Всюду ниже Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $f(x) \in L_2(\Omega)$

1. Поставить вторую краевую задачу для уравнения теплопроводности в одномерном случае, выписать условия согласования нулевого порядка на входные данные. (3 балла).

2. Дать определение обобщенного решения задачи

$$-36\Delta u + u = \cos^2(|x|),\ x \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \sin(|x|)$$

Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи. (7 баллов).

3. Дать определение квадратичного функционала и доказать, что функция, реализующая минимум функционала

$$F(v) = \int\limits_0^1 (v'^2 + v^2)\, dx + 2\int\limits_0^1 xv\, dx,$$

есть обобщенное решение задачи $-u_{xx}+u = x$, $u(0) = u(1) = 0$, в классе $\overset{0}{H}{}^1(0,1)$ (5 баллов).

4. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Дать определения функциональных пространств $\overset{0}{C}{}^k(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_{2,loc}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$. Указать, какие из них являются Банаховыми, Гильбертовыми и привести скалярные произведения и нормы в этих пространствах. (5 балла).