

1. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Дать определения функциональных пространств $C^k(\bar{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $L_{2,loc}(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$. Указать, какие из них являются Банаховыми, Гильбертовыми и привести скалярные произведения и нормы в этих пространствах. (5 баллов)

2. Дать определение эквивалентных скалярных произведений. Доказать, что эквивалентны следующие скалярные произведения в $H^1(\Omega)$

$$(f, g)_I = \int_{\Omega} fg + (\nabla f, \nabla g) dx, \quad (f, g)_{II} = \int_{\Omega} e^{|x|} fg + p(x)(\nabla f, \nabla g) dx$$

где $p(x) \geq p_0 > 0$, $p(x) \in C(\bar{\Omega})$ (4 балла)

3. Дать определение обобщенной производной и вычислить на отрезке $[-1, 1]$ о.п. первого и второго порядка (если возможно, если нет, доказать, что не существует) функции $f(x) = (x + 1)|x|$. (4 балла)

4. Найти интеграл по отрезку $[0, 1]$ от следующей функции (предварительно доказав ее интегрируемость):

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ иррационально и больше } \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{если } x \text{ иррационально и меньше } \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально} \end{cases}$$

(4 балла)

5. Поставить вторую краевую задачу для волнового уравнения в одномерном случае, выписать условия согласования нулевого порядка на входные данные. (3 балла).
