ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Содержание дисциплины

№ п/п	Разделы дисциплины
1.	Введение. Классификация уравнений 2го порядка. Краевые задачи.
2.	Задачи Коши для уравнений в частных производных. Принцип максимума.
3.	Пространства Соболева. Обобщенные решения краевых задач для уравнений в частных производных.
4.	Функциональные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных.

2. Содержание разделов и тем лекционного курса

Раздел 1. Классификация уравнений 2го порядка. Задача Коши.

1. Классификация уравнений 2-го порядка.
2. Определение типа уравнений. Уравнения Лапласа, Пуассона, Трикоми, теплопроводности, волновое.
3. Постановки краевых задач (1-го, 2-го, 3-го рода) для стационарных уравнений. Физический смысл. Определение классического решения. Примеры.
4. Постановки краевых задач (1-го, 2-го, 3-го рода) и задачи Коши для нестационарных уравнений (теплопроводности, колебания). Физический смысл. Определение классического решения. Примеры.
5. Теорема единственности классического решения первой (второй) краевых задач для одномерного волнового уравнения (уравнения колебания струны).
6. Корректность по Адамару. Примеры некорректно поставленных задач. Пример Адамара.
7. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера. Формула Пуассона. Задача Коши на полупрямой.

8. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Обоснование сходимости интеграла Пуассона и оценка решения. Доказательство бесконечной дифференцируемости по t и x при t>0.
9. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Доказательство, что интеграл Пуассона – решение однородного уравнения. Выполнение начальных условий.

Раздел 2. Краевые задачи для уравнений в частных производных. Принцип максимума.

10. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны. Однородное уравнение с однородными граничными условиями. Задача Штурма-Лиувилля. Обоснование сходимости ряда. Исследование гладкости полученного решения. Теорема существования классического решения.
11. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны. Неоднородное уравнение с однородными граничными условиями. Неоднородное уравнение с неоднородными граничными условиями.
12. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности в стержне. Однородное уравнение с однородными граничными условиями. Задача Штурма-Лиувилля. Обоснование сходимости ряда. Исследование гладкости полученного решения. Теорема существования классического решения.
13. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности в стержне. Неоднородное уравнение с однородными граничными условиями. Неоднородное уравнение с неоднородными граничными условиями.
14. Принцип максимума для параболического уравнения. Теорема: Если L(u)≤0 в $\overline{Q_T} \setminus \Gamma_T$ и u≥0 на Γ_T, то u≥0 в Q_T. Оценка решения $|u(t,x)| \le Nt + q$
15. Принцип максимума для параболического уравнения. Оценки решения
    a. $|u(t,x)| \le \max\left\{\dfrac{N}{C_0}, q\right\}$;
    b. $\min\limits_{\Gamma_T} u(t,x) \le u(t,x) \le \max\limits_{\Gamma_T} u(t,x)$;
    c. $|u(t,x)| \le e^{Mt}(Nt+q)$.
16. Строгий принцип максимума. Теоремы принципа максимума для задачи Коши для уравния теплопроводности. Оценки решения.
17. Теорема о непрерывной зависимости классического решения 1-ой краевой задачи для параболического уравнения от правой части f(t,x), начальной функции φ(x) и граничной функции ψ(x). Теорема единственности решения первой краевой задачи для уравнения Бюргерса.
18. Необходимое условие разрешимости 2-ой краевой задачи для уравнения Пуассона.

Раздел 3. След функции. Обобщенные решения краевых задач для уравнений в частных производных.

19. Банахово и гильбертово пространства. Финитная функция. Пространства $C^k(\Omega), C^k(\overline{\Omega}), \overset{\circ}{C}{}^k(\Omega), C^\infty(\Omega), L_p(\Omega), L_{p,loc}(\Omega)$. Нормы и скалярные произведения. Определение обобщенной производной (по С.Л.Соболеву).
20. Обобщенная производная. Основные свойства. Примеры вычисления обобщенных производных. Примеры когда обобщенная производная не существует.
21. Пространства С.Л.Соболева $W_p^l(\Omega), l \geq 1, p > 1 - const.$
22. Пространство $H^l(\Omega) \equiv W_2^l(\Omega)$. Полнота пространства $H^l(\Omega)$. Сильная и слабая сходимость.
23. Неравенство Пуанкаре-Фридрихса.
24. Эквивалентные нормы. Примеры эквивалентных норм в пространстве $H^1(\Omega)$. Теорема об эквивалентности норм в $H^1(\Omega)$.
25. След функции класса $H^1(\Omega)$ на поверхности размерности n-1. Лемма о следе. Примеры вычисления следов. Формулы интегрирования по частям для функций класса $H^1(\Omega)$. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.
26. Обобщенное решение первой краевой задачи для эллиптического уравнения. Теорема Рисса. Теоремы существования и единственности обобщенного решения.
27. Обобщенное решение второй краевой задачи для эллиптического уравнения. Теоремы существования и единственности обобщенного решения.

Раздел 4. Метод Галеркина и функциональные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных.

28. Метод Галеркина для первой краевой задачи для эллиптического уравнения.
    a. Построение последовательности галеркинских приближений;
    b. получение априорных оценок;
    c. сходимость последовательности галеркинских приближений к решению первой краевой задачи для эллиптического уравнения;
29. Метод Галеркина для первой краевой задачи для эллиптического уравнения. Исследование единственности решения. Сильная сходимость последовательности галеркинских приближений.
30. Метод Галеркина для второй и третьей краевых задач для эллиптического уравнения.
    a. Построение последовательности галеркинских приближений;
    b. получение априорных оценок;

c. сходимость последовательности галеркинских приближений к решению второй (третьей) краевой задачи для эллиптического уравнения;
d. теоремы существования и единственности решения.

31. Понятие квадратичного функционала.
    a. Ограниченность снизу квадратичного функционала;
    b. проблема минимума квадратичного функционала; вариационные задачи;
    c. необходимое условие минимума функционала;
    d. связь элемента, реализующего минимум функционала, с решением краевых задач.
32. Теорема существования решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения. Функциональный метод.
33. Метод Ритца построения минимизирующей последовательности функционала $E(u)=\|u\|_H^2+2(f,u)_{L_2}$.
34. Решение краевых задач для уравнения эллиптического типа и метод Ритца.
35. Теорема существования и единственности решения 1-ой краевой задачи для параболического уравнения. Метод Галеркина.
    a. Доказательство слабой компактности семейства приближенных решений в $W_2^1(Q_T)$;
    b. обоснование предельного перехода. Доказательство того факта, что предельная функция есть решение исходной задачи.
    c. Исследование единственности.
36. Теорема существования и единственности решения 2-ой краевой задачи для параболического уравнения. Метод Галеркина.
    a. Доказательство слабой компактности семейства приближенных решений в $W_2^{1,2}(Q_T)$;
    b. обоснование предельного перехода. Доказательство того факта, что предельная функция есть решение исходной задачи.

    Исследование единственности.

3. Практические занятия

Перечень практических занятий приведен в таблице.

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тема
1.	Введение. Классификация уравнений 2го порядка. Краевые задачи.	1. Классификация уравнений второго порядка, приведение уравнений к каноническому виду, 2 часа
		2. Характеристическое уравнение для функции двух переменных, приведение уравнения к каноническому виду, 2 часа
		3. Задача Коши для гиперболического уравнения. Нахождение частного решения, 2 часа
		4. Постановки краевых задач. Условия согласования для

		начально-краевых задач, 2 часа
		5. Метод Фурье для однородного волнового уравнения, 2 часа
		6. Метод Фурье для неоднородного волнового уравнения, 2 часа
		7. Метод Фурье для уравнения теплопроводности, 2 часа
		8. Метод Фурье для уравнения теплопроводности, случай неоднородных краевых условий, 4 часа
2.	Задачи Коши для уравнений в частных производных. Принцип максимума.	9. Корректность задач по Адамару, примеры некорректно поставленных задач, 2 часа
		10. Задача Коши для волнового уравнения, формула Даламбера, 2 часа
		11. Задача Коши для волнового уравнения для функции нескольких переменных, 2 часа
		12. Задача Коши для уравнения теплопроводности, 2часа
		13. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона, 2 часа
		14. Принцип максимума для параболических уравнений, априорная оценка решений,2 часа
		15. Принцип максимума для параболических уравнений, доказательства единственности краевых задач, 2 часа
		16. Принцип максимума для параболических уравнений, доказательства непрерывной зависимости решений от начальных данных, 2 часа
		17. Контрольная работа
3.	Пространства Соболева. Обобщенные решения краевых задач для уравнений в частных производных.	18. Линейные пространства, нормы, скалярные произведения, 2 часа
		19. Функции, измеримые по Лебегу, интеграл Лебега. Пространства $L_p(\Omega)$. Сходимость по норме и слабая сходимость, 2 часа
		20. Обобщенная производная, 2 часа
		21. Неравенство Стеклова. Эквивалентность норм пространств, 2 часа
		22. Пространства $H^1(\Omega)$. След функции, 2 часа
		23. Определение обобщенного решения, 2 часа
		24. Обобщенные решения первой краевой задачи, 2 часа
		25. Обобщенные решения второй краевой задачи,2 часа
4.	Функциональные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных.	26. Гладкость обобщенных решений, 2 часа
		27. Линейный непрерывный функционал, 2 часа
		28. Существование и единственность обобщенного решения (теорема Рисса), 2 часа
		29. Необходимое условие минимума функционала, 2 часа
		30. Решение задач на нахождение минимума функционала (сведение к нахождению гладкого решения краевой задачи), 2 часа

		31. Связь элемента, реализующего минимум функционала, с решением краевых задач. Теорема существования решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения. Функциональный метод.
		32. Определение обобщенного решения краевых задач для параболических уравнений, 2 часа
		33. Решение краевых задач для уравнения эллиптического типа и метод Ритца. Метод Галеркина.
		34. Контрольная работа

4. Основная и дополнительная литература, информационные ресурсы

Основная литература

- В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит., 2002. - 400 с.
- Михайлов В.П. Лекции по уравнениям математической физики: Учеб. пособие для вузов. -- М.: Физматлит. 2001. -- 208 с.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: МГУ, Наука, 2004.-798с.
- Михлин С.Г. Курс математической физики. - СПб.: Лань, 2002. - 576с.
- Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. – М.: Физматлит., 2004.

Дополнительная литература

- О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1988. - 386 с.
- Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов Дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Гос. изд. ф.-м. литер., 1962. - 767 с.
- С. Л. Соболев. Уравнения математической физики. ≈ М.: ГИТТЛ, 1966. - 444 с., изд. 4-ое.
- И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: ГИТТЛ, 1953.
- А. Фридман. Уравнения математической физики параболического типа. - М.: Мир, 1968. - 427 с.