и константы, ограничивающей входные данные, в условии (4.2.10). Здесь и далее константы C не зависят от параметра θ.

Продифференцируем задачу (4.2.8), (4.2.9) k-раз по z, $k = 1, \ldots, 6$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\theta\right)_t = L_x(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\theta) + a(t)\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\theta\right)_{zz} + c(t)\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\theta\right) + \\ + \frac{\psi(t,x) - a(t)u^\theta_{zz}(t-\theta,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)}\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,x,z)\right). \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\theta(t,x,z)|_{t\leqslant 0} = \frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z), \quad x \in E_n, \quad z \in E_1.$$

Используя условия (4.2.5), (4.2.10) и обозначения (4.2.11), в силу принципа максимума получаем

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\theta(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\theta}\left(C(U_{0,2}(0)+1)t + U_{0,k}(0)\right), \tag{4.2.14}$$

при $0 < \xi \leqslant t \leqslant \theta$, $k = 1, \ldots, 6$.

Продифференцируем теперь задачу (4.2.8), (4.2.9) по переменной x_i:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^\theta\right)_t = L_x(\frac{\partial}{\partial x_i}u^\theta) + a(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^\theta\right)_{zz} + c(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u^\theta\right) + \\ &+ \frac{\psi(t,x) - a(t)u^\theta_{zz}(t-\theta,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f(t,x,z)\right) + \\ &+ \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi(t,x) - a(t)u^\theta_{zz}(t-\theta,x,\gamma)\right)f(t,x,\gamma)}{f^2(t,x,\gamma)} - \right. \\ &- \left.\frac{\left(\psi(t,x) - a(t)u^\theta_{zz}(t-\theta,x,\gamma)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}f(t,x,\gamma)}{f^2(t,x,\gamma)}\right] f(t,x,z). \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u^\theta(t,x,z)|_{t\leqslant 0} = \frac{\partial}{\partial x_i}u_0(x,z), \quad x \in E_n, \quad z \in E_1. \tag{4.2.16}$$

Используя принцип максимума, условия (4.2.5), (4.2.10) и обозначения (4.2.11), можем оценить $u^\theta_{x_i}$ следующим образом:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}u^\theta(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\theta}\left(C(U_{1,2}(0)+U_{0,2}(0)+1)t+U_{1,0}(0)\right), \qquad (4.2.17)$$

при $0<\xi\leqslant t\leqslant\theta$.

Теперь, для того, чтобы получить оценки на функции $\dfrac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}u^\theta(\xi,x,z)$, — должны продифференцировать (4.2.15), (4.2.16) k-раз по z, $k=1,\ldots,6$.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}u^\theta\right)_t = L_x(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}u^\theta)+a(t)\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}u^\theta\right)_{zz}+c(t)\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}u^\theta\right)+\\&+\frac{\psi(t,x)-a(t)u^\theta_{zz}(t-\theta,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)}\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}f(t,x,z)\right)+\\&+\left[\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi(t,x)-a(t)u^\theta_{zz}(t-\theta,x,\gamma)\right)f(t,x,\gamma)}{f^2(t,x,\gamma)}-\right.\\&-\left.\frac{\left(\psi(t,x)-a(t)u^\theta_{zz}(t-\theta,x,\gamma)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}f(t,x,\gamma)}{f^2(t,x,\gamma)}\right]\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,x,z).\end{aligned} \qquad (4.2.18)$$

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}u^\theta(t,x,z)|_{t\leqslant 0}=\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}u_0(x,z),\quad x\in E_n,\quad z\in E_1.$$

В силу принципа максимума, условий (4.2.5), (4.2.10) и (4.2.11)

$$\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i\partial z^k}u^\theta(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\theta}\left(C(U_{1,2}(0)+U_{0,2}(0)+1)t+U_{1,k}(0)\right), \qquad (4.2.19)$$

при $0<\xi\leqslant t\leqslant\theta$.

Дифференцированием (4.2.8), (4.2.9), можем получить задачи Коши, решениями которых будут являтся функции

$$\frac{\partial^{k+2}u^\theta}{\partial x_i\partial x_j\partial z^k},\frac{\partial^{k+3}u^\theta}{\partial x_i\partial x_j\partial x_m\partial z^k},\frac{\partial^{k+4}u^\theta}{\partial x_i\partial x_j\partial x_m\partial x_l\partial z^k},$$

где $k=0,1,\ldots,6$; $i,j,m,l=1,2,\ldots,n$.

Тем же способом, что и (4.2.19), не сложно доказать, что справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+2}}{\partial x_i\partial x_j\partial z^k}u^\theta(\xi,x,z)\right| \leqslant e^{C\theta}\left(C\left(\sum_{s=0}^{2}U_{s,2}(0)+1\right)t+U_{2,k}(0)\right), \qquad (4.2.20)$$

$$\left|\frac{\partial^{k+3}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_m \partial z^k} u^\theta(\xi, x, z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{C\theta}\left(C\left(\sum_{s=0}^{3} U_{s,2}(0)+1\right)t + U_{3,k}(0)\right), \quad (4.2.21)$$

$$\left|\frac{\partial^{k+4}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_m \partial x_l \partial z^k} u^\theta(\xi, x, z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{C\theta}\left(C\left(\sum_{s=0}^{4} U_{s,2}(0)+1\right)t + U_{4,k}(0)\right), \quad (4.2.22)$$

при $0 < \xi \leqslant t, 0 < t \leqslant \theta$.

Возьмем от левых частей неравенств (4.2.12), (4.2.14), (4.2.17)–(4.2.22) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in E_n \\ z\in E_1}}$, а затем $\sup\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t}$ и сложим данные неравенства. Поскольку переменные x_i, x_j, x_m, x_l были выбраны произвольно, то, учитывая обозначения (4.2.11), получаем

$$U^\theta(t) \leqslant e^{C\theta}\left(C(U(0)+1)t + U(0)\right), \text{ при } 0 < t \leqslant \theta.$$

Преобразуем данное неравенство

$$\begin{aligned} U^\theta(t) &\leqslant e^{C\theta}\left(C(U(0)+1)t\right) + e^{C\theta}U(0) + 1 - 1 \leqslant \\ &\leqslant e^{C\theta}\left(C(U(0)+1)t\right) + e^{C\theta}U(0) + e^{C\theta} - 1 = e^{C\theta}(U(0)+1)\left(Ct+1\right) - 1 \leqslant \\ &\leqslant e^{C\theta}(U(0)+1)e^{Ct} - 1 \leqslant (U(0)+1)e^{C\theta} - 1, \text{ при } 0 < t \leqslant \theta. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждая на первом временном шаге $t \in (\theta, 2\theta]$, получаем

$$\begin{aligned} U^\theta(t) &\leqslant (U^\theta(\theta)+1)e^{C\theta} - 1 \leqslant \big((U(0)+1)e^{C\theta} - 1 + 1\big)\, e^{C\theta} - 1 \leqslant \\ &\leqslant (U(0)+1)e^{2C\theta} - 1, \text{ при } \theta < t \leqslant 2\theta. \end{aligned}$$

Через конечное число шагов, на $N-1$ временном шаге получим

$$U^\theta(t) \leqslant (U(0)+1)e^{CN\theta} - 1 = (U(0)+1)e^{CT} - 1,$$

при $(N-1)\theta < t \leqslant N\theta$.

На отрезке $t \in [0, T]$ также справедлива оценка

$$U^\theta(t) \leqslant (U(0)+1)e^{CT} - 1.$$

Таким образом, в $G_{[0,T]}$ справедливы равномерные по θ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u^\theta(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k = 0,1,\ldots,6, \quad |\alpha| \leqslant 4. \tag{4.2.23}$$

Рассматривая уравнение (4.2.8) и все уравнения, полученные из него дифференцированием по переменным x_i, x_j, x_m, x_l, z (например, (4.2.13), (4.2.15), (4.2.18) при $k = 1, 2$ и т. д.), используя оценки (4.2.10), (4.2.23), получаем, что на любом временном шаге $((n-1)\theta, n\theta]$, $n = 1, \ldots, N$ правая часть равенства в данных уравнениях будет ограничена равномерно по θ, а значит, и левая часть также будет ограничена равномерно по θ.

Таким образом, в $G_{[0,T]}$ справедливы равномерные по θ оценки:

$$\left|\frac{\partial^{(k+1)}}{\partial t \partial z^k} D_x^\alpha u^\theta(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k = 0,1,\ldots,4, \quad |\alpha| \leqslant 2. \tag{4.2.24}$$

Оценки (4.2.23), (4.2.24) гарантируют выполнение условий теоремы 1.1.1 (Теорема Арцела о компактности). В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\theta_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\theta(t,x,z)$ решений задачи (4.2.8)–(4.2.9) сходится вместе с производными по переменным x до второго и z до четвертого порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,T]})$, которая на основании теоремы сходимости метода слабой аппроксимации (теорема 2.3.1) является решением задачи (4.2.7), (4.2.2), причем $u(t,x,z) \in C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,T]})$, где

$$C^{1,k_1,k_2}_{t,x,z}(G_{[0,T]}) = \Big\{ u(t,x,z) \;|u_t,\, \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u \in C(G_{[0,T]}), \\ k = 0,1,\ldots,k_2;\; |\alpha| \leqslant k_1 \Big\}.$$

При $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u(t,x,z)\right| \leqslant C, \text{ где } k = 0,1,\ldots,4, \quad |\alpha| \leqslant 2. \tag{4.2.25}$$

Доказали существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (4.2.7), (4.2.2) в классе $C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,T]})$.

Докажем теперь, что пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$, где $\lambda(t,x)$ определяется соотношением (4.2.6) является решением обратной задачи (4.2.1)–(4.2.3).

Поскольку $u(t,x,z)$ — это решение прямой задачи (4.2.7), (4.2.2), то подставляя $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ в (4.2.1), (4.2.2), очевидно получаем верное тождество.

Используя (4.2.5), (4.2.10), (4.2.25), из (4.2.6), (4.2.7) очевидно, что пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ принадлежат классу

$$Z(T) = \left\{u(t,x,z),\ \lambda(t,x) \mid u \in C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,T]}), \lambda(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,T]})\right\}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{4} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u(t,x,z)\right| + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} |D^\alpha_x \lambda(t,x)| \leqslant C,\ (t,x,z) \in G_{[0,T]}, \quad (4.2.26)$$

где

$$C^{0,k_1}_{t,x}(\Pi_{[0,T]}) = \left\{\lambda(t,x) \mid D^\alpha_x \lambda(t,x) \in C(\Pi_{[0,T]}),\ |\alpha| \leqslant k_1\right\},$$

$$\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 < t < T, x \in E_n\}.$$

Докажем выполнение условия переопределения (4.2.3). Положим в уравнении (4.2.7) $z = \gamma$, получим

$$u_t(t,x,\gamma) = L_x(u(t,x,\gamma)) + a(t)u_{zz}(t,x,\gamma) + c(t)u(t,x,\gamma) + \\ + \frac{\psi(t,x) - a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)} f(t,x,\gamma),$$

$$u_t(t,x,\gamma) - \varphi'_t(t,x) = L_x(u(t,x,\gamma) - \varphi(t,x)) + c(t)\left(u(t,x,\gamma) - \varphi(t,x)\right).$$

Обозначим $\kappa(t,x) = u(t,x,\gamma) - \varphi(t,x)$, в силу (4.2.5) $\kappa(0,x) = 0$. Получим задачу Коши для однородного параболического уравнения

$$\kappa_t(t,x) = L_x(\kappa(t,x)) + c(t)\kappa(t,x),$$

$$\kappa(0,x) = 0.$$

В силу принципа максимума в $\Pi_{[0,T]}$ $\kappa(t,x) = 0$ и, следовательно, $u(t,x,\gamma) = \varphi(t,x)$.

Таким образом, доказано существование решения $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ задачи (4.2.1)–(4.2.3) в классе $Z(T)$. Данный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 4.2.1. *Пусть выполняются условия* (4.2.5), (4.2.10). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (4.2.1)–(4.2.4) *в классе* $Z(T)$, *удовлетворяющее соотношению* (4.2.26).

Теорема единственности

Докажем единственность решения задачи (4.2.1)–(4.2.3) при условии выполнения (4.2.5), (4.2.10), (4.2.26).

Пусть $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$ и $u_2(t,x,z)$, $\lambda_2(t,x)$ – два классических решения задачи (4.2.1)–(4.2.3), причем пара функций $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$ – решение определяемое соотношением (4.2.6), а пара $u_2(t,x,z)$, $\lambda_2(t,x)$ – некоторое другое решение задачи (4.2.1)–(4.2.3), удовлетворяющее условиям (4.2.26). Тогда справедливы соотношения

$$u_{1t}(t,x,z) = L_x(u_1(t,x,z)) + a(t)u_{1zz} + c(t)u_1 + \lambda_1(t,x)f(t,x,z),$$

$$u_{2t}(t,x,z) = L_x(u_2(t,x,z)) + a(t)u_{2zz} + c(t)u_2 + \lambda_2(t,x)f(t,x,z),$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z), \quad u_2(0,x,z) = u_0(x,z),\ x \in E_n,\ z \in E_1,$$

$$u_1(t,x,\gamma) = \varphi(t,x), \quad u_2(t,x,\gamma) = \varphi(t,x).$$

Разность $u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z) = u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x) - \lambda_2(t,x) = \lambda(t,x)$ является решением задачи

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + a(t)u_{zz} + c(t)u + \lambda(t,x)f(t,x,z), \qquad (4.2.27)$$

$$u(0,x,z) = 0, \quad u(t,x,\gamma) = 0.$$

Ясно, что $u(t,x,z)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) &+ a(t)u_{zz}(t,x,z) + c(t)u(t,x,z) + \\ &+ \frac{-a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)} f(t,x,z), \end{aligned} \qquad (4.2.28)$$

$$u(0,x,z) = 0. \qquad (4.2.29)$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,T]$ функции

$$g_k(t) = \sup_{G_{[0,t]}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u(\xi,x,z)\right|,\ k = 0,1,2.$$

Учитывая оценки (4.2.5), (4.2.26), в силу принципа максимума для уравнения (4.2.28) получаем

$$|u(\xi,x,z)| \leqslant Cg_2(t)\xi,\ (\xi,x,z) \in G_{[0,t]},\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

откуда в силу неотрицательности $g_k(t)$ следует неравенство

$$g_0(t) \leqslant C(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (4.2.30)$$

Дифференцируя (4.2.28), (4.2.29) один или два раза по z, учитывая оценки (4.2.5), (4.2.26), в силу принципа максимума для уравнений

$$(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u)_t(t,x,z) = L_x(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)) + a(t)(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u)_{zz}(t,x,z) + c(t)\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z) + \\ + \frac{-a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{f(t,x,\gamma)}\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,x,z), \quad k=1,2,$$

получаем аналогичные оценки

$$g_k(t) \leqslant C(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t,\ k=1,2,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4.2.31}$$

Сложим неравенства (4.2.30), (4.2.31), получим

$$(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t)) \leqslant C(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t,\ k=1,2,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Отсюда получим, что при $t \in [0,\zeta]$, где $\zeta < 1/C$ выполняется $g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)=0$ и, следовательно,

$$u(t,x,z)=0,\ \text{при}\ (t,x,z) \in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя наши рассуждения для $t \in [\zeta, 2\zeta]$, получаем, что

$$u(t,x,z)=0,\ (t,x,z) \in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов докажем, что $u(t,x,z) \equiv 0$ в $G_{[0,T]}$.

Учитывая, что $u_1 \equiv u_2$ в $G_{[0,T]}$, из (4.2.27), получаем, что для $\lambda(t,x) = \lambda_1(t,x) - \lambda_2(t,x)$ выполняется соотношение

$$\lambda(t,x)f(t,x,\gamma)=0,$$

откуда в силу (4.2.5)

$$\lambda(t,x)=\lambda_1(t,x)-\lambda_2(t,x)=0, \quad t \in [0,T].$$

Справедлива

Теорема 4.2.2. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (4.2.1)–(4.2.5)*, удовлетворяющее соотношению* (4.2.26)*, единственно в классе* $Z(T)$.

Из теорем 4.2.1, 4.2.2 следует

Теорема 4.2.3. *Пусть выполняются условия* (4.2.4), (4.2.5), (4.2.10). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (4.2.1)–(4.2.3) *в классе* $Z(T)$*, удовлетворяющее соотношению* (4.2.26).

4.3. Задача идентификации коэффициента при младшем члене многомерного параболического уравнения

Разрешимость задачи Коши

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 < t < T, x \in E_n, z \in E_1\}$ уравнение

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + a(t)u_{zz} + \lambda(t,x)u + f(t,x,z) \tag{4.3.1}$$

с начальными данными

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad x \in E_n, \quad z \in E_1. \tag{4.3.2}$$

Здесь

$$L_x(u(t,x,z)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$b_i(t) \in C[0,T]$, коэффициенты $a_{ij}(t) \in C[0,T]$ удовлетворяют условию

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\xi_i\xi_j, \quad \forall t \in [0,T]$$

для любых отличных от нуля $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in E_n$. Коэффициент $a(t) \in C[0,T]$ и $a(t) > 0$ $\forall t \in [0,T]$.

Функция $\lambda(t,x)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (4.3.1), (4.3.2), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t,x,\gamma) = \varphi(t,x), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in E_n, \tag{4.3.3}$$

где $\gamma \in E_1$ — некоторая фиксированная постоянная.

Пусть выполняется условие согласования

$$u_0(x,\gamma) = \varphi(0,x), \quad x \in E_n. \tag{4.3.4}$$

Все входные данные в поставленной задаче считаем действительнозначными функциями, достаточно гладкими и ограниченными вместе с необходимым количеством производных в $G_{[0,T]}$.

Пусть также выполняется условие

$$|\varphi(t,x)| \geq \delta > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in E_n. \tag{4.3.5}$$

Отсюда находим

$$\lambda(t,x)=\frac{\psi(t,x)-a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{\varphi(t,x)}, \tag{4.3.6}$$

где $\psi(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)-L_x(\varphi(t,x))-f(t,x,\gamma)$ — известная функция.

Заметим, что знаменатель выражения (4.3.6) не обращается в нуль в силу условия (4.3.5).

Таким образом, функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z)=L_x(u(t,x,z))&+a(t)u_{zz}(t,x,z)+\\ &+\frac{\psi(t,x)-a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{\varphi(t,x)}u(t,x,z)+\\ &+f(t,x,z). \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Докажем классическую разрешимость задачи (4.3.7), (4.3.2).

Для доказательства существования решения данной задачи применим метод слабой аппроксимации [9, 69]. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t-\frac{\tau}{2})$ на втором дробном шаге в нелинейных членах:

$$u_t^\tau(t,x,z)=2L_x(u^\tau(t,x,z))+2a(t)u_{zz}^\tau,\ t\in\left(j\tau,\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau\right] \tag{4.3.8}$$

$$\begin{aligned} u_t^\tau(t,x,z)=2\frac{\psi(t,x)-a(t)u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma)}{\varphi(t,x)}u^\tau(t,x,z)+2f(t,x,z),\\ t\in\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau,(j+1)\tau\right] \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

$$u^\tau(0,x,z)=u_0(x,z). \tag{4.3.10}$$

Здесь $j=0,1,\ldots,N-1$; $\tau N=T$; $u^\tau=u^\tau(t,x,z)$.

По аналогии с (4.2.11) введем обозначения:

$$\begin{aligned} U^\tau(t)&=\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{6}U_{k_1,k_2}^\tau(t),\\ U_{k_1,k_2}^\tau(t)&=\max_{|\alpha|=k_1}\sup_{j\tau<\xi\leqslant t}\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^\alpha u^\tau(\xi,x,z)\right|,\\ U_{k_1,k_2}(0)&=\max_{|\alpha|=k_1}\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^\alpha u_0(x,z)\right|, \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

$$j\tau < t \leqslant (j+1)\tau.$$

На каждом полуинтервале $t \in (j\tau, (j+1)\tau]$ функции $U^\tau(t)$, $U^\tau_{k_1,k_2}(t)$ являются неотрицательными, неубывающими и удовлетворяют условию

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u^\tau(\xi, x, z)\right| \leqslant U^\tau_{|\alpha|,k}(t) \leqslant U^\tau(t), \quad j\tau < \xi \leqslant t,\ x \in E_n,\ z \in E_1.$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения, и удовлетворяют им:

$$\begin{gathered}|D^\alpha_x \varphi(t,x)| + |D^\alpha_x \varphi'_t(t,x)| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u_0(x,z)\right| + \\ + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k = 0,1,\ldots,6, \quad |\alpha| \leqslant 4,\end{gathered} \tag{4.3.12}$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $D^\alpha_x = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$, C – постоянная.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\{u^\tau(t,x,z)\}$ задачи (4.3.8)–(4.3.10) в классе гладких ограниченных функций.

Рассмотрим целый нулевой шаг ($j = 0$).

На первом дробном шаге $t \in \left(0, \frac{\tau}{2}\right]$ для решения u^τ задачи

$$u^\tau_t(t,x,z) = 2L_x(u^\tau(t,x,z)) + 2a(t)u^\tau_{zz}(t,x,z),$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z)$$

в силу принципа максимума

$$|u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x \in E_n \\ z \in E_1}} |u_0(x,z)|,\ 0 < \xi \leqslant t \leqslant \frac{\tau}{2}. \tag{4.3.13}$$

Дифференцируя уравнения (4.3.8), (4.3.10) последовательно по переменным x_i, x_j, x_m, x_l, а затем каждое из получившихся уравнений k-раз по z, $k = 1, \ldots, 6$, используя принцип максимума, докажем оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x \in E_n \\ z \in E_1}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u_0(x,z)\right|, \tag{4.3.14}$$

где $k = 1, \ldots, 6$; $|\alpha| \leqslant 4$, $0 < \xi \leqslant t \leqslant \frac{\tau}{2}$.

Возьмем от левых частей неравенств (4.3.13), (4.3.14) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}$, а затем $\sup\limits_{0<\xi\leqslant t}$ и сложим полученные неравенства. Учитывая обозначения (4.3.11), получаем

$$U^\tau(t)\leqslant U(0),\ 0<t\leqslant\frac{\tau}{2}. \tag{4.3.15}$$

На втором дробном шаге проинтегрируем уравнение (4.3.9) по временной переменной в пределах от $\frac{\tau}{2}$ до ξ, где $\xi\in\left(\frac{\tau}{2},t\right]$. Получим равенство

$$\begin{aligned}&u^\tau(\xi,x,z)=u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)+\\&+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\left(\frac{\psi(\eta,x)-a(\eta)u^\tau_{zz}(\eta-\frac{\tau}{2},x,\gamma)}{\varphi(\eta,x)}u^\tau(\eta,x,z)+f(\eta,x,z)\right)d\eta.\end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned}|u^\tau(\xi,x,z)|\leqslant&\left|u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\right|+\\&+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left(\left|\frac{\psi(\eta,x)-a(\eta)u^\tau_{zz}(\eta-\frac{\tau}{2},x,\gamma)}{\varphi(\eta,x)}\right||u^\tau(\eta,x,z)|+\right.\\&\left.+|f(\eta,x,z)|\right)d\eta,\quad\frac{\tau}{2}<\xi\leqslant t.\end{aligned}$$

Заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x\in E_n$, $z\in E_1$, затем, поскольку данное неравенство выполняется при всех x, z, заменим функцию $|u^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}|u^\tau|$. Получим неравенство

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}|u^\tau(\xi,x,z)|\leqslant\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\right|+\\&+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left(\frac{\sup\limits_{x\in E_n}|\psi(\eta,x)|+|a(\eta)|\sup\limits_{x\in E_n}\left|u^\tau_{zz}(\eta-\dfrac{\tau}{2},x,\gamma)\right|}{\delta}\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}|u^\tau(\eta,x,z)|+\right.\\&\left.+\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}|f(\eta,x,z)|\right)d\eta,\end{aligned}$$

откуда в силу (4.3.5), (4.3.12)

$$\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}} |u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}} \left|u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\right| +$$
$$+\frac{2C}{\delta}\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left(1+\sup_{x\in E_n}\left|u^\tau_{xx}(\eta-\frac{\tau}{2},x,\gamma)\right|\right)\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}|u^\tau(\eta,x,z)|+1\,d\eta,$$

Здесь и далее через C обозначены (вообще говоря различные) постоянные больше единицы, зависящие от δ из (4.3.5), постоянных, ограничивающих функции $a(t)$, $b(t)$, и постоянных из (4.3.12), ограничивающих входные данные. Константы C не зависят от параметра τ. Ниже для удобства мы считаем, что $C \geq 1$.

Учитывая монотонность на полуинтервале $\left(\frac{\tau}{2},\tau\right]$ функций $U^\tau_{k_1,k_2}$ (см. (4.3.11)), из последнего неравенства получаем оценку

$$U^\tau_{0,0}(t) \leqslant U^\tau_{0,0}(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left(1+\left(1+U^\tau_{0,2}(\eta-\frac{\tau}{2})\right)U^\tau_{0,0}(\eta)\right)\,d\eta. \qquad (4.3.16)$$

Дифференцируя уравнение (4.3.9) по z и учитывая, что коэффициент при u^τ не зависит от z, на втором дробном шаге можно доказать неравенства

$$\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\right| +$$
$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left(\frac{\sup\limits_{x\in E_n}|\psi(\eta,x)|+|a(\eta)|\sup\limits_{x\in E_n}\left|u^\tau_{zz}(\eta-\frac{\tau}{2},x,\gamma)\right|}{|\varphi(\eta,x)|}\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau\right|+\right.$$
$$\left.+\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(\eta,x,z)\right|\right)\,d\eta, \quad k=1,\ldots,6, \quad \frac{\tau}{2}<\xi\leqslant t, \quad \frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau,$$

$$\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\right| +$$
$$+C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left(1+\sup_{x\in E_n}\left|u^\tau_{zz}(\eta-\frac{\tau}{2},x,\gamma)\right|\right)\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\eta,x,z)\right|+1\,d\eta,$$
$$k=1,\ldots,6,$$

$$U_{0,k}^{\tau}(t) \leqslant U_{0,k}^{\tau}(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + \left(1 + U_{0,2}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2})\right) U_{0,k}^{\tau}(\eta)\right)\, d\eta,$$

$$k = 1, \ldots, 6. \quad (4.3.17)$$

Оценим функции $\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i \partial z^k}u^{\tau}$. Для этого продифференцируем уравнение (4.3.9) по x_i и k-раз по переменной z, $k = 0, 1, \ldots, 6$. Получим равенство

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i \partial z^k}u^{\tau}\right)(t, x, z) = \\
&= 2\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi(t,x) - a(t)u_{zz}^{\tau}(t - \frac{\tau}{2}, x, \gamma)\right)}{\varphi(t,x)}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^{\tau}(t,x,z) - \\
&- \frac{\left(\psi(t,x) - a(t)u_{zz}^{\tau}(t - \frac{\tau}{2}, x, \gamma)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(t,x)}{\varphi^2(t,x)}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^{\tau}(t,x,z) + \\
&+ 2\frac{\psi(t,x) - a(t)u_{zz}^{\tau}(t - \frac{\tau}{2}, x, \gamma)}{\varphi(t,x)}\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^i \partial z^k}u^{\tau}(t,x,z) + \\
&+ 2\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^i \partial z^k}f(t,x,z),
\end{aligned} \qquad (4.3.18)$$

$$t \in \left(\left(j + \frac{1}{2}\right)\tau, (j+1)\,\tau\right].$$

Из (4.3.18) можно (см. вывод оценок 4.3.17) доказать справедливость оценок

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i \partial z^k}u^{\tau}(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i \partial z^k}u^{\tau}(\frac{\tau}{2},x,z)\right| + \\
&+ C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Bigg(1 + \sup_{x\in E_n}\left|u_{x_i zz}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}, x, \gamma)\right| + \\
&+ \sup_{x\in E_n}\left|u_{zz}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}, x, \gamma)\right|\Bigg) \sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^{\tau}(\eta,x,z)\right| + \\
&+ \left(1 + \sup_{x\in E_n}\left|u_{zz}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}, x, \gamma)\right|\right) \sup_{\substack{x\in E_n\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_i \partial z^k}u^{\tau}(\eta,x,z)\right| + 1\, d\eta,
\end{aligned}$$

$$k = 0, 1, \ldots, 6,$$

$$U^\tau_{1,k}(t) \leqslant U^\tau_{1,k}(\frac{\tau}{2}) + C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + \left(1 + U^\tau_{0,2}(\eta - \frac{\tau}{2})\right) U^\tau_{1,k}(\eta) + \right.$$

$$\left. + \left(1 + U^\tau_{0,2}(\eta - \frac{\tau}{2}) + U^\tau_{1,2}(\eta - \frac{\tau}{2})\right) U^\tau_{0,k}(\eta)\right)\, d\eta, \tag{4.3.19}$$

$$k = 0, 1, \ldots, 6.$$

Дифференцируя уравнение (4.3.9) по переменным x_i, x_j, x_m, x_l, z и учитывая ограниченность входных данных, можно доказать справедливость оценок

$$U^\tau_{k_1,k_2}(t) \leqslant U^\tau_{k_1,k_2}(\frac{\tau}{2}) +$$

$$+ C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + \sum_{s=0}^{k_1} \left(1 + \sum_{w=0}^{k_1 - s} U^\tau_{w,2}(\eta - \frac{\tau}{2})\right) U^\tau_{s,k_2}(\eta)\right)\, d\eta, \tag{4.3.20}$$

$$k_1 = 2, 3, 4, \quad k_2 = 0, 1, \ldots, 6.$$

Из (4.3.16), (4.3.17), (4.3.19), (4.3.20), (4.3.11), получим

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\frac{\tau}{2}) + C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + \left(1 + \sum_{w=0}^{4} U^\tau_{w,2}(\eta - \frac{\tau}{2})\right) U^\tau(\eta)\right)\, d\eta,$$

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\frac{\tau}{2}) + C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + \left(1 + U^\tau(\eta - \frac{\tau}{2})\right) U^\tau(\eta)\right)\, d\eta, \quad \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau.$$

В силу неотрицательности и неубывания функции $U^\tau(t)$ на любом полуинтервале $(j\tau, (j+1)\tau]$ (см. (4.3.11)):

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\frac{\tau}{2}) + C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + \left(1 + U^\tau(\frac{\tau}{2})\right) U^\tau(\eta)\right)\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant U^\tau(\frac{\tau}{2}) + C \left(1 + U^\tau(\frac{\tau}{2})\right) \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + U^\tau(\eta)\right)\, d\eta, \quad \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau.$$

Учитывая неравенство (4.3.15), на нулевом временном шаге получаем

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) + C\left(1 + U(0)\right) \int\limits_{0}^{t} \left(1 + U^\tau(\eta)\right)\, d\eta, \quad 0 < t \leqslant \tau.$$

Отсюда, используя неравенство Гронуолла, получаем

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{C(1+U(0))t} - 1 \leqslant (U(0)+1)e^{C(1+U(0))\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant \tau.$$

Для того чтобы получить оценку функции $U^\tau(t)$ на первом шаге, нужно в получившемся неравенстве взять вместо величины $U(0)$ величину $(U(0)+1)e^{C(U(0)+1)\tau} - 1$. Получим неравенство

$$U^\tau(t) \leqslant \left[(U(0)+1)e^{C(U(0)+1)\tau}\right] e^{C\left[(U(0)+1)e^{C(U(0)+1)\tau}\right]\tau} - 1,$$

$$0 < t \leqslant 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C(U(0)+1)\tau} \leqslant 2,$$

получим, что

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{3C(U(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 2\tau.$$

На втором дробном шаге ($j = 2$) при условии $e^{3C(U(0)+1)\tau} \leqslant 2$ имеет место оценка

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{5C(U(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 3\tau$$

и так далее.

На j-ом шаге ($j < N$)

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{C(U(0)+1)(2j+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant (j+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t^*, $0 < t^* \leqslant T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{2C(U(0)+1)t^*} \leqslant 2.$$

Заметим, что t^* не зависит от τ, поскольку константы C и $U(0)$ не зависят от τ.

Таким образом, справедлива оценка

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{C(U(0)+1)2t^*} - 1 \leqslant C, \quad 0 < t \leqslant t^*.$$

Отсюда равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \tag{4.3.21}$$

$k = 0, 1, \ldots, 6$, $|\alpha| \leqslant 4$, $(t, x, z) \in G_{[0,t^*]}$.

Используя оценки (4.3.21), легко заметить, что правые части уравнений (4.3.8), (4.3.9) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0, t^*]$, следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$|u_t^\tau(t, x, z)| \leqslant C,\ (t, x, z) \in G_{[0,t^*]}. \tag{4.3.22}$$

Дифференцируя уравнения (4.3.8), (4.3.9) по переменным x_i, x_j, z необходимое число раз, можем доказать равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial t \partial z^k} D_x^\alpha u^\tau(t, x, z)\right| \leqslant C,\ k = 0, 1, \ldots, 4,\ |\alpha| \leqslant 2,\ (t, x, z) \in G_{[0,t^*]},$$

что вместе с (4.3.21), (4.3.22) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности (теорема 1.1.1).

В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t, x, z)$ последовательности u^τ решений задачи (4.3.8)–(4.3.10) сходится вместе с производными по x до второго и z до четвертого порядка включительно к функции $u(t, x, z) \in C^{0,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$. В силу теоремы 2.3.1 сходимости МСА функция $u(t, x, z)$ есть решение задачи (4.3.7), (4.3.2), причем $u(t, x, z) \in C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,k_1,k_2}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \Big\{u(t, x, z)\ |u_t,\ \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u \in C(G_{[0,t^*]}),$$
$$k = 0, 1, \ldots, k_2;\ |\alpha| \leqslant k_1\Big\}.$$

При этом

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u(t, x, z)\right| \leqslant C,\ k = 0, 1, \ldots, 4,\ |\alpha| \leqslant 2. \tag{4.3.23}$$

Таким образом, доказали существование решения $u(t, x, z)$ прямой задачи (4.3.7), (4.3.2) в классе $C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$. Заметим, что исходная задача формулировалась в области $G_{[0,T]}$, а существование решения доказано в области $G_{[0,t^*]}$, где $0 < t^* \leqslant T$ – некоторая постоянная, зависящая от констант, ограничивающих входные данные. В этом случае говорят, что доказано существование решения "в малом" временном интервале.

Докажем, что пара функций $u(t, x, z)$, $\lambda(t, x)$, где $\lambda(t, x)$ определяется соотношением (4.3.6) является решением обратной задачи (4.3.1)–(4.3.3).

Поскольку $u(t,x,z)$ — решение прямой задачи (4.3.7), (4.3.2), то подставляя $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ в (4.3.1), (4.3.2), мы получаем верное тождество.

В силу (4.3.5), (4.3.12), (4.3.23), (4.3.6), (4.3.7) очевидно, что функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ принадлежат классу

$$Z_{[0,t^*]} = \left\{u(t,x,z),\ \lambda(t,x) \mid u \in C^{1,2,4}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}), \lambda(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})\right\}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=0}^{4}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D^\alpha_x u(t,x,z)\right| + \sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D^\alpha_x\lambda(t,x)| \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}, \quad (4.3.24)$$

где

$$C^{0,k_1}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}) = \left\{\lambda(t,x) \mid D^\alpha_x\lambda(t,x) \in C(\Pi_{[0,t^*]}),\ |\alpha| \leqslant k_1\right\},$$
$$\Pi_{[0,t^*]} = \left\{(t,x) \mid 0 < t < t^*, x \in E_n\right\}.$$

Осталось доказать, что для функции $u(t,x,z)$ выполняется условие переопределения (4.3.3). Положим в уравнении (4.3.7) $z=\gamma$, получим равенства

$$\begin{aligned} &u_t(t,x,\gamma) = L_x(u(t,x,\gamma)) + a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)+\\ &+\frac{\varphi'(t,x) - L_x(\varphi(t,x)) - f(t,x,\gamma) - a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{\varphi(t,x)}\left(u(t,x,\gamma) \pm \varphi(t,x)\right) +\\ &+ f(t,x,\gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t(t,x,\gamma) = L_x(u(t,x,\gamma)) + a(t)u_{zz}(t,x,\gamma) + \lambda(t,x)\left(u(t,x,\gamma) - \varphi(t,x)\right) +\\ + \varphi'(t,x) - f(t,x,\gamma) - L_x(\varphi(t,x)) - a(t)u_{zz}(t,x,\gamma) + f(t,x,\gamma), \end{aligned}$$

$$u_t(t,x,\gamma) - \varphi'(t,x) = L_x(u(t,x,\gamma) - \varphi(t,x)) + \lambda(t,x)\left(u(t,x,\gamma) - \varphi(t,x)\right).$$

Обозначим $\kappa(t,x) = u(t,x,\gamma) - \varphi(t,x)$. В силу (4.3.5) $\kappa(0,x) = 0$. Получим задачу Коши для однородного параболического уравнения с ограниченными коэффициентами и нулевым начальным условием

$$\kappa_t(t,x) = L_x(\kappa(t,x)) + \lambda(t,x)\kappa(t,x),$$
$$\kappa(0,x) = 0.$$

В силу принципа максимума $\kappa(t,x) = 0$, $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$ и, следовательно, $u(t,x,\gamma) = \varphi(t,x)$, т. е. выполнено условие (4.3.3).

Таким образом, доказано существование решения $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ задачи (4.3.1)–(4.3.3) в классе $Z_{[0,t^*]}$. Данный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 4.3.1. *Пусть выполняются условия* (4.3.5), (4.3.12). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (4.3.1)–(4.3.4) *в классе* $Z_{[0,t^*]}$, *удовлетворяющее соотношению* (4.3.24).

Доказательство единственности

Докажем единственность решения задачи (4.3.1)–(4.3.4) при условии выполнения (4.3.5), (4.3.12), (4.3.24).

Пусть $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$ и $u_2(t,x,z)$, $\lambda_2(t,x)$ – два классических решения задачи (4.3.1)–(4.3.3), причем функции $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$ – решение определяемое соотношением (4.3.6), а функции $u_2(t,x,z)$, $\lambda_2(t,x)$ – некоторое другое решение задачи (4.3.1)–(4.3.3), удовлетворяющее условиям (4.3.24). Для них справедливы соотношения

$$u_{1t}(t,x,z) = L_x(u_1(t,x,z)) + a(t)u_{1zz} + \lambda_1(t,x)u_1 + f(t,x,z),$$

$$u_{2t}(t,x,z) = L_x(u_2(t,x,z)) + a(t)u_{2zz} + \lambda_2(t,x)u_2 + f(t,x,z),$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z), \quad u_2(0,x,z) = u_0(x,z),\ x \in E_n,\ z \in E_1,$$

$$u_1(t,x,\gamma) = \varphi(t), \quad u_2(t,x,\gamma) = \varphi(t).$$

Разность $u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z) = u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x) - \lambda_2(t,x) = \lambda(t,x)$ является решением задачи

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + a(t)u_{zz} + \lambda_1(t,x)u + \lambda(t,x)u_2, \tag{4.3.25}$$

$$u(0,x,z) = 0, \quad u(t,x,\gamma) = 0.$$

Отсюда $u(t,x,z)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) =& L_x(u(t,x,z)) + a(t)u_{zz}(t,x) + \lambda_1(t,x)u(t,x,z) + \\ &+ \frac{-a(t)u_{zz}(t,x,\gamma)}{\varphi(t,x)}u_2(t,x,z), \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

$$u(0,x,z) = 0. \tag{4.3.27}$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$g_k(t) = \sup_{G_{[0,t]}} |\frac{\partial^k}{\partial z^k} u(\xi,x,z)|,\ k = 0,1,2.$$

Учитывая оценки (4.3.5), (4.3.24), в силу принципа максимума для уравнения (4.3.26) получаем неравенство

$$|u(\xi, x, z)| \leqslant Ce^{C\xi}(g_2(t) + g_1(t))\xi,\ (\xi, x, z) \in G_{[0,t]},\ 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

откуда в силу неотрицательности $g_k(t)$

$$g_0(t) \leqslant C(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*. \qquad (4.3.28)$$

Дифференцируя (4.3.26), (4.3.27) по z, учитывая оценки (4.3.5), (4.3.24), в силу принципа максимума для уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t, x, z)) =& L_x(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t, x, z)) + a(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t, x, z)) +\\ &+\lambda_1(t)\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t, x, z) + \frac{-a(t)u_{zz}(t, x, \gamma)}{\varphi(t, x)}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_2(t, x, z),\\ &k = 1, 2,\end{aligned}$$

получим оценки

$$g_k(t) \leqslant C(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,\ k = 1, 2,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*. \qquad (4.3.29)$$

Сложив неравенства (4.3.28), (4.3.29), получим

$$(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t)) \leqslant C(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,\ k = 1, 2,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Откуда следует, что при $t \in [0, \zeta]$, где $\zeta < 1/C$, вытекает равенство $g_0(t) + g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = 0$ и, следовательно,

$$u(t, x, z) = 0,\ \text{при}\ (t, x, z) \in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя наши рассуждения для $t \in [\zeta, 2\zeta]$, получаем, что

$$u(t, x, z) = 0,\ (t, x, z) \in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов докажем, что $u(t, x, z) \equiv 0$ в $G_{[0,t^*]}$.

Учитывая, что $u_1 \equiv u_2$ в $G_{[0,t^*]}$, из (4.3.25), получаем, что для $\lambda(t, x) = \lambda_1(t, x) - \lambda_2(t, x)$ выполняется соотношение

$$\lambda(t, x)\varphi(t, x) = 0,$$

откуда в силу (4.3.5),

$$\lambda(t, x) = \lambda_1(t, x) - \lambda_2(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{[0,t^*]}.$$

Доказана

Теорема 4.3.2. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (4.3.1)–(4.3.5), *удовлетворяющее соотношению* (4.3.24), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 4.3.1, 4.3.2 следует

Теорема 4.3.3. *Пусть выполняются условия* (4.3.4), (4.3.5), (4.3.12). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (4.3.1)–(4.3.3) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношению* (4.3.24).

4.4. Задача идентификации коэффициентов при производной по времени и нелинейном выражении двумерного параболического уравнения

Разрешимость задачи Коши

В данном разделе приведены постановка и ключевые моменты доказательства существования и единственности решения задачи идентификации двух коэффициентов двумерного полулинейного параболического уравнения. Полное доказательство возможно изучить самостоятельно.

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_1, z \in E_1\}$ задачу Коши

$$\lambda_1(t,x)u_t(t,x,z) = a_1(t,x)u_{xx} + a_2(t,x)u_{zz} + \\ + \lambda_2(t,x)M(t,u(t,x,z)) + f(t,x,z), \quad (4.4.1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \quad (4.4.2)$$

Введем обозначение

$$L(u) = a_1(t,x)u_{xx} + a_2(t,x)u_{zz}.$$

Функции $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$ такие, что дифференциальный оператор $L(u)$ является оператором эллиптического типа при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$. Функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_2 и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (4.4.1), (4.4.2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,x,0) = \varphi_1(t,x), \quad (4.4.3)$$

$$u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x) \quad (4.4.4)$$

и условиям согласования

$$u_0(x,0) = \varphi_1(0,x), \tag{4.4.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_0(x,0) = \varphi_2(0,x). \tag{4.4.6}$$

Относительно функции $M(t,y)$ также предполагаем, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение и

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\dots,11,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in E_1. \tag{4.4.7}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть при $(t,x) \in \Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} |\Delta(t,x)| = \Bigg| &\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x) M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x) - \\ &- \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) M(t,\varphi_1(t,x))\Bigg| \geq \delta > 0, \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

где δ – некоторая фиксированная постоянная.

Приведем задачу (4.4.1)–(4.4.4) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Положим $z = 0$ в (4.4.1), получим

$$\begin{aligned} \lambda_1(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x) = a_1(t,x)\varphi_{1xx}(t,x) + a_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + \\ + \lambda_2(t,x)M(t,\varphi_1) + f(t,x,0). \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Продифференцируем (4.4.1) по z, положим $z = 0$. Учитывая (4.4.3), (4.4.4), получим

$$\begin{aligned} \lambda_1(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) = a_1\varphi_{2xx} + a_2 u_{zzz}(t,x,0) + \\ + \lambda_2(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 + f_z(t,x,0). \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

Из (4.4.9), (4.4.10) находим

$$\begin{aligned} \lambda_1(t,x) = &\frac{(\psi_1(t,x) + a_2(t,x)u_{zz}(t,x,0))M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)} - \\ &- \frac{(\psi_2(t,x) + a_2(t,x)u_{zzz}(t,x,0))M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)}, \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_2(t,x) = &-\frac{(\psi_2(t,x) + a_2(t,x)u_{zzz}(t,x,0))\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)} + \\
&+\frac{(\psi_1(t,x) + a_2(t,x)u_{zz}(t,x,0))\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)}.
\end{aligned} \tag{4.4.12}
$$

Здесь

$$
\psi_1(t,x) = a_1(t,x)\varphi_{1xx}(t,x) + f(t,x,0),
$$

$$
\psi_2(t,x) = a_1(t,x)\varphi_{2xx}(t,x) + f_z(t,x,0).
$$

Знаменатели в (4.4.11), (4.4.12) в силу (4.4.8) в ноль не обращаются при всех $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$. Перепишем выражения (4.4.11), (4.4.12) в следующем виде :

$$
\lambda_1(t,x) = A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0),
$$

$$
\lambda_2(t,x) = B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0).
$$

Здесь $\Delta(t,x)$,

$$
A_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x) - \psi_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},
$$

$$
A_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},
$$

$$
A_3(t,x) = -\frac{a_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},
$$

$$
B_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) - \psi_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)},
$$

$$
B_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},\ B_3(t,x) = -\frac{a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)}
$$

– известные функции.

Учитывая выражения для коэффициентов $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$, приходим к следующей задаче:

$$
\begin{aligned}
&[A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\,u_t = L(u) + \\
&+ [B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\,M(t,u) + \\
&+ f(t,x,z),
\end{aligned} \tag{4.4.13}
$$

$$
u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{4.4.14}
$$

Введем функцию срезки $S_\delta(y)$, определенную на E_1, достаточно гладкую, обладающую следующими свойствами:

$$S_\delta(y) \geq \frac{\delta}{3} > 0,\ y \in E_1,\ \text{и}\ S_\delta(y) = \begin{cases} y, & y \geq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & y \leqslant \frac{\delta}{3}. \end{cases} \tag{4.4.15}$$

Возьмем срезку от множителя при производной u_t в уравнении (4.4.13):

$$S_\delta\big(A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\big)u_t = L_x(u)+$$
$$+ u_{zz} + [B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\, M(t,u)+$$
$$+ f(t,x,z), \tag{4.4.16}$$

Для доказательства существования решения вспомогательной прямой задачи (4.4.16), (4.4.14) применим метод слабой аппроксимации. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t - \frac{\tau}{3})$ в нелинейных членах:

$$u_t^\tau = 3\frac{a_1(t,x)u_{xx}^\tau(t,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(t,x))}, \quad j\tau < t \leqslant \left(j + \frac{1}{3}\right)\tau, \tag{4.4.17}$$

$$u_t^\tau = 3\frac{a_2(t,x)u_{zz}^\tau(t,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(t,x))}, \quad \left(j + \frac{1}{3}\right)\tau < t \leqslant \left(j + \frac{2}{3}\right)\tau, \tag{4.4.18}$$

$$u_t^\tau = 3\frac{R_2^\tau(t,x)M(t, u^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, z)) + f(t,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(t,x))}, \tag{4.4.19}$$

$$\left(j + \frac{2}{3}\right)\tau < t \leqslant (j+1)\,\tau,$$

$$u^\tau(t,x,z)|_{t\leqslant 0} = u_0(x,z), \quad x \in E_1,\ z \in E_1. \tag{4.4.20}$$

Здесь $j = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = T$; $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t,x,z)$,

$$R_1^\tau(t,x) = A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0) + A_3(t,x)u_{zzz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0),$$

$$R_2^\tau(t,x) = B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0) + B_3(t,x)u_{zzz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0).$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения и удовлетворяют им:

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\psi_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}a_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^m \partial t}\varphi_i(t,x)\right| \leqslant C, \tag{4.4.21}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}f(t,x,z)\right| \leqslant C, \tag{4.4.22}$$

$m = 0,1,\ldots,4$, $i = 1,2$, $k = 0,1,\ldots,11-2m$, $(t,x,y) \in G_{[0,T]}$. Постоянную C в (4.4.21), (4.4.22) считаем больше единицы.

Пусть при $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ выполняется следующее условие:

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,0) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,0) \geq \delta. \tag{4.4.23}$$

Доказано выполнение следующих априорных оценок равномерно по τ при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| +& \\ + \left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k = 0,\ldots,5,&\end{aligned} \tag{4.4.24}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| +& \\ + \left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,& \\ m = 0,1,2,\ k = 0,1,2,3.&\end{aligned} \tag{4.4.25}$$

В силу теоремы 1.1.1 (Арцела) о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (4.4.17)–(4.4.20) сходится вместе с производными по x до второго и по z до третьего порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]})$. Доказано на основании теоремы 2.3.1, что $u(t,x,z)$ есть решение задачи (4.4.16), (4.4.14), причем $u(t,x,z) \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]})$, где

$$\begin{aligned}C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) = \Big\{f(t,x,z) \mid f, f_t \in C(G_{[0,t_*]}),& \\ \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k}f \in C(G_{[0,t_*]}),\ m \leqslant 2,\ k = 0,1,2,3\Big\},&\end{aligned} \tag{4.4.26}$$

$$C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t_*]}) = \Big\{f(t,x,z) \mid \frac{\partial^k}{\partial z^k}f \in C(G_{[0,t_*]}),\ k = 0,1,\ldots,5\Big\}. \tag{4.4.27}$$

При этом при $(t,x,z) \in G_{[0,t_*]}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k = 0,\ldots,5, \tag{4.4.28}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ m=0,1,2,\ k=0,1,2,3. \tag{4.4.29}$$

Для того чтобы снять срезку в (4.4.16), докажем, что при $(t,x)\in\Pi_{[0,t_*]}$

$$\Delta(t,x)=A_1(t,x)+A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\geq\frac{\delta}{2}.$$

Продифференцируем уравнение (4.4.16) дважды по z и проинтегрируем по t в пределах от 0 до t, получим

$$u_{zz}(t,x,z)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,z)+\int\limits_0^t\Psi_1(\eta,x,z)\,d\eta, \tag{4.4.30}$$

где

$$\Psi_1(t,x,z)=\frac{1}{S_\delta(\Delta)}\Big\{L(u_{zz}(t,x,z))+$$
$$+\Big[B_1(t,x)+B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\Big]\times$$
$$\times\Big(M^{(2)}(t,u)u_z^2(t,x,z)+M^{(1)}(t,u)u_{zz}(t,x,z)\Big)+f_{zz}(t,x,z)\Big\}.$$

Продифференцируем уравнение (4.4.16) трижды по z и проинтегрируем по t в пределах от 0 до t, получим

$$u_{zzz}(t,x,z)=\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,z)+\int\limits_0^t\Psi_2(\eta,x,z)\,d\eta,\ \text{где} \tag{4.4.31}$$

$$\Psi_2(t,x,z)=\frac{1}{S_\delta(\Delta)}\Big\{L(u_{zzz}(t,x,z))+$$
$$+\Big[B_1(t,x)+B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\Big]\times$$
$$\times\Big(M^{(3)}(t,u)u_z^3(t,x,z)+3M^{(2)}(t,u)u_zu_{zz}+M^{(1)}(t,u)u_{zzz}(t,x,z)\Big)+$$
$$+f_{zzz}(t,x,z)\Big\}.$$

Домножим выражение (4.4.30) на $A_2(t,x)$, а выражение (4.4.31) на $A_3(t,x)$, сложим полученные равенства и прибавим к левой и правой части $A_1(t,x)$.

$$A_1(t,x)+A_2(t,x)u_{zz}(t,x,z)+A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,z)=A_1(t,x)+$$
$$+A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,z)+A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,z)+$$
$$+A_2(t,x)\int\limits_0^t\Psi_1(\eta,x,z)\,d\eta+A_3(t,x)\int\limits_0^t\Psi_2(\eta,x,z)\,d\eta.$$

Положим в данном равенстве $z = 0$

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0) = A_1(t,x) +$$
$$+ A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,0) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,0) + A_2(t,x)\int\limits_0^t \Psi_1(\eta,x,0)\,d\eta +$$
$$+ A_3(t,x)\int\limits_0^t \Psi_2(\eta,x,0)\,d\eta, \quad (4.4.32)$$

Поскольку выполняется условие (см.(4.4.23))

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,0) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,0) \geq \delta,$$

то из (4.4.32), учитывая ограниченность входных данных и полученные оценки, получаем при $t \in \left[0, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right]$

$$\begin{gathered} A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + \\ + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0) \geq \delta - A(\delta)t \geq \frac{\delta}{2}. \end{gathered} \quad (4.4.33)$$

Здесь $A(\delta)$ – некоторая положительная константа, зависящая от δ, M_0 из (4.4.7) и константы C из (4.4.21), (4.4.22).

В силу определения срезающей функции $S_\delta(y)$ (см.(4.4.15)) получаем

$$S_\delta(\Delta(t,x)) = \Delta(t,x), \text{ при } t \in [0,t^*], \text{ где } t^* = \min\left(t_*, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right).$$

Таким образом, в уравнении (4.4.16) срезка снимается. Функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет уравнению (4.4.13), заметим, что в силу (4.4.33)

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Таким образом, доказали существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (4.4.13), (4.4.14) в классе $C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$.

Доказано, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ является решением обратной задачи (4.4.1)–(4.4.4) и выполняются условия переопределения (4.4.3), (4.4.4).

Используя (4.4.7), (4.4.8), (4.4.21), (4.4.22), (4.4.24), (4.4.25) из (4.4.11), (4.4.12), (4.4.13) получаем, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$

принадлежит классу

$$Z(t^*) = \Big\{u(t,x,z),\ \lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),$$
$$\lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})\Big\}$$

и удовлетворяет при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ неравенствам

$$\sum_{k=0}^{5}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ \ \sum_{m=0}^{2}\sum_{k=0}^{3}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C, \tag{4.4.34}$$

$$\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_1(t,x)\right| + \sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_2(t,x)\right| \leqslant C,\ (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}. \tag{4.4.35}$$

Классы $C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$, $C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$ определены в (4.4.26), (4.4.27), а

$$C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}) = \Big\{g(t,x) \mid \frac{\partial^m}{\partial x^m}g(t,x) \in C(\Pi_{[0,t^*]}),\ m = 0,1,2\Big\}.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.4.1. *Пусть выполняются условия* (4.4.5)−(4.4.8), (4.4.21)−(4.4.23). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (4.4.1)−(4.4.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (4.4.34), (4.4.35).

Теорема 4.4.2. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (4.4.1)−(4.4.8), *удовлетворяющее соотношениям* (4.4.34), (4.4.35), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 4.4.1 и 4.4.2 следует

Теорема 4.4.3. *Пусть выполняются условия* (4.4.5)−(4.4.8), (4.4.21)−(4.4.23). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (4.4.1)−(4.4.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (4.4.34), (4.4.35).

Глава 5. Краевые задачи идентификации входных данных

5.1. Разрешимость первой и второй краевых задач идентификации коэффициента при младшем члене многомерного параболического уравнения

В области $\Omega_{[0,T]} = \{(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid 0 \le t \le T, 0 \le x_k \le \pi, k = 1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим задачу идентификации пары действительнозначных функций $\big(u(t,x), \lambda(t)\big)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t(t,x) = \Delta u(t,x) + \lambda(t)u(t,x) + f(t,x) \qquad (5.1.1)$$

и условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad (5.1.2)$$

$$u(t,x)|_{x_k=0} = u(t,x)|_{x_k=\pi} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.1.3)$$

Здесь функции $u_0(x)$, $f(t,x)$ действительнозначные и заданы в E_n и $[0,T]\times E_n$ соответственно, E_n – n-мерное евклидово пространство.

Функция $\lambda(t)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (5.1.1)–(5.1.3), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t,\gamma) = \varphi(t), \qquad (5.1.4)$$

для некоторой фиксированной точки $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $0 < \gamma_k < \pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Считаем выполненным условие согласования

$$u_0(\gamma) = \varphi(0). \qquad (5.1.5)$$

Пусть также выполняется условие

$$|\varphi(t)| \ge \delta > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (5.1.6)$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (5.1.7) и при $(t,x) \in G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T, x \in E_n\}$ выполняется условие

$$|\varphi(t)| + |\varphi'_t(t)| + |D^\alpha_x u_0(x)| + |D^\alpha_x f(t,x)| \leqslant C, \quad |\alpha| \leqslant 6, \qquad (5.1.7)$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \ge 0$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $D^\alpha_x = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $(t,x) \in G_{[0,T]}$, C – const.

Пусть функции $u_0(x)$ и $f(t,x)$ допускают продолжение нечетным образом по пространственным переменным x на E_n :

$$u_0(x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty} \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \sin k_1x_1 \sin k_2x_2 \cdots \sin k_nx_n, \tag{5.1.8}$$

$$f(t,x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty} \beta_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(t) \sin k_1x_1 \sin k_2x_2 \cdots \sin k_nx_n, \tag{5.1.9}$$

$\alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ – постоянные, $\beta_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(t) \in C[0,T]$.

Использовав условие переопределения, найдем выражение для неизвестного коэффициента

$$\lambda(t) = \frac{\psi(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_ix_i}(t,\gamma)}{\varphi(t)}, \tag{5.1.10}$$

где $\psi(t) = \varphi'(t) - f(t,\gamma)$ – известная функция.

Заметим, что знаменатель данного выражения не обращается в нуль в силу условия (5.1.6).

Рассмотрим теперь в $G_{[0,T]}$ прямую задачу Коши, которая получается из (5.1.1), (5.1.2) заменой функций $u_0(x)$ и $f(t,x)$ на их продолжения нечетным образом на все пространство E_n (обозначения продолжений оставим прежними).

$$u_t(t,x) = \Delta u(t,x) + \frac{\psi(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_ix_i}(t,\gamma)}{\varphi(t)} u(t,x) + f(t,x), \tag{5.1.11}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in E_n. \tag{5.1.12}$$

Теперь расщепим задачу в соответствии с МСА и линеаризуем ее сдвигом по времени на $\frac{\tau}{2}$ на втором дробном шаге в нелинейных членах аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 4.3.1.

$$u_t^\tau(t,x) = 2\Delta u^\tau(t,x),\ t \in \left(j\tau, \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau\right], \tag{5.1.13}$$

$$\begin{gathered} u_t^\tau(t,x) = 2\frac{\psi(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} u^\tau_{x_ix_i}(t-\frac{\tau}{2},\gamma)}{\varphi(t)} u^\tau(t,x) + f(t,x), \\ t \in \left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, (j+1)\tau\right] \end{gathered} \tag{5.1.14}$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x). \tag{5.1.15}$$

Здесь $j = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = T$; $u^\tau = u^\tau(t,x)$.

Можно доказать (по аналогии рассуждениям, проделанным выше для случая задачи Коши), что для решения расщепленной задачи (5.1.13)–(5.1.15) $u^\tau(t,x)$ справедливы при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ следующие равномерные по τ оценки:

$$|D_x^\alpha u^\tau(t,x)| + \left|\frac{\partial}{\partial t} D_x^\alpha u^\tau(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_i} D_x^\alpha u^\tau(t,x)\right| \leqslant C,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ |\alpha| \leqslant 4,$$

где $0 < t^* \leqslant T$ – некоторая постоянная, зависящия от δ из (5.1.6) и постоянной C из (5.1.7).

Рассмотрим уравнение (5.1.13) с начальным условием (5.1.15). В силу (5.1.8) решение данного уравнения при $t \in (0, \frac{\tau}{2}]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty} \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} e^{-2(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)t} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n. \tag{5.1.16}$$

Рассмотрим уравнение (5.1.14) с начальным условием

$$u^\tau(\frac{\tau}{2}, x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty} \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} e^{-(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)\tau} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n.$$

Проинтегрируем уравнение (5.1.14) по временной переменной по отрезку $(\frac{\tau}{2}, t]$. В силу (5.1.8), (5.1.9) решение на временном отрезке $t \in (\frac{\tau}{2}, \tau]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty} \left[\int_{\frac{\tau}{2}}^{t} 2\beta_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(\theta) e^{-\int_{\frac{\tau}{2}}^{\theta} 2\lambda^\tau(\eta)\, d\eta} d\theta + \right.$$
$$\left. + \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} e^{-(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)\tau} \right] e^{\int_{\frac{\tau}{2}}^{t} 2\lambda^\tau(\eta)\, d\eta} \times$$
$$\times \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cdots \sin k_n x_n,$$

где

$$\lambda^\tau(t) = \frac{\psi(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} u^\tau_{x_i x_i}(t - \frac{\tau}{2}, \gamma)}{\varphi(t)}.$$

Следовательно $u^\tau(t,x)|_{x_k=0} = u^\tau(t,x)|_{x_k=\pi} = 0, k = 1,\dots,n,$ при $t \in (\frac{\tau}{2},\tau]$. Таким образом, $u^\tau(t,x)|_{x_k=0} = u^\tau(t,x)|_{x_k=\pi} = 0$, $k = 1,\dots,n$, при $t \in (0,\tau]$.

Аналогично рассуждая на следующем целом временном шаге, получаем, что $u^\tau(t,x)|_{x_k=0} = u^\tau(t,x)|_{x_k=\pi} = 0$, $k = 1,\dots,n$, при $t \in (0,2\tau]$. Через конечное число шагов получим соотношения

$$u^\tau(t,x)|_{x_k=0} = u^\tau(t,x)|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1,\dots,n,\ \text{при}\ t \in (0,t^*]. \qquad (5.1.17)$$

В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ последовательности u^τ решений задачи (5.1.13)–(5.1.15) сходится вместе с производными по x до четвертого порядка включительно к функции $u(t,x) \in C^{0,4}_{t,x}(G_{[0,t^*]})$. Доказано на основании теоремы 2.3.1 сходимости метода слабой аппроксимации, что $u(t,x)$ есть решение задачи (5.1.11), (5.1.12), причем $u(t,x) \in C^{1,4}_{t,x}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,4}_{t,x}(G_{[0,t^*]}) = \left\{u(t,x) \mid u_t,\ D^\alpha_x u \in C(G_{[0,t^*]}),\ |\alpha| \leqslant 4\right\}.$$

При этом в $G_{[0,t^*]}$ справедлива оценка

$$|D^\alpha_x u(t,x)| \leqslant C,\ |\alpha| \leqslant 4.$$

Не трудно доказать, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет условию (5.1.4).

В силу (5.1.17) для функции $u(t,x)$ выполняется

$$u(t,x)|_{x_k=0} = u(t,x)|_{x_k=\pi} = 0, \quad k = 1,\dots,n$$

при $t \in (0,t^*]$ и, следовательно, в качестве решения исходной краевой задачи (5.1.1)–(5.1.4) можно взять сужение на $\Omega_{[0,t^*]}$ решения задачи Коши для уравнения (5.1.1) с начальными данными и правой частью, являющимися указанными в (5.1.8), (5.1.9) продолжениями функций $u_0(x)$, $f(t,x)$ и условиями переопределения (5.1.4).

Единственность решения исходной краевой задачи доказывается абсолютно аналогично теореме единственности 4.3.2, доказанной для решения задачи Коши.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5.1.1. *Пусть выполняются условия* (5.1.5)–(5.1.9). *Тогда существует решение $u(t,x)$, $\lambda(t)$ задачи* (5.1.1)–(5.1.4) *в классе*

$$\widehat{Z}(t^*) = \left\{u(t,x),\ \lambda(t), \mid u \in C^{1,4}_{t,x}(\Omega_{[0,t^*]}),\ \lambda(t) \in C([0,t^*])\right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$|\lambda(t)| + \sum_{|\alpha|\leqslant 4} |D_x^\alpha u(t,x)| \leqslant C, \ (t,x) \in \Omega_{[0,t^*]}, \tag{5.1.18}$$

Теорема 5.1.2. *Решение* $u(t,x)$, $\lambda(t)$ *задачи* (5.1.1)–(5.1.6), *для которого справедливо, что функция* $u(t,x)$ *допускает продолжение нечетным образом по пространственной переменной на* $G_{[0,t^*]}$ *и удовлетворяет при* $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ *соотношению* (5.1.18), *единственно в классе* $\widehat{Z}(t^*)$.

Из теорем 5.1.1, 5.1.2 следует теорема 5.1.3.

Теорема 5.1.3. *Пусть выполняются условия* (5.1.5)–(5.1.9). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x)$, $\lambda(t)$ *задачи* (5.1.1)–(5.1.4) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношению* (5.1.18).

Замечание. В случае второй краевой задачи (5.1.1), (5.1.2), (5.1.19), (5.1.4), где граничные условия имеют вид

$$u_x(t,x)|_{x_k=0} = u_x(t,x)|_{x_k=\pi} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{5.1.19}$$

при выполнении условий

$$u_0(x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=0}^{\infty} \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \cos k_1x_1 \cos k_2x_2 \cdots \cos k_nx_n,$$

$$f(t,x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=0}^{\infty} \beta_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(t) \cos k_1x_1 \sin k_2x_2 \cdots \cos k_nx_n,$$

$\alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ – постоянные, $\beta_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(t) \in C[0,T]$, где $\alpha_k - const$, $\beta_k(t) \in C[0,T]$, справедливы аналогичные теоремы. Их доказательство в целом повторяет доказательство теорем 5.1.1–5.1.3.

5.2. Задача идентификации функции источника. Интегральное переопределение

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = fh(t,x) + g(t,x) \tag{5.2.1}$$

в случае, когда f зависит либо от x, либо от t. Здесь Δ — оператор Лапласа. Результаты, которые будут получены ниже, в более общем случае приведены в книге А.И.Прилепко, Д.Г.Орловского и И.А.Васина [74].

Будем считать, что $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ изменяется в некоторой ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ с дважды гладкой границей $\partial\Omega$, а переменная t – на промежутке $(0, T)$.

Рассмотрим случай, когда f зависит только от x. Рассмотрим в цилиндре $Q_T = (0, T) \times \Omega$ обратную задачу определения пары функций (u, f), удовлетворяющих уравнению (5.2.1) с заданными функциями h и g при $(t, x) \in Q_T$, а также начальному условию

$$u(x, 0) = a(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5.2.2}$$

граничному условию Дирихле

$$u(t, x) = b(t, x), \qquad (t, x) \in S_T = \partial\Omega \times (0, T), \tag{5.2.3}$$

условию переопределения

$$(lu)(x) = \chi(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5.2.4}$$

Оператор l – это либо оператор следа при некотором значении $t = t_1$, $0 < t_1 \leqslant T$, т. е.

$$(lu)(x) = u(t_1, x), \qquad x \in \Omega, \tag{5.2.5}$$

либо интегральный оператор вида

$$(lu)(x) = \int\limits_0^T u(\tau, x)\omega(\tau)d\tau, \qquad x \in \Omega, \tag{5.2.6}$$

с известной функцией $\omega(\tau)$.

Заметим, что при исследовании задачи (5.2.1)–(5.2.4) достаточно ограничиться случаем, когда условия (5.2.2),(5.2.3) однородны и $g(t, x) \equiv 0$. Действительно, рассмотрим прямую задачу:

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v = g(t, x), &\qquad (t, x) \in Q_T, \\ v(x, 0) = a(x), &\qquad x \in \Omega, \\ v(t, x) = b(t, x), &\qquad (t, x) \in S_T. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Как известно из курса уравнений математической физики, задача (5.2.7) имеет единственное решение $v(t, x)$ в соответствующем классе функций при любых исходных данных $g(t,x)$, $a(x)$ и $b(t,x)$. Тогда в силу (5.2.1)–(5.2.4) пара функций $u-v$, f удовлетворяет уравнению

$$(u-v)_t - \Delta(u-v) = f(x)h(t,x), \qquad (t,x) \in Q_T \tag{5.2.8}$$

и условиям

$$\begin{aligned} (u-v)(x,0) = 0, \qquad & x \in \Omega, \\ (u-v)(t,x) = 0, \qquad & (t,x) \in S_T, \\ [l(u-v)]\,(x) = \chi(x) - (lv)(x), & x \in \Omega. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Таким образом разрешимость задачи (5.2.8)–(5.2.9) влечет за собой разрешимость задачи (5.2.1)–(5.2.4).

Первой нашей целью является доказательство однозначной разрешимости обратной задачи

$$u_t - \Delta u = f(x)h(t,x), \qquad (t,x) \in Q_T, \tag{5.2.10}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{5.2.11}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in S_T, \tag{5.2.12}$$

$$\int\limits_0^T u(\tau,x)\omega(\tau)d\tau = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5.2.13}$$

где функции h, ω и φ заданы. Причем функция u ищется в классе $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, в котором множество всех гладких в Q_T функций, обращающихся в нуль на S_T, является всюду плотным в смысле нормы пространства $W_2^{2,1}(Q_T)$:

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} = \left[\int_{Q_T} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u^2\right) dx\, dt\right]^{1/2}.$$

Под решением задачи (5.2.10)–(5.2.13) будем понимать пару функций u, f, отвечающих следующему определению.

Определение 5.2.1. *Пара функций $\{u, f\}$ называется обобщенным решением обратной задачи (5.2.10)–(5.2.13), если $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $f \in L_2(\Omega)$ и выполняются соотношения (5.2.10)–(5.2.13).*

Дальнейшие рассуждения проведем по следующей схеме. Во-первых, построим операторное уравнение для функции f в пространстве $L_2(\Omega)$. Затем покажем, что это уравнение эквивалентно в некотором смысле исходной обратной задаче. На третьем шаге будет доказана однозначная разрешимость построенного операторного уравнения при определенных ограничениях на входные данные.

Следуя приведенной выше схеме, начнем с вывода операторного уравнения второго рода для функции f, предположив, что

$$\varphi(x) \in W_2^2(\Omega), \qquad h, h_t \in L_\infty(Q_T), \qquad \omega \in L_2(0,T), \tag{5.2.14}$$

$$\left| \int_0^T h(\tau, x)\omega(\tau)d\tau \right| \geq \delta > 0 \qquad \delta \equiv const, \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{5.2.15}$$

Умножим уравнение (5.2.10) на $\omega(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до T

$$\int_0^T u_t(t,x)\omega(t)dt - \int_0^T (\Delta u)(t,x)\omega(t)dt = f(x)\int_0^T h(t,x)\omega(t)dt. \tag{5.2.16}$$

В силу (5.2.13) второе слагаемое уравнения (5.2.16) является известной функцией

$$\int_0^T (\Delta u)(t,x)\omega(t)dt = \Delta \int_0^T u(t,x)\omega(t)dt = \Delta\varphi(x).$$

Подставив данное выражение в (5.2.16) и выразив из него $f(x)$, получим уравнение

$$f(x) = \frac{1}{h_1(x)} \int_0^T u_t(t,x)\omega(t)dt + \psi(x), \tag{5.2.17}$$

где $h_1(x) = \int\limits_0^T h(t,x)\omega(t)dt$, $\psi(x) = -\dfrac{1}{h_1(x)}\Delta\varphi(x)$.

Введем линейный оператор A_1, действующий в пространстве $L_2(\Omega)$ по следующему правилу. Зафиксируем произвольную функцию $f \in L_2(\Omega)$ и подставим ее в уравнение (5.2.10). Получившаяся прямая задача (5.2.10)–(5.2.12) имеет единственное решение $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$. Более того, условия (5.2.14) и (5.2.15) гарантируют, что

$$u \in V = \Big\{ v \mid \; v(\cdot,t) \in C([0,T]; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W_2^1}(\Omega)),$$
$$v_t(\cdot,t) \in C([0,T]; W_2^2(\Omega)) \Big\},$$

причем для u справедлива оценка [43]

$$\|u\|_{W_{2,0}^{2,1}(\Omega)} \leqslant C^* \|f\|_{L_2(\Omega)} \left(\int_0^T \|h(t)\|^2_{L_\infty(\Omega)} dt \right)^{1/2}. \tag{5.2.18}$$

Найдем это решение, вычислим интеграл

$$\int_0^T u_t(t,x)\omega(t)dt$$

и тем самым определим элемент

$$(A_1 f)(x) = \frac{1}{h_1(x)} \int_0^T u_t(t,x)\omega(t)dt \tag{5.2.19}$$

пространства $L_2(\Omega)$. Таким образом, можно рассматривать (5.2.17) как операторное уравнение второго рода

$$f = A_1 f + \psi. \tag{5.2.20}$$

От существования решения этого уравнения зависит разрешимость обратной задачи (5.2.10)–(5.2.13).

Теорема 5.2.1. *Пусть* $h, h_t \in L_\infty(Q_T)$, $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $\omega \in L_2(0,T)$ *и выполняется* (5.2.15). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если линейное уравнение* (5.2.20) *разрешимо, то разрешима и задача* (5.2.10)–(5.2.13)*;*

(2) *если существует решение* $\{u, f\}$ *задачи* (5.2.10)–(5.2.13)*, то функция* f *является решением уравнения* (5.2.20).

Доказательство. Начнем доказательство с утверждения (2). Пусть уравнение (5.2.20) имеет решение f^*. Если подставим функцию f^* в (5.2.10), то получим прямую задачу (5.2.10)–(5.2.12), которая имеет единственное решение $u^* \in V$.

Утверждение (1) будет доказано, если покажем, что решение u^* удовлетворяет условию переопределения (5.2.13). Пусть $\int_0^T u_t^*(t,x)\omega(t)dt = \varphi_1(x)$,

$x \in \Omega$. Согласно условиям теоремы $u^* \in V$ и $\omega \in L_2(0,T)$. Поэтому $\varphi_1 \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Умножим обе части (5.2.10) на функцию $\omega(t)$ и проинтегрируем полученное уравнение по t от 0 до T. После таких же преобразований, как при выводе (5.2.17), приходим к уравнению

$$\int_0^T u_t^*(t,x)\omega(t)dt - (\Delta\varphi_1)(x) = f^*(x)h_1(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5.2.21}$$

Но по предположению функция f^* является решением уравнения (5.2.20). Это значит, что

$$\int_0^T u_t^*(t,x)\omega(t)dt - (\Delta\varphi)(x) = f^*(x)h_1(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5.2.22}$$

Вычитая (5.2.21) из (5.2.22), получаем

$$-\left[\Delta(\varphi_1 - \varphi)(x)\right] = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{5.2.23}$$

Из определения φ_1 и φ следует, что

$$(\varphi_1 - \varphi)(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{5.2.24}$$

Задача Дирихле (5.2.23), (5.2.24) имеет только тривиальное решение. Поэтому $\varphi_1 = \varphi$ почти всюду в Ω и, следовательно, u удовлетворяет условию переопределения (5.2.13). Утверждение (1) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения (2). Пусть пара функций $\{u, f\}$ является решением задачи (5.2.10)–(5.2.13). Тогда эта пара удовлетворяет соотношению (5.2.16) и, в силу условия (5.2.13), уравнению (5.2.17). Принимая во внимание определение оператора A_1, приходим к выводу, что функция f — решение уравнения (5.2.20), и тем самым завершаем доказательство теоремы 5.2.1.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия существования единственного решения задачи (5.2.10)–(5.2.13).

Теорема 5.2.2. *Пусть выполняются условия теоремы 5.2.1 и неравенство*

$$m_1 \equiv \delta^{-1}\|\omega\|_{L_2(0,T)} \cdot \|m_2\|_{L_2(0,T)} < 1, \tag{5.2.25}$$

где

$$m_2(t) = \left[\exp\{-\alpha t\}\|h(0,\cdot)\|^2_{L_\infty(\Omega)} + \int\limits_0^t \exp\{-\alpha(t-\tau)\}\|h_t(\tau,\cdot)\|^2_{L_\infty(\Omega)}d\tau\right]^{1/2}, \tag{5.2.26}$$

$\alpha = \frac{1}{C_1(\Omega)}$ *и* $C_1(\Omega)$ *− константа из неравенства Пуанкаре − Фридрихса. Тогда существует решение* $\{u, f\}$ *обратной задачи (5.2.10)−(5.2.13),* $u \in W^{2,1}_{2,0}(Q_T)$*,* $f \in L_2(\Omega)$*. Это решение единственно в указанном классе функций и справедливы оценки*

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\delta^{-1}}{1-m_1}\|\Delta\varphi\|_{L_2(\Omega)}, \tag{5.2.27}$$

$$\|u\|_{W^{2,1}_{2,0}(Q_T)} \leqslant \frac{C^*\delta^{-1}}{1-m_1}\|\Delta\varphi\|_{L_2(\Omega)}\left(\int\limits_0^T \|h(\tau,\cdot)\|^2_{L_\infty(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}, \tag{5.2.28}$$

где C^* *−* $const > 0$*, не зависящая от* u*.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если операторное уравнение (5.2.20) имеет решение, то согласно теореме 1 разрешима и обратная задача (5.2.10)–(5.2.13).

Покажем, что оператор A_1 ограничен в $L_2(\Omega)$, причем для любого $f \in L_2(\Omega)$ справедлива оценка

$$\|A_1 f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant m_1\|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{5.2.29}$$

с константой m_1 вида (5.2.25). Действительно, из (5.2.19) следует неравенство

$$\|A_1 f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta^{-1}\|\omega\|_{L_2(0,T)}\left(\int\limits_0^T \|u_t(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}dt\right)^{1/2}. \tag{5.2.30}$$

Но, подставляя функцию $f \in L_2(\Omega)$ в уравнение (5.2.10), получаем прямую задачу (5.2.10)–(5.2.12), которая имеет единственное решение $u \in V$. Дифференцирование уравнения (5.2.10) по t показывает, что u_t удовлетворяет уравнению

$$u_{tt}(t,x) - (\Delta u_t)(t,x) = f(x)h_t(t,x) \tag{5.2.31}$$

в Q_T. Из уравнения (5.2.10) вытекает начальное условие

$$u_t(0,x) = f(x)h(0,x). \tag{5.2.32}$$

В силу (5.2.12)

$$u_t(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in S_T. \tag{5.2.33}$$

Итак, u_t является решением смешанной задачи для уравнения (5.2.31).

Умножим уравнение (5.2.31) на u_t и проинтегрируем по x в Ω. После интегрирования по частям x в левой части полученного соотношения будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{tx_i}\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x) h_t(t,x) u_t dx. \tag{5.2.34}$$

Из (5.2.33) и неравенства Пуанкаре—Фридрихса следует, что

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1(\Omega) \sum_{i=1}^{n} \|u_{tx_i}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $C_1(\Omega)$ зависит только от n и Ω. Используя это неравенство и оценивая интеграл в правой части (5.2.34), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{C_1(\Omega)}\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)} \|h_t(t,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} \|u_t\|_{L_2(\Omega)}.$$

Применим к правой части последнего соотношения неравенство Коши. Это даст

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2C_1(\Omega)}\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{C_1(\Omega)}{2} \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \|h_t(t,\cdot)\|^2_{L_\infty(\Omega)}. \tag{5.2.35}$$

Умножая (5.2.35) на $\exp(-\alpha t)$, где $\alpha = \frac{1}{C_1(\Omega)}$, и интегрируя результат по t от 0 до τ, $0 < \tau \leqslant T$, приходим к оценке

$$\|u_t(\tau,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant m_2(t) \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{5.2.36}$$

где $m_2(t)$ задается формулой (5.2.26). Теперь оценка (5.2.29) следует непосредственно из (5.2.30) и (5.2.36).

Так как $m_1 < 1$, оператор A_1 является сжимающим отображением в $L_2(\Omega)$. Поэтому согласно принципу сжимающих отображений у оператора A_1 есть единственная неподвижная точка. Следовательно, уравнение (5.2.20) имеет единственное решение, для которого в силу (5.2.29) верна оценка (5.2.27). Тогда утверждение (1) теоремы 5.2.1 гарантирует существование решения $\{u, f\}$ обратной задачи (5.2.10)–(5.2.13). Оценка (5.2.28) для u вытекает из (5.2.18) и (5.2.27).

Докажем единственность найденного решения задачи (5.2.10)–(5.2.13). Предположим, что задача (5.2.10)–(5.2.13) имеет два различных решения $\{u_1, f_1\}$ и $\{u_2, f_2\}$. Функция f_1 не может совпадать с f_2, поскольку их равенство немедленно повлекло бы за собой совпадение функций u_1 и u_2 ввиду единственности решения прямой задачи (5.2.10)–(5.2.12). Согласно утверждению (2) теоремы 5.2.1 функции f_1 и f_2 являются решениями операторного уравнения (5.2.20). Это противоречит единственности решения уравнения (5.2.20), установленной выше. Значит, предположение о неединственности решения обратной задачи (5.2.10)–(5.2.13) неверно. Теорема 5.2.2 доказана.

Теорема 5.2.2 гарантирует однозначную разрешимость обратной задачи (5.2.10)–(5.2.13) только при условии, что исходные данные задачи отвечают неравенству (5.2.25), т. е. "в малом". Примеры, приведенные ниже, показывают, что множество таких данных не пусто.

Пример 1. Пусть $h(t,x) = h$ и $\omega(t) = \omega$, где $h \neq 0$, $\omega \neq 0$ — постоянные. В этом случае $\left|\int\limits_0^T h(t,x)\omega(t)dt\right| = |h\omega|T$, т. е. $\delta = |h\omega|T$. Далее $\|\omega\|_{L_2(0,T)} =$ $= \|\omega\|T^{1/2}$, $m_2(t) = \|h\|\exp(-\alpha t)$, $\|m_2\|_{L_2(0,T)} = \|h\|\left(\frac{1-\exp(-2\alpha T)}{2\alpha}\right)^{1/2}$. Тогда $m_1 = \left(\frac{1-\exp(-2\alpha T)}{2\alpha}\right)^{1/2} < 1$. Итак, условие (5.2.25) выполняется при любых постоянных h и ω.

Пример 2. Пусть теперь $h(t,x) = t \cdot h(x)$, где $h(x)$ – произвольная функция, $h(x) \in L_\infty(\Omega)$, причем $h(x) \geq h_0 > 0$, а h_0 – действительное число. Пусть также $\omega = ct$ и $c \in \mathbb{R}$. Обозначим $\|h(x)\|_{L_\infty(\Omega)}$ через h_1. Легко видеть, что в данном случае $\left|\int\limits_0^T h(x)t \cdot ctdt\right| \geq |c|h_0\frac{T^3}{3}$, т. е. $\delta = |c|h_0\frac{T^3}{3}$; $\|\omega\|_{L_2(0,T)} = \frac{|c|T^{3/2}}{\sqrt{3}}$; $m_2(t) = h_1\left(\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau\right)^{1/2} = h_1\left(\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)^{1/2}$.
Тогда
$$\|m_2(t)\|_{L_2(0,T} = \frac{h_1 T^{1/2}}{\alpha^{1/2}}\left(1 + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha T}\right)^{1/2}$$
$$m_1 = \frac{h_1\sqrt{3}}{h_0\alpha^{1/2}T}\left(1 + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha T}\right)^{1/2}.$$
Условие (5.2.25) выполняется при достаточно большом значении величины αT. Это возможно, когда велик промежуток $[0,T]$ или мала область Ω. Например, если $h(x) = const \neq 0$, т. е. $h_0 = h_1$, то $m_1 < 1$ при $\alpha T \geq 2$.

5.3. Задача идентификации функции источника. Финальное переопределение

Перейдем к исследованию задачи с условием финального переопределения (5.2.4). Рассмотрим задачу

$$u_t(t,x) - (\Delta u)(t,x) = f(x)h(t,x), \qquad (t,x) \in Q_T, \tag{5.3.1}$$

$$u(0,x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{5.3.2}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in S_T, \tag{5.3.3}$$

$$u(T,x) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5.3.4}$$

Под решением задачи (5.3.1)–(5.3.4) будем понимать пару функций $\{u, f\}$, отвечающих следующему определению.

Определение 5.3.1. *Пара функций $\{u, f\}$ называется обобщенным решением задачи (5.3.1)–(5.3.4), если $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $f \in L_2(\Omega)$ и выполняются соотношения (5.3.1)–(5.3.4).*

Исследование данной обратной задачи будем проводить по той же схеме, что и задачи (5.2.10)–(5.2.13). Следуя этой схеме, прежде всего построим операторное уравнение второго рода для f, предполагая, что

$$\varphi(x) \in W_2^2(\Omega), \qquad h, h_t \in L_\infty(Q_T), \qquad |h(T,x)| \geq \delta > 0 \tag{5.3.5}$$

для $x \in \overline{\Omega}$ ($\delta \equiv const$). В таких предположениях прямая задача (5.3.1)–(5.3.3) имеет единственное решение $u \in V$ (пространство V определено в предыдущем пункте). Тогда уравнение (5.3.1) имеет смысл при $t = T$. Полагая в (5.3.1) $t = T$ и выражая из него $f(x)$, в силу (5.3.4) получим

$$f(x) = \frac{1}{h(T,x)} u_t(T,x) + \psi_1, \tag{5.3.6}$$

где $\psi_1 = -\dfrac{(\Delta\varphi)(x)}{h(T,x)}$. Введем линейный оператор A_2, действующий в пространстве $L_2(\Omega)$ по следующему правилу. Возьмем произвольный элемент $f \in L_2(\Omega)$ и подставим его в уравнение (5.3.1). Найдем решение u получившейся прямой задачи (5.3.1)–(5.3.3), вычислим след производной u_t при $t = T$. Тем самым определим элемент

$$(A_2 f)(x) = \frac{1}{h(T,x)} u_t(T,x)$$

пространства $L_2(\Omega)$. Таким образом, можно рассматривать (5.3.6) как операторное уравнение второго рода

$$f = A_2 f + \psi_1, \tag{5.3.7}$$

где $\psi_1 \in L_2(\Omega)$ — известная функция.

Теорема 5.3.1. *Пусть* $h, h_t \in L_\infty(Q_T)$, $\omega \in L_2(0,T)$, $\phi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ *и выполняется* (5.3.5). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если линейное уравнение* (5.3.7) *разрешимо, то разрешима и задача* (5.3.1)–(5.3.4);

(2) *если существует решение* u, f *задачи* (5.3.1)–(5.3.4), *то функция* f *является решением уравнения* (5.3.7).

Доказательство. Доказательство теоремы 5.3.1 во многом повторяет доказательство теоремы 5.2.1. Поэтому остановимся лишь на его основных моментах.

Пусть уравнение (5.2.20) имеет решение f^*. Утверждение (1) будет доказано, если покажем, что решение $u^* \in V$ прямой задачи (5.3.1)–(5.3.3) с $f = f^*$ удовлетворяет условию переопределения (5.3.4). Положим $u_t^*(T,x) = \varphi_2(x)$. Поскольку решение $u^* \in V$, его след $\phi_2 \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$. Тогда из уравнения (5.3.1) следует, что

$$u_t^*(T,x) - (\Delta\varphi_2)(x) = f^*(x)h(T,x), \qquad x \in \Omega. \tag{5.3.8}$$

Но, по предположению функция f^* является решением уравнения (5.3.1). Это значит, что

$$u_t^*(T,x) - (\Delta\varphi)(x) = f^*(x)h(T,x), \qquad x \in \Omega. \tag{5.3.9}$$

Вычитая (5.3.8) из (5.3.9), получим уравнение

$$\Delta(\varphi_2 - \varphi)(x) = 0, \qquad x \in \Omega,$$

из которого в силу равенства φ_2 и φ на S_T следует, что $\varphi_2 = \varphi$ почти всюду в Ω и, значит, u удовлетворяет условию переопределения (5.3.4). Утверждение (1) доказано полностью.

Докажем утверждение (2). Пусть пара функций $\{u, f\}$ является решением задачи (5.3.1)–(5.3.4). Тогда эта пара удовлетворяет соотношению (5.3.9). Обращаясь к определению оператора A_2, заключаем из (5.3.9), что функция f является решением уравнения (5.3.7). Теорема 5.3.1 доказана.

Используя теорему 5.3.1 установим достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи (5.3.1)–(5.3.4) аналогично тому, как это сделано в теореме 5.2.2.

Теорема 5.3.2. *Пусть $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$, $h, h_t \in L_\infty(Q_T)$, выполняется условие (5.3.5) и неравенство*

$$m_3 \equiv \delta^{-1}\Bigg[\exp\{-\alpha T\}\|h(0,\cdot)\|^2_{L_\infty(\Omega)} + \\ + \int\limits_0^T \exp\{-\alpha(T-\tau)\}\|h_t(\tau,\cdot)\|^2_{L_\infty(\Omega)} d\tau\Bigg]^{1/2} < 1,$$

где $\alpha = \frac{1}{C_1(\Omega)}$, $C_1(\Omega)$ – константа из неравенства Пуанкаре – Фридрихса. Тогда существует решение $\{u, f\}$ обратной задачи (5.3.1)–(5.3.4), $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $f \in L_2(\Omega)$. Это решение единственно в указанном классе функций и справедливы оценки

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\delta^{-1}}{1-m_3}\|\Delta\varphi\|_{L_2(\Omega)}, \tag{5.3.10}$$

$$\|u\|_{W_{2,0}^{2,1}(Q_T)} \leqslant \frac{C^{**}\delta^{-1}}{1-m_3}\|\Delta\varphi\|_{L_2(\Omega)} \left(\int\limits_0^T \|h(\tau,\cdot)\|^2_{L_\infty(\Omega)} d\tau\right)^{1/2}, \tag{5.3.11}$$

где C^{**} – $const > 0$, не зависящая от u.

Доказательство. Согласно теореме 5.3.1 разрешимость обратной задачи (5.3.1)–(5.3.4) будет установлена, если докажем существование решения уравнения (5.3.7).

Покажем, что оператор A_2 ограничен в $L_2(\Omega)$, причем для любого $f \in L_2(\Omega)$ справедлива оценка

$$\|A_2 f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant m_3\|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{5.3.12}$$

с константой m_3 из условия (5.3.10). Действительно, из определения оператора A_2 следует, что

$$\|A_2 f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta^{-1}\|u_t(T,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \tag{5.3.13}$$

для каждого $f \in L_2(\Omega)$. Подставляя функцию f в уравнение (5.3.1), получаем прямую задачу (5.3.1)–(5.3.3) (см. (5.2.10)–(5.2.12), которая имеет единственное решение $u \in V$. Как было установлено при доказательстве теоремы 5.2.2, функция u удовлетворяет неравенству (5.2.36). Так как $u \in V$, это неравенство справедливо при $t = T$:

$$\|u_t(T, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant m_2(T)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{5.3.14}$$

Здесь функция $m_2(t)$ задается формулой (5.2.26). Оценка (5.3.12) вытекает непосредственно из (5.3.13) и (5.3.14).

Поскольку $m_3 < 1$, оператор A_2 является сжимающим отображением в $L_2(\Omega)$. Поэтому согласно принципу сжимающих отображений у оператора A_2 есть единственная неподвижная точка. Следовательно, уравнение (5.3.7) имеет единственное решение, для которого в силу (5.3.12) верна оценка (5.3.10). Тогда утверждение (1) теоремы 5.3.1 гарантирует существование решения $\{u, f\}$ обратной задачи (5.3.1)–(5.3.4). Из (5.2.18) и (5.3.10) вытекает оценка (5.3.11) для u .

Докажем единственность найденного решения задачи (5.3.1)–(5.3.4). Предположим, что эта задача имеет два различных решения $\{u_1, f_1\}$ и $\{u_2, f_2\}$. Функция f_1 не может совпадать с f_2, поскольку их равенство немедленно повлекло бы за собой совпадение функций u_1 и u_2 ввиду единственности решения прямой задачи (5.3.1)–(5.3.3). Согласно утверждению (2) теоремы 5.3.1 функции f_1 и f_2 являются решениями операторного уравнения (5.3.7), что противоречит однозначной разрешимости данного уравнения, установленной выше. Значит, предположение о неединственности решения обратной задачи (5.3.1)–(5.3.4) неверно. Теорема доказана.

Теорема 5.3.2 гарантирует однозначную разрешимость обратной задачи (5.3.1)–(5.3.4) при условии, что исходные данные отвечают неравенству (5.3.10), т. е. "в малом". Следующий пример показывает, что множество таких данных не пусто.

Пример 1. Пусть функция $h = t$ и $T\alpha^{1/2} > 1$. Непосредственные вычисления показывают, что в этом случае $\delta = T$ и

$$m_3 = \frac{1}{T\alpha^{1/2}}(1 - \exp\{-\alpha T\})^{1/2} < 1.$$

В данном случае теорема 5.3.2 гарантирует однозначную разрешимость обратной задачи (5.3.1)–(5.3.4) для любого $T > 0$.

5.4. Задача идентификации функции источника в случае неизвестного коэффициента, зависящего от времени

Перейдем к изучению обратной задачи отыскания неизвестной функции f, зависящей от t, в уравнении (5.2.1). Сведем обратную задачу к некоторому уравнению Вольтерра второго рода. Это позволяет получить результаты, которые в дальнейшем будут приведены без доказательства. Рассмотрим один тип условия переопределения – интегральное. Физически интегральное переопределение возникает, когда функция u измеряется датчиком, показывающим некоторое усреднение u по области Ω в момент $t \in [0,T]$.

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим задачу отыскания пары функций $\{u, f\}$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t - \Delta u = f(t)h(t,x), \qquad (t,x) \in Q_T, \tag{5.4.1}$$

$$u(0,x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{5.4.2}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in S_T, \tag{5.4.3}$$

$$\int\limits_{\Omega} u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{5.4.4}$$

где h, ω и φ заданные функции.

Определение 5.4.1. *Пара функций $\{u, f\}$ называется обобщенным решением обратной задачи (5.4.1)–(5.4.4), если $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, $f \in L_2(0,T)$ и выполняются соотношения (5.4.1)–(5.4.4).*

Будем предполагать, что

$$\varphi(x) \in W_2^1(0,T), \quad h \in C([0,T]; L_2(Q_T)), \quad \omega \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{5.4.5}$$

$$\left| \int\limits_{\Omega} h(t,x)\omega(x)dx \right| \geq g^* = const > 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.4.6}$$

Запишем операторное уравнение Вольтерра второго рода для функции f в пространстве $L_2(\Omega)$. Умножим уравнение (5.4.1) на $\omega(x)$ и проинтегрируем по x на Ω:

$$\int\limits_{\Omega} u_t(t,x)\omega(x)dx - \int\limits_{\Omega} (\Delta u)(t,x)\omega(x)dx = f(t) \int\limits_{\Omega} h(t,x)\omega(x)dx. \tag{5.4.7}$$

Проинтегрируем второе слагаемое дважды по частям с учетом (5.4.3), (5.4.5) и выразим из полученного уравнения $f(t)$. Поскольку в силу (5.4.4)

$$\int\limits_{\Omega} u_t(t,x)\omega(x)dx = \phi'(t),$$

получим, что

$$f(t) = \frac{1}{h_2(t)} \int\limits_{\Omega} u(t,x)(\Delta\omega)(x)dx + \psi_2(t). \tag{5.4.8}$$

Здесь

$$h_2(t) = \int\limits_{\Omega} h(t,x)\omega(x)dx, \qquad \psi_2(t) = \frac{\phi'(t)}{h_2(t)}.$$

Введем линейный оператор A_3, действующий в пространстве $L_2(0,T)$ по следующему правилу. Зададим элемент $f \in L_2(0,T)$ и подставим его в (5.4.1). Найдем решение полученной прямой задачи (5.4.1)–(5.4.3) и вычислим интеграл

$$\int\limits_{\Omega} u(t,x)(\Delta\omega)(x)dx.$$

Тем самым определим элемент

$$(A_3 f)(t) = \frac{1}{h_2(t)} \int\limits_{\Omega} u(t,x)(\Delta\omega)(x)dx$$

из пространства $L_2(0,T)$. Рассмотрим (5.4.8) как операторное уравнение Вольтерра второго рода:

$$f = A_3 f + \psi_2. \tag{5.4.9}$$

Между разрешимостью этого уравнения и обратной задачи (5.4.1)–(5.4.4) существует связь, подобная той, которая установлена в теоремах 5.2.1 и 5.3.1 для задач (5.2.10)–(5.2.13) и (5.3.1)–(5.3.4) соответственно.

Теорема 5.4.1. *Пусть входные данные задачи (5.4.1)–(5.4.4) удовлетворяют условиям (5.4.5)–(5.4.6). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если линейное уравнение* (5.4.9) *разрешимо и выполняется условие согласования*

$$\phi(0) = 0, \tag{5.4.10}$$

то разрешима и задача (5.4.1)–(5.4.4)*;*

(2) *если существует решение* u, f *обратной задачи* (5.4.1)–(5.4.4), *то функция* f *является решением уравнения* (5.4.9).

Следующая теорема дает достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи (5.4.1)–(5.4.4).

Теорема 5.4.2. *Пусть входные данные задачи (5.4.1)−(5.4.4) удовлетворяют условиям (5.4.5)−(5.4.6) и выполняется условие согласования (5.4.10). Тогда существует решение* $\{u, f\}$ *обратной задачи (5.4.1)−(5.4.4),* $u \in W^{2,1}_{2,0}(Q_T)$, $f \in L_2(0,T)$, *и это решение единственно.*

Рассмотрен один из методов исследования обратных задач на примере линейных задач с неизвестными функциями источника для параболического уравнения. Этот метод применим и к другим обратным задачам для различных типов уравнений в частных производных, например к задачам отыскания неизвестных коэффициентов при искомой функции и при ее производных [74].

Глава 6. Стабилизация и устойчивость решения

6.1. Поведение при $t \to +\infty$ решения задачи идентификации функции источника в уравнениии теплопроводности

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_n,\ z \in E_1\}$ задачу Коши

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) u_{x_i x_j} + a(t) u_{zz} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t) u_{x_i} + c(t) u + \lambda(t,x) f(t,x,z), \quad (6.1.1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),\ x \in E_n,\ z \in E_1,. \quad (6.1.2)$$

Функции $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$, $(i,j = 1\ldots n)$, $a(t)$, $c(t)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в $[0,T]$, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно. Коэффициенты $a_{ij}(t)$ удовлетворяют условию $0 < \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\xi_i\xi_j$ $\forall t \in (0,T]$ для любых отличных от нуля $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n) \in E_n$, $a(t) > 0$ в $[0,T]$.

Функция $\lambda(t,x)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (6.1.1), (6.1.2), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t,x,0) = \varphi(t,x),\ t \in [0,T], x \in E_n, \quad (6.1.3)$$

в предположении выполнения условия согласования

$$u_0(x,0) = \varphi(0,x). \quad (6.1.4)$$

Пусть функция $f(t,x,z)$ такова, что при всех $t \in [0,T], x \in E_n$ выполняется условие

$$|f(t,x,0)| \geq \delta > 0, \quad (6.1.5)$$

где δ — некоторая фиксированная постоянная.

Приведем исходную обратную задачу к некоторой прямой вспомогательной задаче. Использовав условие переопределения (6.1.3), найдем выражение для неизвестного коэффициента $\lambda(t,x)$:

$$\lambda(t,x) = \frac{\gamma(t,x) - a(t) u_{zz}(t,x,0)}{f(t,x,0)} \quad (6.1.6)$$

и подставим его в (6.1.1). Получим уравнение

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) u_{x_i x_j} + a(t) u_{zz} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t) u_{x_i} + c(t) u + \\ + \frac{\gamma(t,x) - a(t) u_{zz}(t,x,0)}{f(t,x,0)} f(t,x,z). \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Здесь $\gamma(t,x)=\varphi_t(t,x)-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)\varphi_{x_ix_j}(t,x)-\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(t)\varphi_{x_i}(t,x)-c(t)\varphi(t,x)$ – известная функция.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение и при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$

$$
\begin{gathered}
|a_{ij}(t)|+|b_i(t)|+|a(t)|+|c(t)|+|D_x^\alpha\gamma(t,x)|+\\
+\left|\frac{\partial}{\partial z^k}D_x^\alpha f(t,x,z)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial z^k}D_x^\alpha u_0(x,z)\right|\leqslant C,\\
|\alpha|\leqslant 4,\ k=0,1,\dots,4.
\end{gathered}
\tag{6.1.8}
$$

Здесь

$$
D_x^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n.
$$

Для доказательства разрешимости вспомогательной прямой задачи (6.1.7), (6.1.2) воспользуемся методом слабой аппроксимации, расщепив задачу на три дробных шага:

$$
u_t^\tau=3\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)u^\tau_{x_ix_j}(t,x,z)+3a(t)u_{zz}(t,x,z)+3\sum_{i=1}^{n}b_i(t)u_{x_i}(t,x,z),\tag{6.1.9}
$$

$$
j\tau<t\leqslant(j+1/3)\,\tau,
$$

$$
u_t^\tau=3c(t)u^\tau(t,x,z),\tag{6.1.10}
$$

$$
(j+1/3)\,\tau<t\leqslant(j+2/3)\,\tau,
$$

$$
u_t^\tau=3\frac{\gamma(t,x)-a(t)u^\tau_{zz}(t,x,0)}{f(t,x,0)}f(t,x,z),\tag{6.1.11}
$$

$$
(j+2/3)\,\tau<t\leqslant(j+1)\,\tau,
$$

$$
u^\tau(0,x,z)=u_0(x,z),\quad x,z\in E_{n+1}.\tag{6.1.12}
$$

Здесь $j=0,1,\dots,N-1;\tau N=T$.

Введем следующие обозначения:

$$
U^\tau(t)=\sum_{k=0}^{4}U_k^\tau(t),\tag{6.1.13}
$$

$$
U_k^\tau(t)=\sup_{0\leqslant\xi\leqslant t}\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi,x,z)\right|,\tag{6.1.14}
$$

$$U_k^\tau(0) = \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u_0(x,z)\right|. \tag{6.1.15}$$

Получим априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\{u^\tau(t,x,z)\}$ задачи (6.1.9)–(6.1.12) в классе непрерывных функций.

Рассмотрим нулевой целый шаг по времени $(0,\tau]$.

На первом дробном шаге, дифференцируя (6.1.9), (6.1.12) по z от одного до четырех раз, в силу принципа максимума получаем

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(0), \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}. \tag{6.1.16}$$

На втором дробном шаге имеем линейное однородное уравнение первого порядка с начальным условием $u^\tau(\tau/3,x,z)$. Решив данную задачу Коши, получим оценку

$$|u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau(\tau/3,x,z)| \exp\left(3\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} c(\eta)\,d\eta\right),\ \frac{\tau}{3} < \xi \leqslant t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{6.1.17}$$

Учитывая ограниченность коэффициента $c(t)$, получаем

$$|u^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\tau/3,x,z)|\, e^{C\tau}, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{6.1.18}$$

Дифференцируя (6.1.10) по z до 4 порядка, с помощью аналогичных рассуждений и оценки (6.1.16) получаем

$$|U^\tau(t)| \leqslant U^\tau(0)e^{C\tau}, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{6.1.19}$$

На третьем дробном шаге, проинтегрировав уравнение по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до t, $t \in \left(\frac{2\tau}{3},\tau\right]$, получим

$$u^\tau(\xi,x,z) = u^\tau(2\tau/3,x,z) + 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \frac{\gamma(\eta,x) - a(\eta)u^\tau(\eta,x,0)}{f(\eta,x,0)} f(\eta,x,z)\,d\eta.$$

Возьмем $\sup\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t}\ \sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}$ сначала от правой, а затем от левой части последнего выражения. С учетом обозначений (6.1.13)–(6.1.15) получим

$$U_0^\tau(t) \leqslant U_0^\tau(2\tau/3) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (U_0^\tau(\eta)+1)\,d\eta.$$

Дифференцируя уравнение (6.1.11) по z до 4 порядка и повторяя рассуждения, получаем неравенства

$$U_k^\tau(t) \leqslant U_k^\tau(2\tau/3) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}\tau}^{t} (U_k^\tau(\eta)+1)\,d\eta, \qquad k=0,\dots,4.$$

Суммируя данные неравенства, получаем

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(2\tau/3) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (U^\tau(\eta)+1)\,d\eta, \quad \frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau,$$

Учитывая (6.1.19), приходим к неравенству

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(0) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (U^\tau(\eta)+1)\,d\eta.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла, получаем

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(0)e^{C(t-\frac{2\tau}{3})} + e^{C(t-\frac{2\tau}{3})} - 1.$$

Разложим последнее слагаемое в правой части неравенства в ряд Тейлора в предположении малости τ.

$$\begin{aligned}\left(e^{3C(t-2\tau/3)}-1\right) \leqslant \left(e^{C\tau}-1\right) &= \\ &= \left(-1+1+C\tau+\frac{1}{2!}\,(C\tau)^2+\dots\right.\\ &\left.\dots+\frac{1}{n!}\,(C\tau)^n+\dots\right) \leqslant \frac{C\tau}{1-C\tau} \leqslant 2C\tau.\end{aligned}$$

Таким образом, на нулевом целом шаге получаем оценку

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(0)e^{C\tau} + 2C\tau, \quad 0 < t \leqslant \tau. \tag{6.1.20}$$

Проводя аналогичные рассуждения на втором целом шаге, приходим к неравенству

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\tau)e^{C\tau} + 2C\tau, \quad \tau < t \leqslant 2\tau. \tag{6.1.21}$$

Учитывая (6.1.20),

$$U^\tau(t) \leqslant (U^\tau(0)e^{C\tau}+2C\tau)e^{C_4\tau}+2C\tau = U^\tau(0)e^{2C\tau}+2C\tau e^{C_4\tau}+2C\tau,\ \tau < t \leqslant 2\tau.$$

Продолжая расуждения, на n-ом целом шаге получаем

$$\begin{aligned}U^\tau(t) \leqslant & U^\tau(0)e^{nC\tau} + 2C_3\tau\big(1 + e^{C\tau} + e^{2C\tau} + \dots + e^{(n-1)C\tau}\big) \leqslant \\ \leqslant & U^\tau(0)e^{nC\tau} + 2Cn\tau e^{(n-1)C\tau} \leqslant U^\tau(0)e^{NC\tau} + 2CN\tau e^{NC\tau} = \\ = & U^\tau(0)e^{CT} + 2CTe^{CT} \leqslant C, \quad (n-1)\tau < t \leqslant n\tau.\end{aligned}$$

Таким образом, в $G_{[0,T]}$ равномерно по τ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^k u(t,x,z)}{\partial z^k}\right| \leqslant C, \quad k = 0\dots 4. \tag{6.1.22}$$

Продифференцируем задачу (6.1.9)–(6.1.12) по x_i и обозначим $v^\tau = u^\tau_{x_i}$. Получим

$$v^\tau_t = 3\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)v^\tau_{x_ix_j}(t,x,z) + 3\sum_{i=1}^{n} b_i(t)v^\tau_{x_i}(t,x,z), \tag{6.1.23}$$

$$j\tau < t \leqslant (j+1/3)\,\tau,$$

$$v^\tau_t = 3c(t)v^\tau(t,x,z), \tag{6.1.24}$$

$$(j+1/3)\,\tau < t \leqslant (j+2/3)\,\tau,$$

$$v^\tau_t = 3\frac{\gamma_{x_i}(t,x,z) - a(t)v^\tau_{zz}(t,x,0)}{f(t,x,0)}f(t,x,z) + \Psi(t,x,z), \tag{6.1.25}$$

$$(j+2/3)\,\tau < t \leqslant (j+1)\,\tau,$$

$$v^\tau(0,x,z) = \frac{\partial u_0(x,z)}{\partial x_i}, \quad x,z \in E_{n+1}. \tag{6.1.26}$$

Здесь $\Psi^\tau(t,x,z) = 3\big(\gamma(t,x) - a(t)u^\tau_{zz}(t,x,0)\big)\left(\dfrac{f(t,x,z)}{f(t,x,0)}\right)_{x_i}$. Заметим, что в силу (6.1.8) и (6.1.22) функция $\Psi^\tau(t,x,z)$ ограничена вместе со своими производными по z до 2 порядка.

Введем обозначения

$$V^\tau(t) = \sum_{k=0}^{4} V^\tau_k(t), \tag{6.1.27}$$

$$V^\tau_k(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t}\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}v^\tau(\xi,x,z)\right|, \tag{6.1.28}$$

$$V^\tau_k(0) = \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}v_0(x,z)\right|. \tag{6.1.29}$$

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге, дифференцируя (6.1.23), (6.1.26) по z до 2 порядка, используя теорему принципа максимума, получаем оценку

$$V^\tau(t) \leqslant V^\tau(0), \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}. \tag{6.1.30}$$

На втором дробном шаге, дифференцируя (6.1.24) по z до 2 порядка, из явного представления решений получившихся задач и оценки (6.1.30) придем к неравенству

$$|V^\tau\left(2\tau/3\right)| \leqslant V^\tau(0)e^{C\tau}. \tag{6.1.31}$$

На третьем дробном шаге, дифференцируя уравнение (6.1.25) по z до 2 порядка, затем интегрируя по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до t, $t \in \left(\frac{2\tau}{3}, \tau\right]$ и суммируя получившиеся неравенства, получаем

$$V^\tau(t) \leqslant V^\tau(\frac{2\tau}{3}) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (V^\tau(\eta) + 1)\, d\eta, \quad \frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau.$$

Учитывая (6.1.31), приходим к неравенству

$$V^\tau(t) \leqslant V^\tau(0) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (V^\tau(\eta) + 1)\, d\eta.$$

Рассуждая так же, как и при получении оценки (6.1.22), получаем, что в $G_{[0,T]}$ справедлива равномерная по τ оценка

$$\left|\frac{\partial^{k+1}u^\tau(t,x,z)}{\partial z^k \partial x_i}\right| \leqslant C, \quad k = 0\ldots 2, i = 1\ldots n. \tag{6.1.32}$$

Дифференцируя задачу (6.1.9)–(6.1.12) дважды по $x_i x_j$, $i,j = 1,\ldots n$ и обозначая $v = u_{x_i x_j}$ приходим к задаче вида (6.1.23)–(6.1.26), в которой функция

$$\begin{aligned}\Psi(t,x,z) =& 3\big(\gamma_{x_i}(t,x,z) - a(t)u^\tau_{zzx_i}(t,x,0)\big)\left(\frac{f(t,x,z)}{f(t,x,0)}\right)_{x_j} + \\ &+3\left(\big(\gamma(t,x) - a(t)u^\tau_{zz}(t,x,0)\big)\left(\frac{f(t,x,z)}{f(t,x,0)}\right)_{x_i}\right)_{x_j}\end{aligned}$$

в силу (6.1.8), (6.1.22), (6.1.32) ограничена вместе со своими производными по z до 2 порядка. Рассуждая так же, как и при получении оценки (6.1.32), получаем, что в $G_{[0,T]}$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^{k+2}u^\tau(t,x,z)}{\partial z^k \partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant C, \quad k=0\dots 2, \quad i,j=1\dots n. \tag{6.1.33}$$

Дифференцируя задачу (6.1.9)–(6.1.12) по $x_ix_jx_l$ и по $x_ix_jx_lx_m$, будем получать задачи вида (6.1.23) – (6.1.26). Рассуждая так же как и при получении предыдущих оценок, получаем, что в $G_{[0,T]}$ равномерно по τ справедливы неравенства:

$$\left|\frac{\partial^{k+3}u^\tau(t,x,z)}{\partial z^k \partial x_i \partial x_j \partial x_l}\right| \leqslant C, \quad k=0\dots 2, \quad i,j,l=1\dots n. \tag{6.1.34}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+4}u^\tau(t,x,z)}{\partial z^k \partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}\right| \leqslant C, \quad k=0\dots 2, \quad i,j,l,m=1\dots n. \tag{6.1.35}$$

Из (6.1.32)–(6.1.35) следует, что

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k=0\dots 2, |a| \leqslant 4. \tag{6.1.36}$$

Продифференцируем уравнения (6.1.9)–(6.1.11) по z. Использовав оценки (6.1.36), (6.1.22), получаем, что в $G_{[0,T]}$

$$|u^\tau_{tz}(t,x,z)| \leqslant C.$$

Дифференцируя уравнения (6.1.9)–(6.1.11) по пространственным переменным на основании оценок (6.1.22), (6.1.36) получим, что в $G_{[0,T]}$ равномерно по τ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C_5, \quad k=0,1,2; |\alpha| \leqslant 2. \tag{6.1.37}$$

Оценки (6.1.22), (6.1.36), (6.1.37) в силу теоремы Арцела гарантируют существование некоторой подпоследовательности u^{τ_k} последовательности u^τ, сходящейся вместе с производными по пространственным переменным до второго порядка включительно к некоторой функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,T]})$. На основании теоремы 2.3.1 можно доказать, что $u(t,x,z)$ есть решение задачи (6.1.7), (6.1.2) и $u(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,T]})$, При этом справедлива оценка

$$\left|\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\sum_{k=0}^{2}\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u(t,x,z)\right| \leqslant C. \tag{6.1.38}$$

Из (6.1.6), (6.1.38) следует, что пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ принадлежат классу

$$Z_{[0,T]} = \left\{ u(t,x,z), \lambda(t,x) \mid u(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,T]}),\ \lambda(t,x) \in C([0,T] \times R^n) \right\}$$

и удовлетворяет неравенству

$$|\lambda(t,x)| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z) \right| \leqslant C, \quad k = 0,1,2, \quad (t,x,z) \in G_{[0,T]}. \qquad (6.1.39)$$

Докажем, что для функции $u(t,x,z)$ справедливо условие переопределения (6.1.7). Положив в уравнении (6.1.1) $z = 0$ и обозначив $y(t,x) = u(t,x,0) - \varphi(t,x)$, придем, учитывая (6.1.4), к задаче

$$y_t = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) y_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t) y_{x_i} + c(t) y, \qquad (6.1.40)$$

$$y(0,x,z) = 0,\ x,z \in E_n,\ z \in E_1,. \qquad (6.1.41)$$

В силу принципа максимума задача (6.1.40), (6.1.41) имеет единственное решение $y(t,x,z) = 0$. Следовательно $u(t,x,0) = \varphi(t,x)$ в $G_{[0,T]}$.

Таким образом, доказано существование решения $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ задачи (6.1.1)–(6.1.3) в классе $Z_{[0,T]}$.

Исследуем теперь поведение решения задачи (6.1.1)–(6.1.3) в области $G_{[0,+\infty)}$ при стремлении временной переменной к бесконечности.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 6.1.1. *Пусть в $G_{[0,+\infty)}$ выполняются условия (6.1.5), (6.1.8) и имеет место неравенство*

$$c(t) \leqslant -\widetilde{A},\ \text{где}\ \widetilde{A} > \sup_{\eta \in E_1} \sup_{\substack{x \in E_n, \\ z \in E_1}} \left| \frac{a(\eta) f_{xx}(\eta,x,z)}{f(\eta,x,0)} \right|, \quad \widetilde{A} - const. \qquad (6.1.42)$$

Тогда, если

$$\int_0^{+\infty} |a(\eta)|\, d\eta + \int_0^{+\infty} |\gamma(\eta,x)|\, d\eta \leqslant C,$$

то для решения задачи (6.1.1)–(6.1.3) в $G_{[0,+\infty)}$ справедливо неравенство

$$|\lambda(t,x)| + |u(t,x,z)| \leqslant C.$$

Доказательство. Продифференцируем (6.1.9)–(6.1.12) по z дважды и обозначим $u^\tau_{zz}(t,x,z) = v^\tau(t,x,z)$. Получим задачу

$$v^\tau_t = 3\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) v^\tau_{x_i x_j}(t,x,z) + 3a(t) v_{zz}(t,x,z) + 3\sum_{i=1}^n b_i(t) v_{x_i}(t,x,z), \tag{6.1.43}$$

$$j\tau < t \leqslant (j+1/3)\,\tau,$$

$$v^\tau_t = 3c(t) v^\tau(t,x,z), \tag{6.1.44}$$

$$(j+1/3)\,\tau < t \leqslant (j+2/3)\,\tau,$$

$$v^\tau_t = 3\frac{\gamma(t,x) - a(t) v^\tau_{zz}(t,x,0)}{f(t,x,0)} f_{zz}(t,x,z), \tag{6.1.45}$$

$$(j+2/3)\,\tau < t \leqslant (j+1)\,\tau,$$

$$v^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \quad x,z \in E_{n+1}. \tag{6.1.46}$$

Рассмотрим произвольный j-й целый временной шаг. На первом дробном шаге в силу принципа максимума получим оценку

$$|v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(j\tau,x,z)|\,, \quad j\tau < \xi \leqslant \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau. \tag{6.1.47}$$

На втором дробном шаге имеем линейное однородное уравнение первого порядка с начальным условием $v^\tau\left(\left(j+\frac{1}{3}\right)\tau, x, z\right)$. На основании явного представления решения задачи и оценки (6.1.47) получим

$$|v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(j\tau,x,z)| \exp\Big(3\int\limits_{(j+\frac{1}{3})\tau}^{t} c(\eta)\,d\eta\Big),\ \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < \xi \leqslant t,$$

$$\left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \leqslant \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau. \tag{6.1.48}$$

Из (6.1.48) в силу (6.1.42)

$$|v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(j\tau,x,z)|\, e^{-3\widetilde{A}(t-\frac{\tau}{3})},$$

$$\left|v^\tau\left(\left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau, x, z\right)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(j\tau,x,z)|\, e^{-\widetilde{A}\tau}. \tag{6.1.49}$$

На третьем дробном шаге, проинтегрировав уравнение по временной переменной в пределах от $(j+\frac{2}{3})\tau$ до ξ, получим равенство

$$v^\tau(\xi,x,z) = v^\tau\left(\left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau,x,z\right) + \\ +3\int\limits_{(j+\frac{2}{3})\tau}^{\xi} \frac{\gamma(\eta,x)-a(\eta)v^\tau(\eta,x,0)}{f(\eta,x,0)} f_{zz}(\eta,x,z)\,d\eta.$$

В силу (6.1.42), (6.1.49)

$$\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(j\tau,x,z)|\, e^{-\widetilde{A}\tau} + \\ +3\int\limits_{(j+\frac{2}{3})\tau}^{t} \widetilde{C_2}\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\eta,x,z)| + \widetilde{C_1}\,d\eta,$$

$$\left(j+\frac{2}{3}\right)\tau < \xi \leqslant t,\ \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \leqslant (j+1)\tau,$$

где $\widetilde{C_2} = \sup\limits_{\eta\in E_1}\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}\left|\dfrac{a(\eta)f_{zz}(\eta,x,z)}{f(\eta,x,0)}\right|$, $\widetilde{C_1} = \sup\limits_{\eta\in E_1}\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}\left|\dfrac{\gamma(\eta,x)f_{zz}(\eta,x,z)}{f(\eta,x,0)}\right|$.

Применяя к данному неравенству лемму Гронуолла, получаем

$$\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(j\tau,x,z)|\, e^{-\widetilde{A}\tau} e^{3\widetilde{C_2}(t-(j+\frac{2}{3})\tau)} + \\ +\frac{\widetilde{C_1}}{\widetilde{C_2}}\left(e^{3\widetilde{C_2}(t-(j+\frac{2}{3})\tau)}-1\right), \qquad \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau < \xi \leqslant t.$$

Разложим последнее слагаемое в правой части неравенства в ряд Тейлора в предположении малости τ.

$$\frac{\widetilde{C_1}}{\widetilde{C_2}}\left(e^{3\widetilde{C_2}(t-(j+\frac{2}{3})\tau)}-1\right) \leqslant \frac{\widetilde{C_1}}{\widetilde{C_2}}\left(e^{3\widetilde{C_2}\tau}-1\right) = \\ = \frac{\widetilde{C_1}}{\widetilde{C_2}}\Big(-1+1+\widetilde{C_2}\tau + \frac{1}{2!}\left(\widetilde{C_2}\tau\right)^2 + \ldots \\ \cdots + \frac{1}{n!}\left(\widetilde{C_2}\tau\right)^n + \ldots\Big) \leqslant \frac{\widetilde{C_1}}{\widetilde{C_2}}\frac{\widetilde{C_2}\tau}{1-\widetilde{C_2}\tau} \leqslant 2\widetilde{C_1}\tau.$$

Отсюда при $\xi \in \left((j+\frac{2}{3})\tau, t\right]$, $t \in \left((j+\frac{2}{3})\tau, (j+1)\tau\right]$,

$$\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(j\tau,x,z)|\, e^{-\widetilde{A}\tau} e^{3\widetilde{C_2}(t-(j+\frac{2}{3})\tau)} + 2\widetilde{C_1}\tau.$$

Через конечное число шагов

$$\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^2 u_0(x,z)}{\partial z^2}\right| e^{(\widetilde{C_2}-\widetilde{A})T} + 2\widetilde{C_1}\tau \left(1 + e^{(\widetilde{C_2}-\widetilde{A})\tau} + \ldots \right.$$
$$\left. \cdots + e^{(\widetilde{C_2}-\widetilde{A})(N-1)\tau}\right).$$

В силу (6.1.42) получим

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(t,x,z)| &\leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^2 u_0(x,z)}{\partial z^2}\right| + \frac{2\widetilde{C_1}\tau}{1-e^{(\widetilde{C_2}-\widetilde{A})\tau}} \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^2 u_0(x,z)}{\partial z^2}\right| + \frac{2\widetilde{C_1}}{\widetilde{A}-\widetilde{C_2}} = D. \end{aligned} \tag{6.1.50}$$

Вернемся к расщепленной задаче (6.1.9)–(6.1.12) и рассмотрим j-й целый временной шаг. На первом дробном шаге решения оцениваются на основе принципа максимума, на втором дробном шаге можно выписать и оценить решение в явном виде. На третьем дробном шаге, используя оценку (6.1.50), получаем соотношение

$$\begin{aligned} |u^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-(j+1)\widetilde{A}\tau} + \\ + 3\sum_{k=0}^{j} e^{-(j-k)\widetilde{A}\tau} \int\limits_{(k+\frac{2}{3})\tau}^{(k+1)\tau} \sup_{x\in E_n} \frac{|\gamma(\eta,x)| + |a(\eta)|D}{|f(\eta,x,0)|} |f(\eta,x,z)|\, d\eta. \end{aligned} \tag{6.1.51}$$

Возьмем теперь $j = N-1$ и обозначим за D_1 константу такую, что $|f(t,x,z)| \leqslant D_1$ при $(t,x,z) \in G_{[0,+\infty)}$. Тогда

$$\begin{aligned} |u^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-T\widetilde{A}} + \\ + 3\frac{D_1}{\delta} \sum_{k=0}^{j} e^{-(N-1-k)\widetilde{A}\tau} \int\limits_{(k+\frac{2}{3})\tau}^{(k+1)\tau} |\gamma(\eta,x)| + |a(\eta)|D\, d\eta, \end{aligned}$$

$$|u^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)| + 3\frac{D_1}{\delta} \int\limits_0^T \sup_{x\in E_n} |\gamma(\eta,x)| + |a(\eta)|D\, d\eta,$$

откуда в $G_{[0,+\infty)}$ справедливо

$$|u^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)| + 3\frac{D_1}{\delta}\int\limits_0^{+\infty} \sup_{x\in E_n} |\gamma(\eta,x)| + |a(\eta)|D\,d\eta = C.$$

Поскольку ранее доказали, что при любом фиксированном $T > 0$ при стремлении параметра τ к нулю имеет место равномерная в $G_{[0,T]}$ сходимость подпоследовательности u^{τ_k} последовательности u^τ решений задачи (6.1.9)–(6.1.12) вместе с производными по пространственным переменным до второго порядка включительно к решению $u(t,x,z)$ задачи (6.1.7), (6.1.2), то

$$|u(t,x,z)| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,+\infty)}. \tag{6.1.52}$$

Поскольку $\lambda(t,x)$ и $u(t,x,z)$ связаны соотношением (6.1.6), то из (6.1.52) следует справедливость утверждения теоремы. Теорема 6.1.1 доказана.

Докажем теорему о стабилизации решения.

Теорема 6.1.2. *Пусть в $G_{[0,+\infty)}$ выполняются условия (6.1.5), (6.1.8), (6.1.42) и имеют место следующие неравенства:*

$$|a(t)| \leqslant \frac{Q_1}{1+t^p},\ p = const > 1,\ Q_1 = const > 0, \tag{6.1.53}$$

$$|\gamma(t,x)| \leqslant \frac{Q_2}{1+t^q},\ q = const > 1,\ Q_2 = const > 0. \tag{6.1.54}$$

Тогда для решения задачи (6.1.1)–(6.1.3) в $G_{[0,+\infty)}$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} \big(\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u(t,x,z)| + \sup_{x\in E_n} |\lambda(t,x)| \big) = 0.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что на третьем дробном шаге j-го целого временного шага выполнено неравенство (6.1.51). Используя (6.1.5), можем переписать данное неравенство в следующем виде:

$$|u^\tau| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-(j+1)\widetilde{A}\tau} +$$

$$+3\frac{D_1}{\delta}\sum_{k=0}^{j} e^{-(j-k)\widetilde{A}\tau} \int\limits_{(k+\frac{2}{3})\tau}^{(k+1)\tau} \sup_{x\in E_1} |\gamma(\eta,x)| + |a(\eta)|D\,d\eta.$$

Из (6.1.53), (6.1.54) следует

$$|u^\tau| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-(j+1)\widetilde{A}\tau} + 3\frac{D_1}{\delta}\sum_{k=0}^{j} e^{-(j-k)\widetilde{A}\tau} \int\limits_{(k+\frac{2}{3})\tau}^{(k+1)\tau} \frac{DQ_1}{1+\eta^p} + \frac{Q_2}{1+\eta^q}\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-(j+1)\widetilde{A}\tau} + Q\sum_{k=0}^{j} e^{-(j-k)\widetilde{A}\tau} \int\limits_{(k+\frac{2}{3})\tau}^{(k+1)\tau} \frac{1}{1+\eta^p} + \frac{1}{1+\eta^q}\, d\eta, \tag{6.1.55}$$

где $Q = \frac{3D_1}{\delta}\max\{DQ_1, Q_2\}$. Используя теорему о среднем несложно показать справедливость оценок

$$\phi_k^1 = Q\int\limits_{(k+\frac{2}{3})\tau}^{(k+1)\tau} \frac{1}{1+\eta^p}\, d\eta \leqslant \frac{Q\tau}{1+(k\tau)^p}, \quad \phi_k^2 = Q\int\limits_{(k+\frac{2}{3})\tau}^{(k+1)\tau} \frac{1}{1+\eta^q}\, d\eta \leqslant \frac{Q\tau}{1+(k\tau)^q}.$$

Учитывая эти неравенства, можем переписать (6.1.55), выделяя $\left[\frac{j}{2}\right]$ членов суммы. Здесь $\left[\frac{j}{2}\right]$ — целая часть от деления j на 2. Отметим сразу следующие свойства:

$$\left[\frac{j}{2}\right]+1 \geq \frac{j}{2}, \quad \left[\frac{j}{2}\right]+1 \leqslant \frac{j}{2}+1, \quad j-\left[\frac{j}{2}\right] \leqslant \left[\frac{j}{2}\right]+1 \leqslant \frac{j}{2}+1,$$

$$j-\left[\frac{j}{2}\right] \geq \left[\frac{j}{2}\right] \geq \frac{j}{2}-1.$$

$$|u^\tau| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-(j+1)\widetilde{A}\tau} + Q\tau\sum_{k=0}^{j} e^{-(j-k)\widetilde{A}\tau}\left(\frac{1}{1+(k\tau)^p} + \frac{1}{1+(k\tau)^q}\right) =$$

$$= \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-(j+1)\widetilde{A}\tau} + Q\tau\left(e^{-j\widetilde{A}\tau} + \frac{e^{-(j-1)\widetilde{A}\tau}}{1+\tau^p} + \cdots + \frac{e^{-(j-\left[\frac{j}{2}\right])\widetilde{A}\tau}}{1+\left(\left[\frac{j}{2}\right]\tau\right)^p} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-(j-\left[\frac{j}{2}\right]-1)\widetilde{A}\tau}}{1+\left(\left(\left[\frac{j}{2}\right]+1\right)\tau\right)^p} + \cdots + \frac{1}{1+(j\tau)^p} + \Omega_2\right), \tag{6.1.56}$$

где

$$\Omega_2 = \sum_{k=0}^{j} e^{-(j-k)\widetilde{A}\tau}\frac{1}{1+(k\tau)^q}.$$

Отсюда можно получить неравенство

$$|u^\tau| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-(j+1)\widetilde{A}\tau} +$$
$$+ Q\tau \left(e^{-(j-\left[\frac{j}{2}\right])\widetilde{A}\tau} \left(\left[\frac{j}{2}\right] + 1 \right) + \frac{j - \left[\frac{j}{2}\right]}{1 + \left(\left(\left[\frac{j}{2}\right]+1\right)\tau\right)^p} + \Omega_2 \right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x)|\, e^{-(j+1)\widetilde{A}\tau} + Q\tau \left(e^{-\left(\frac{j}{2}-1\right)\widetilde{A}\tau} \left(\frac{j}{2} + 1 \right) + \frac{\frac{j}{2}+1}{1+\left(\frac{j}{2}\tau\right)^p} + \Omega_2 \right).$$

Нетрудно видеть, что на третьем дробном шаге $N-1$ целого временного шага, т. е. при $t \in \left(T - \frac{\tau}{3}, T\right]$, будет выполнено неравенство

$$|u^\tau| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|\, e^{-\widetilde{A}T\tau} + Q\Big(e^{-\left(\frac{T}{2}-\tau\right)\widetilde{A}} \left(\tfrac{T}{2}+\tau\right) +$$
$$+ \frac{\frac{T}{2}+\tau}{1+\left(\frac{T}{2}\right)^p} + e^{-\left(\frac{T}{2}-\tau\right)\widetilde{A}} \left(\tfrac{T}{2}+\tau\right) + \frac{\frac{T}{2}+\tau}{1+\left(\frac{T}{2}\right)^q} \Big). \tag{6.1.57}$$

Очевидно, что стоящее справа выражение стремится к нулю при $T \to +\infty$, откуда следует, что $\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Поскольку ранее было доказано, что при любом фиксированном $T > 0$ при стремлении параметра τ к нулю имеет место равномерная в $G_{[0,T]}$ сходимость подпоследовательности u^{τ_k} последовательности u^τ решений задачи (6.1.9)–(6.1.12) вместе с производными по x до второго порядка включительно к решению $u(t,x,z)$ задачи (6.1.7), (6.1.2), то

$$\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u(t,x,z)| \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{6.1.58}$$

Поскольку $\lambda(t,x)$ и $u(t,x,z)$ связаны соотношением (6.1.6), то из (6.1.58) и условий (6.1.5), (6.1.8), (6.1.50), (6.1.53), (6.1.54) следует, что

$$|\lambda(t,x)| \leqslant \frac{|\gamma(t,x)| + |a(t)||u_{xx}(t,x,0)|}{\delta} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Q_2}{\delta(1+t^q)} + \frac{Q_1 D}{\delta(1+t^p)} \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Утверждение теоремы доказано.

6.2. Оценка устойчивости решения задачи идентификации функции источника по входным данным

В полосе $G_{[0,T]} = \big\{(t,x,z)\,|\,0 \leqslant t \leqslant T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t,x,z)\lambda(t,x,z),\ t \in (0,T),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \qquad (6.2.1)$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \qquad (6.2.2)$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ нужно определить также функцию

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z). \qquad (6.2.3)$$

Пусть заданы условия переопределения:

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \qquad (6.2.4)$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z), \qquad (6.2.5)$$

где α, β—некоторые фиксированные постоянные.

Считаем выполнеными условия согласования:

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x), \qquad (6.2.6)$$

$$u_0(\beta,z) = \psi(0,z), \qquad (6.2.7)$$

$$\varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha), \qquad (6.2.8)$$

и условия на функцию $f(t,x,z)$:

$$\big|f(t,\beta,z)\big| \geq \delta_1 > 0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big| \geq \delta_2 > 0, \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2. \qquad (6.2.9)$$

Здесь δ_1, δ_2 — некоторые постоянные.

Относительно входных данных предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (6.2.10), и удовлетворяют ему.

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| + \\ &\qquad + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad k_1, k_2 = 0,1,\ldots,6. \end{aligned} \qquad (6.2.10)$$

Рассмотрим два набора входных данных, удовлетворяющих указанным выше условиям. Пусть существуют решения $u_i(t,x,z)$, $\lambda^i(t,x,z)$, $i = 1,2$, соответствующие этим входным данным, в классе

$$Z(T) = \Big\{ u(t,x,z), \lambda(t,x,z) \;\Big|\; u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big), \lambda(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big) \Big\},$$

где

$$C^{1,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right) = \Big\{ u(t,x,z) \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial t}u, \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u \in C\left(G_{[0,T]}\right), \\ k_1 = 0,1,\ldots,l_1, k_2 = 0,1,\ldots,l_2 \Big\}.$$

Пусть для них справедливы оценки

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_i(t,x,z)\right| + \sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda_i(t,x,z)\right| \leqslant C. \quad (6.2.11)$$

Рассмотрим в $G_{[0,T]}$ две задачи Коши:

$$\begin{cases} u^i_t = u^i_{xx} + u^i_{zz} + f^i(t,x,z)\lambda^i(t,x,z), \\ \lambda^i(t,x,z) = \lambda^i_1(t,x) + \lambda^i_2(t,z), \\ u^i(0,x,z) = u^i_0(x,z), \\ u^i(t,x,\alpha) = \varphi^i(t,x), \\ u^i(t,\beta,z) = \psi^i(t,z), \qquad\qquad i = 1,2, \end{cases}$$

где α, β—некоторые фиксированные постоянные.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &U = u^1 - u^2, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \lambda^1_1 - \lambda^2_1 + \lambda^1_2 - \lambda^2_2, \\ &F = f^1 - f^2, \quad U_0 = u^1_0 - u^2_0, \quad \Phi = \varphi^1 - \varphi^2, \quad \Psi = \psi^1 - \psi^2. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Нетрудно получить, что функции U, Λ являются решением задачи

$$U_t = U_{xx} + U_{zz} + F\lambda^1 + f^2\Lambda, \quad (6.2.13)$$

$$U(0,x,z) = U_0(x,z), \quad (6.2.14)$$

$$U(t,x,\alpha) = \Phi(t,x), \quad (6.2.15)$$

$$U(t,\beta,z) = \Psi(t,z). \quad (6.2.16)$$

Полагая в уравнении (6.2.13) $x = \beta, z = \alpha$ и используя (6.2.15) и (6.2.16), получаем выражение для неизвестного коэффициента

$$\begin{aligned}\Lambda(t,x,z) = &-\frac{U_{xx}(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} - \frac{U_{zz}(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} + \\ &+\frac{\Psi_t(t,z) - \Psi_{zz}(t,z) - F(t,\beta,z)\lambda^1(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} + \\ &+\frac{\Phi_t(t,x) - \Phi_{xx}(t,x) - F(t,x,\alpha)\lambda^1(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} - \\ &-\frac{\Psi_t(t,\alpha) - \Phi_{xx}(t,\beta) - \Psi_{zz}(t,\alpha) + F(t,\beta,\alpha)\lambda^1(t,\beta,\alpha)}{f^2(t,\beta,\alpha)}.\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

Подставляя выражение (6.2.17) в уравнение (6.2.13), получаем задачу Коши для уравнения

$$\begin{aligned}U_t(t,x,z) = &U_{xx}(t,x,z) + U_{zz}(t,x,z) + F(t,x,z)\lambda^1(t,x,z) + \\ &+f^2(t,x,z)\Bigg(-\frac{U_{xx}(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} - \frac{U_{zz}(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} + \\ &+\frac{\Psi_t(t,z) - \Psi_{zz}(t,z) - F(t,\beta,z)\lambda^1(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} + \\ &+\frac{\Phi_t(t,x) - \Phi_{xx}(t,x) - F(t,x,\alpha)\lambda^1(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} - \\ &-\frac{\Psi_t(t,\alpha) - \Phi_{xx}(t,\beta) - \Psi_{zz}(t,\alpha) + F(t,\beta,\alpha)\lambda^1(t,\beta,\alpha)}{f^2(t,\beta,\alpha)}\Bigg)\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

с начальным условием (6.2.14).

Расщепим уравнение (6.2.18) на пять дробных шагов и линеаризуем сдвигом по времени на $\frac{\tau}{5}$ в членах, содержащих следы неизвестных функций:

$$U_t^\tau = 5\left(U_{xx}^\tau + U_{zz}^\tau\right), \; n\tau < t \leqslant \left(n + \tfrac{1}{5}\right)\tau, \tag{6.2.19}$$

$$U_t^\tau = -5A_1(t,x,z)U_{xx}^\tau\left(t - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right), \; \left(n + \tfrac{1}{5}\right)\tau < t \leqslant \left(n + \tfrac{2}{5}\right)\tau, \tag{6.2.20}$$

$$U_t^\tau = -5A_2(t,x,z)U_{zz}^\tau\left(t - \tfrac{\tau}{5}, x, \alpha\right), \; \left(n + \tfrac{2}{5}\right)\tau < t \leqslant \left(n + \tfrac{3}{5}\right)\tau, \tag{6.2.21}$$

$$U_t^\tau = 5F(t,x,z)\lambda^1(t,x,z), \; \left(n + \tfrac{3}{5}\right)\tau < t \leqslant \left(n + \tfrac{4}{5}\right)\tau, \tag{6.2.22}$$

$$U_t^\tau = 5K(t,x,z), \; \left(n + \tfrac{4}{5}\right)\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \tag{6.2.23}$$

$$U^\tau(0,x,z) = U_0(x,z), \qquad n = 0,1,2,\ldots,(N-1), \; N\tau = T.$$

Здесь

$$A_1(t,x,z)=\frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,\beta,z)},\ A_2(t,x,z)=\frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,x,\alpha)},\ A_3(t,x,z)=\frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,\beta,\alpha)},$$

$$K(t,x,z)=A_1(t,x,z)\Big(\Psi_t(t,z)-\Psi_{zz}(t,z)-F(t,\beta,z)\lambda^1(t,\beta,z)\Big)+$$

$$+A_2(t,x,z)\Big(\Phi_t(t,x)-\Phi_{xx}(t,x)-F(t,x,\alpha)\lambda^1(t,x,\alpha)\Big)-$$

$$-A_3(t,x,z)\Big(\Psi_t(t,\alpha)-\Phi_{xx}(t,\beta)-\Psi_{zz}(t,\alpha)+F(t,\beta,\alpha)\lambda^1(t,\beta,\alpha)\Big).$$

Далее под n-м целым шагом будем понимать полуинтервал $\big(n\tau,(n+1)\tau\big]$, а под j-м дробным шагом n-го целого шага — полуинтервал

$$\left(\left(n+\frac{j-1}{5}\right)\tau,\ \left(n+\frac{j}{5}\right)\tau\right].$$

Рассмотрим нулевой целый шаг, $n=0$.

На первом дробном шаге, $t\in\big(0,\frac{\tau}{5}\big]$, решается уравнение (6.2.19) с начальным условием (6.2.12).

Используя принцип максимума, получаем оценку

$$\big|U^\tau(\xi,x,z)\big|\leqslant\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|U_0(x,z)\big|,\ 0<\xi\leqslant t, t\in\big(0,\tfrac{\tau}{5}\big]\,. \qquad (6.2.24)$$

Дифференцируя уравнение (6.2.19) по x и по z от одного до четырех раз, получаем

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|,\ 0<\xi\leqslant t, \qquad (6.2.25)$$

$$t\in\big(0,\tfrac{\tau}{5}\big]\,,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,4.$$

Берем от неравенств (6.2.24), (6.2.25) $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{0<\xi\leqslant t}$. Суммируя, приходим к неравенству

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|,\ t\in\big(0,\tfrac{\tau}{5}\big]\,. \qquad (6.2.26)$$

На втором дробном шаге, $t \in \left(\frac{\tau}{5}, \frac{2\tau}{5}\right]$, интегрируя уравнение (6.2.20), приходим к следующему соотношению:

$$U^\tau(\xi, x, z) = U^\tau\left(\tfrac{\tau}{5}, x, z\right) - 5\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\xi} A_1(\theta, x, z) U^\tau_{xx}\left(\theta - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right) d\theta,$$

$$0 < \xi \leqslant t, t \in \left(\tfrac{\tau}{5}, \tfrac{2\tau}{5}\right].$$

Справедливо следующее неравенство

$$\begin{gathered}\left|U^\tau(\xi, x, z)\right| \leqslant \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|U^\tau\left(\tfrac{\tau}{5}, x, z\right)\right| + \\ +C\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{t} \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|U^\tau_{xx}\left(\theta - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right)\right| d\theta, \\ 0 < \xi \leqslant t, t \in \left(\tfrac{\tau}{5}, \tfrac{2\tau}{5}\right].\end{gathered} \tag{6.2.27}$$

Дифференцируя уравнение (6.2.20) по x и по z от одного до четырех раз и интегрируя его по временной переменной, получаем следующее неравенство:

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi, x, z)\right| \leqslant \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau\left(\tfrac{\tau}{5}, x, z\right)\right| + \\ +C\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{t} \sum_{i=0}^{k_2} \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} U^\tau_{xx}\left(\theta - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right)\right| d\theta, 0 < \xi \leqslant t, \\ t \in \left(\tfrac{\tau}{5}, \tfrac{2\tau}{5}\right], k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4.\end{gathered} \tag{6.2.28}$$

Берем от неравенств (6.2.27), (6.2.28) $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{5}<\xi\leqslant t}$. Суммируя, приходим к соотношению

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}\left(\tfrac{\tau}{5},x,z\right)\right|+$$

$$+C\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+C\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{5},\tfrac{2\tau}{5}\right].$$

Так как данное неравенство справедливо для всех $t\in\left(\frac{\tau}{5},\frac{2\tau}{5}\right]$, то справедлива оценка:

$$\begin{gathered}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant\\ \leqslant\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+\\ +C\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta.\end{gathered}\tag{6.2.29}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве оценки (6.2.29), получаем, что на третьем дробном шаге ($t \in \left(\frac{2\tau}{5}, \frac{3\tau}{5}\right]$) справедлива оценка

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\leqslant t} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right| +$$
$$+ C\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right| d\theta + \tag{6.2.30}$$
$$+ C\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\right| d\theta.$$

На четвертом дробном шаге, $t \in \left(\frac{3\tau}{5}, \frac{4\tau}{5}\right]$, решается уравнение (6.2.22). Проинтегрируем его по временной переменной

$$U^{\tau}(\xi,x,z) = U^{\tau}\left(\tfrac{3\tau}{5},x,z\right) + 5\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\xi} F(\theta,x,z)\lambda^1(\theta,x,z)\,d\theta,$$

$$0 < \xi \leqslant t, t \in \left(\tfrac{3\tau}{5}, \tfrac{4\tau}{5}\right].$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|U^{\tau}(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|U^{\tau}\left(\tfrac{3\tau}{5},x,z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|F(\theta,x,z)\right| d\theta, \tag{6.2.31}$$

$$0 < \xi \leqslant t, t \in \left(\tfrac{3\tau}{5}, \tfrac{4\tau}{5}\right].$$

Дифференцируем уравнение (6.2.22) по x и по z от одного до четырех раз.

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}_t(t,x,z) = 5\sum_{j=0}^{k_1} C^j_{k_1}\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}F(t,x,z)\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\lambda^1_1(t,x) +$$
$$+ 5\sum_{i=0}^{k_2} C^i_{k_2}\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i}F(t,x,z)\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\lambda^1_2(t,z),\ t \in \left(\tfrac{3\tau}{5}, \tfrac{4\tau}{5}\right], k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4. \tag{6.2.32}$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant\\
&\qquad\leqslant\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+\\
&\qquad+C\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta+\\
&\qquad+C\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\right|d\theta+\\
&\qquad+C\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\frac{4\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^{j}\partial z^{k_2}}F(\theta,x,z)\right|d\theta+\\
&\qquad+C\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\frac{4\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}}F(\theta,x,z)\right|d\theta.
\end{aligned}
\tag{6.2.33}
$$

Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
||D_1(t,x,z)||_1&=\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)\right|,\\
||D_2(x,z)||_2&=\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_2(x,z)\right|,\\
||D_3(t,z)||_3&=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6}\sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^{i}\partial z^{j}}D_3(\xi,z)\right|,\\
||D_4(t,x)||_4&=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6}\sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^{i}\partial x^{j}}D_4(\xi,x)\right|.
\end{aligned}
\tag{6.2.34}
$$

Функции $D_i, i=1,2,\ldots,4$ из (6.2.34) и их производные, входящие в (6.2.34), ограничены и непрерывны в $G_{[0,T]}$.

Согласно обозначений (6.2.34), из неравенства (6.2.33) следует оценка

$$\begin{gathered}
\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant C\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\frac{4\tau}{5}}||F||_1\,d\theta+\\
+\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+\\
+C\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta+\\
+C\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\right|d\theta.
\end{gathered}\qquad(6.2.35)$$

На пятом дробном шаге, $t\in\left(\frac{4\tau}{5},\tau\right]$, записав уравнение (6.2.23) в виде

$$\begin{gathered}
U^{\tau}_t(t,x,z)=5A_1(t,x,z)\Big(\Psi_t(t,z)-\Psi_{zz}(t,z)-F(t,\beta,z)\lambda^1(t,\beta,z)\Big)+\\
+5A_2(t,x,z)\Big(\Phi_t(t,x)-\Phi_{xx}(t,x)-F(t,x,\alpha)\lambda^1(t,x,\alpha)\Big)-\\
-5A_3(t,x,z)\Big(\Psi_t(t,\alpha)-\Phi_{xx}(t,\beta)-\Psi_{zz}(t,\alpha)+F(t,\beta,\alpha)\lambda^1(t,\beta,\alpha)\Big),
\end{gathered}\qquad(6.2.36)$$

дифференцируя его по x и z до 4 порядка и интегрируя по временной переменной, получаем, что для всех $t\in\left(\frac{4\tau}{5},\tau\right]$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}
\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant\\
\leqslant\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+\\
+C\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta+
\end{gathered}$$

$$+ C\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}} \sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\right|d\theta+$$

$$+ C\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\tau}||F||_1\,d\theta + C\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\tau}||\Psi||_3\,d\theta + C\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\tau}||\Phi||_4\,d\theta.$$

Из свойств определенного интеграла следует, что

$$\begin{gathered}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant\\ \leqslant\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+\\ + C\int\limits_{0}^{\tau}\left(\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|+\right.\\ \left.+||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\right)d\theta,\end{gathered}\tag{6.2.37}$$

$t\in(\frac{4\tau}{5};\tau]$.

Из оценок (6.2.26), (6.2.29), (6.2.30), (6.2.35), (6.2.37) получаем

$$\begin{gathered}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant\\ \leqslant\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+\\ + C\int\limits_{0}^{\tau}\left(\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|+\right.\\ \left.+||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\right)d\theta,\end{gathered}$$

$t\in(0;\tau]$.

Применим к последнему неравенству лемму Гронуолла:

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leqslant t\leqslant\tau}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant e^{C\tau}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+ \tag{6.2.38}$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\Big(e^{C\tau}-1\Big).$$

Таким образом, на первом целом шаге, $(t\in(\tau;2\tau])$, получаем

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\tau<\xi\leqslant t\leqslant 2\tau}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant e^{C\tau}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leqslant t\leqslant\tau}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\Big(e^{C\tau}-1\Big)\leqslant\Big[\text{учитывая (6.2.38)}\Big]\leqslant$$

$$\leqslant e^{C\tau}e^{C\tau}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\Big(e^{2C\tau}-e^{C\tau}\Big)+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\Big(e^{C\tau}-1\Big)=$$

$$=e^{2C\tau}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\Big(e^{2C\tau}-1\Big).$$

Повторяя рассуждения на последующих шагах по времени, при $t \in \big((N-1)\tau; N\tau\big]$ получаем

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(N-1)\tau<\xi\leqslant t\leqslant T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{NC\tau} \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x,z)\right| +$$

$$+ \Big(||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4\Big)\Big(e^{NC\tau}-1\Big) =$$

$$= e^{CT} \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x,z)\right| +$$

$$+ \Big(||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4\Big)\Big(e^{CT}-1\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x,z)\right| + ||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4\right).$$

Итак, для всех $t \in (0;T]$ получаем равномерную по τ оценку

$$||U||_1 \leqslant C\Big(||U_0||_2 + ||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4\Big).$$

Из (6.2.13) и (6.2.17) следует оценка

$$||U||_1 + ||\Lambda||_1 \leqslant C\Big(||U_0||_2 + ||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4\Big), \text{ т. е.}$$

$$||u^1-u^2||_1 + ||\lambda^1-\lambda^2||_1 \leqslant$$
$$\leqslant C\Big(||u_0^1-u_0^2||_2 + ||f^1-f^2||_1 + ||\psi^1-\psi^2||_3 + ||\varphi^1-\varphi^2||_4\Big). \quad (6.2.39)$$

Теорема 6.2.1. *Пусть выполняются условия* (6.2.6)–(6.2.9), (6.2.10). *Тогда для задачи* (6.2.1)–(6.2.5) *выполняется оценка* (6.2.39) *устойчивости решения.*

Заключение

В учебном пособии рассмотрены различные методы аппроксимации краевых задач для дифференциальных уравнений. Метод расщепления на дифференциальном уровне, которым является метод слабой аппроксимации, эффективно применим при исследовании коррекности и построении решений различных начально-краевых задач.

Из приведенных в учебном пособии результатов видно, что по сравнению с исходной, расщепленные задачи на каждом дробном временном шаге оказываются, как правило, проще. Их решения часто можно либо точно выписать, либо более точно оценить. Это позволяет в итоге получить все нужные априорные оценки, играющие, как известно, важную роль при исследовании разрешимости начально-краевых задач. Получение априорных оценок — это наиболее трудоемкий и творческий процесс. Оптимальные алгоритмы расщепления и линеаризации позволяют на каждом дробном временном шаге пользоваться методами классического анализа (теоремы принципа максимума, теоремы сравнения, классические теоремы существования, лемма Гронуолла, неравенство Коши и пр.).

Введение в уравнение или систему уравнений специальных слагаемых с малым параметром позволяет улучшить дифференциальные свойства решений и использовать более простые и эффективные методы исследования. Использование ε-аппроксимаций открывает новые подходы к решению обратных задач для полуэволюционных (например параболо-эллиптических) систем и позволить рассматривать новые классы коэфициентных обратных задач.

Библиографический список

1. Уравнения математической физики: учеб. пособие / В.К. Андреев, Ю.Я. Белов, Н.Н. Лазарева, Т.Н. Шипина; Краснояр. гос. ун-т. - Красноярск: 2005. - 128 с.
2. Аниконов, Ю.Е. Обратные задачи математической физики и биологии / Ю.Е. Аниконов // ДАН СССР. - 1991. - Т.318. - N.6. - С.1350-1354.
3. Аниконов, Ю.Е. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения / Ю.Е. Аниконов, Ю.Я Белов. // ДАН СССР. - 1989. - Т.306. - N6. - С.1289-1293.
4. Аниконов, Ю.Е. Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения / Ю.Е. Аниконов, Б.А. Бубнов // ДАН СССР. - 1988. - Т.298. - N4. - С.777-779.
5. Антонцев С.Н. , Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск: Наука, 1983.
6. Белов, Ю.Я. Об одной стационарной задаче динамики океана / Ю.Я. Белов // Мат. заметки. - 1979. - Т.25. - №1. - С.45-52.
7. Белов, Ю.Я. Об одной квазилинейной стационарной задаче динамики океана / Ю.Я. Белов // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск. - 1978. - Т.9. - №5. - С.13-27.
8. Белов, Ю.Я. О расщеплении одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / Ю.Я. Белов // ДАН СССР. - 1995. - Т.345. - N4. - С.441-444.
9. Белов, Ю.Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор; Краснояр. гос. ун-т. - Красноярск: 1999. - 236 с.
10. Белов, Ю.Я. Об одной задаче идентификации двух коэффициентов многомерного параболического уравнения / Ю.Я. Белов, С.В. Полынцева // ДАН. - 2004. - Т.396. - №5. - С.583-586.
11. Белов, Ю.Я. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени / Ю.Я. Белов, Е.Г. Саватеев // ДАН СССР. - 1991. - Т.334. - N5. - С.800-804.

12. Белов, Ю.Я. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Доклады Академии Наук. - 2005. - Т.404. - №5. - С.583-585.

13. Белов, Ю.Я. О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой / Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Специальный выпуск журнала "Вычислительные технологии", посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко. - 2006. - Т.11. - ч.1. - С.46-54.

14. Белов, Ю.Я. Влияние вязкости на гладкость решения в неполно — параболических системах / Ю.Я. Белов, Н.Н. Яненко // Матем. заметки. - 1971. - Т.10. - N1. - С.93-99.

15. Васильева, А.Б. О работах А.Н. Тихонова и его учеников по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Б. Васильева, В.М. Волосов // Успехи мат. наук. - 1967. - Т.22. - Вып.2(134). - С.149-168.

16. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. - М.: Наука, 1981.

17. Владимирова, Н.Н. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости / Н.Н. Владимирова, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. - Н.: Наука, 1966. - С.186-192.

18. Волков, В.М. Обратная задача для квазилинейного уравнения параболического типа / В.М. Волков // Дифференциальные уравнения. - 1983. - Т.19. - №12. - С.2166-2169.

19. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1983. - 84 с.

20. Гласко, В.Б. Обратные задачи математической физики / В.Б. Гласко. - М.: МГУ, 1979.

21. Гордезиани, Д.Г. О применении локально-одномерного метода для решения многомерного уравнения параболического типа 2m-порядка / Д.Г. Гордезиани // Сообщ. АН ГССР. - 1965. - Т.39, - С.535-542.

22. Гордезиани, Д.Г. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации / Д.Г. Гордезиани, А.А. Самарский // Комплексный анализ и его приложения. - М., 1978. - С.173-186.

23. Градштейн, И.С. Дифференциальные уравнения с малыми множителями при производных и теория устойчивости Ляпунова / И.С. Градштейн // Докл. АН СССР. - 1949. - Т.65 - №6. - С.789-792.

24. Градштейн, И.С. Дифференциальные уравнения, в которых множителем при производных входят различные степени малого параметра / И.С. Градштейн // Докл. АН СССР. - 1952. - Т.82. - №1. - С.5-8.

25. Демидов, Г.В. Метод слабой аппроксимации / Г.В. Демидов, Н.Н. Яненко // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными. - М.: Изд-во Московск. ун-та, 1978. - С.100-102.

26. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А.М. Денисов. - М.: Изд-во МГУ, 1994. - 208 с.

27. Денисов, А.М. Обратные задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А.М. Денисов // Докл. АН СССР. - 1989. - Т.307. - №5. - С.1040-1042.

28. Ильин, А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной / А.М. Ильин // Мат.заметки. - 1969. - Т.6. - №2. - С.237-248.

29. Ильин, А.М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник // Успехи мат. наук. - 1962. - Т.17. - №3. - С.3-146.

30. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.

31. Исаков, В.М. Одна обратная задача для параболического уравнения / В.М. Исаков // Успехи матем. наук. - 1982. - Т.32. - N2. - С.108-109.

32. Искендеров, А.Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений / А.Д. Искендеров // ДАН СССР. - 1975. - Т.225. - N5. - С.1005-1008.

33. Искендеров, А.Д. Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений / А.Д. Искендеров // Дифференциальные уравнения. - 1974. - Т.10. - N.5. - С.890-898.

34. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. - М.: Наука, 1966. - 260 с.

35. Камынин, В.Л. Асимптотическое поведение решений квазилинейных параболических уравнений в ограниченной области / В.Л. Камынин // СМЖ. - 1994. - Т.35. - №2. - С.340-358.

36. Кожанов, А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности / А.И. Кожанов // Сиб. мат. журнал. - 2005. - Т.46. - №5. - С.1053-1071.

37. Коновалов, А.Н. Численное решение задач теории упругости / А.Н. Коновалов. - Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1968. - 127 с.

38. Кружков, С.Н. Квазилинейное параболическое уравнение второго порядка со многими независимыми переменными / С.Н. Кружков, О.А. Олейник // Успехи мат. наук. - 1961. - Т.16. - Вып. 5(101). - С.115-155.

39. Кочергин, В.П. Теория и методы расчета океанических течений / В.П. Кочергин. - М.: Наука, 1978. - 127 с.

40. Крылов, Н.В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка / Н.В. Крылов. - М.: Наука, 1985. - 376 с.

41. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. - М.: Наука, 1980. - 336 с.

42. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. - М.: Наука, 1970. - 288 с.

43. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. - М.: Наука, 1967. - 736 с.

44. Ларькин, Н.А. Нелинейные уравнения переменного типа / Н.А. Ларькин и др. - М.: Наука, 1983. - 272 с.

45. Лионс, Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. - М.: Мир, 1972. - 414 с.

46. Лионс, Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.Л. Лионс. - М.: Мир, 1972. - 587 с.

47. Марчук, Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана / Г.И. Марчук. — Л.: Гидрометеоиздат, 1974. — 303 с.

48. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. - М.: Наука, 1976.

49. Новик, О.Б. Задача Коши для системы уравнений в частных производных, содержащей гиперболический и параболический операторы / О.Б. Новик // Журнал ВМ и МФ. - 1969. - Т.9. - N1. - С.122-136.

50. Олейник, О.А., Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А. Олейник, Е.В. Радкевич // Итоги науки.- М., 1971. - С.7-252.

51. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 1982.

52. Романов, В.Г. Устойчивость в обратных задачах / В.Г. Романов. - М.: Научный мир, 2005. - 295 с.

53. Рождественский, Б.М. Системы квазилинейных уравнений / Б.М. Рождественский, Н.Н. Яненко. - М.: Наука, 1978. - 668 с.

54. Саватеев, Е.Г. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений / Е.Г. Саватеев // ДАН. - 1995. - Т.340. - N5. - С.595-596.

55. Самарский, А.А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области / А.А. Самарский // Журнал вычислительной математики и мат. физики. — 1977. - Т.2. - N5. - С.787-811.

56. Самарский, А.А. О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем / А.А. Самарский // Докл. АН СССР. - 1965. - Т.165. - N6. - С.1253-1256.

57. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. - М.: Наука, 1977. - 656 с.

58. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. - Новосибирск: СО АН СССР, 1962. - 255 с.

59. Соболевский, Н.Е. Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса / Н.Е. Соболевский, В.В. Васильев // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск. - 1978. - Т.9. - №5. - С.115-139.

60. Соболевский, П.Е. Об уравнениях второго порядка в банаховом пространстве с малым параметром при старшей производной / П.Е. Соболевский // Успехи мат. наук. - 1964. - Т.19. - №6. - С.217-219.

61. Сорокин, Р.В. О стабилизации решения одной обратной задачи для системы составного типа / Р.В. Сорокин // Вестник Красноярского государственного университета, серия "Физико-математические науки", 2005. - №1. - С.167-178.

62. Сорокин, Р.В. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа в многомерном случае / Р.В. Сорокин, Т.Н. Шипина // Вычислительные технологии. - 2004. - Т.9. - Ч.3. - С.59-68.

63. Сухоносов, Б.И. Исследование корректности гидродинамических моделей метеорологии: автореферат. дис. ... канд. физ.-мат. наук. / Б.И. Сухоносов. - Новосибирск, 1980. - 102 с.

64. Тихонов, А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А.Н. Тихонов // Мат. сб. - 1948. - Т.22(64). - С.193-204.

65. Тихонов, А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных / А.Н. Тихонов // Мат. сб. - 1952. - Т.31(73). - С.575-586.

66. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1977. - 736 с.

67. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. - М.: Наука, 1980. - 496 с.

68. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. - М.: Мир, 1968. - 427 с.

69. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко. - Новосибирск, 1967. - 195 с.

70. Anikonov, Yu.E. Determining two unknown coefficients of then parabolic type equation / Yu.E. Anikonov, Yu.Ya. Belov // J. Inv. Ill-Posed Problems.

71. Belov, Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations / Yu.Ya. Belov. - Utrecht: VSP, 2002. - 211 p.

72. Riganti, R. On the solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation / R. Riganti, E. Savateev // Rapporto Interno. - 1991. - N25. - Torino: Politecnico di Torino.

73. Riganti, R. Solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation / R. Riganti, E. Savateev // Comm. in Partial Differntial Equation. - 1994. - V.19. - N9&10. - P.1611-1628.

74. Prilepko, A.I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. - New York: Marcel Dekker, 2000.

75. Prilepko, A.I. An inverse problem for a parabolic equation with final overdetermination / A.I. Prilepko, D.S. Tkachenko // Ill Posed and Inverse Problems. - Utrecht: VSP, 2002. - P.317-353.

76. Hopf, E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ / E. Hopf // Comm. Pure Appl. Math. - 1950. - V.3. - P.201-230.

Учебное издание

Белов Юрий Яковлевич
Сорокин Роман Викторович
Фроленков Игорь Владимирович

АППРОКСИМАЦИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор Т.И. Тайгина
Компьютерная верстка: Р.В. Сорокин, И.В. Фроленков

Подписано в печать 01.03.2012 г. Формат 60x84/16. (А5)
Бумага офсетная. Печать плоская.
Усл. печ. л. 10. Тираж 100 экз. Заказ 5837.

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел/факс (391) 206-21-49. E-mail rio@sfu-kras.ru
http://rio.sfu-kras.ru

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а