Всюду ниже Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $f(x) \in L_2(\Omega)$

1. Определить на плоскости (x, y) тип уравнения $x^2 u_{xx} + (x+y)^2 u_{yy} + \sin(x) u_x = e^{x+y}$ (2 балла).

2. Поставить первую краевую задачу для уравнения теплопроводности в одномерном случае, выписать условия согласования нулевого порядка на входные данные. (2 балла).

3. Решить краевую задачу

$$u_t = 4u_{xx}, \quad u(0,x) = \sin x \cos x + \sin 5x, \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad x \in [0,\pi], t \in [0,T]$$

(4 балла).

4. Верно ли утверждение, что в области $\overline{Q}_{[0,3]} = \{(t,x) | 0 \leqslant t \leqslant 3,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ решение $u(t,x)$ задачи

$$u_t = 16u_{xx} + u_x, \quad u(0,x) = x^3, \quad u(t,0) = t, \quad u(t,1) = 81$$

не может принимать отрицательные значения? (4 балла).

5. Дать определение обобщенного решения задачи

$$-36\Delta u + u = \cos^2(|x|),\ x \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \sin(|x|)$$

Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи. (5 баллов).

6. Дать определения функциональных пространств $\overset{0}{C}{}^k(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_{2,loc}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$. Указать, какие из них являются Банаховыми, Гильбертовыми и привести скалярные произведения и нормы в этих пространствах. (3 балла).