1. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Дать определения функциональных пространств $\overset{0}{C^k}(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_{2,loc}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$. Указать, какие из них являются Банаховыми, Гильбертовыми и привести скалярные произведения и нормы в этих пространствах. (5 баллов)

2. Дать определение эквивалентных скалярных произведений. Доказать, что эквивалентны следующие скалярные произведения в $\overset{0}{H^1}(\Omega)$

$$(f,g)_I = \int\limits_\Omega fg + (\nabla f, \nabla g)\,dx,\ \ (f,g)_{II} = \int\limits_\Omega |sin|x||fg + p(x)(\nabla f, \nabla g)\,dx$$

где $p(x) \geq p_0 > 0$, $p(x) \in C(\Omega)$ (4 балла)

3. Дать определение обобщенной производной и вычислить о.п. первого и второго порядка (если возможно, если нет, доказать, что не существует) функции $f(x) = x|x|$. (4 балла)

4. Найти интеграл по отрезку $[0,1]$ от следующей функции (предварительно доказав ее интегрируемость):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \text{ иррационально и больше } \frac{1}{3}, \\ x^3, \text{ если } x \text{ иррационально и меньше } \frac{1}{3}, \\ 0, \text{ если } x \text{ рационально} \end{cases}$$

(4 балла)

5. Поставить вторую краевую задачу для уравнения теплопроводности в одномерном случае, выписать условия согласования нулевого порядка на входные данные. (3 балла).
