ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Ю.Я. Белов, Н.Н. Лазарева,
Р.В. Сорокин, И.В. Фроленков, Т.Н. Шипина

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебное пособие по циклу практических занятий

Красноярск
СФУ
2008

Содержание

Введение

Пособие содержит основные определения, вывод дифференциальных уравнений математической физики, постановки начально-краевых задач и задач Коши, методы их решения для основных типов уравнений в частных производных второго порядка, изучаемых в курсе "Уравнения математической физики."Используются понятия классического и обобщенного решений. Установлены априорные оценки для уравнений параболического типа в классах непрерывных функций – теоремы принципа максимума.

По каждой теме приведены задачи и упражнения для работы на семинарских занятиях и дома. К задачам и упражнениям даны ответы. Для большинства тем приведены задания повышенной сложности для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям и направлениям: "Математика "Математика. Компьютерные науки "Прикладная математика и информатика "Физика".

1. Приведение линейных уравнений второго порядка к каноническому виду (общий случай)

Замечание. Всюду ниже Ω – ограниченная область пространства E^m с кусочно-гладкой границей.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0, \tag{1.1}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x \in \Omega$, $\Omega \subset E^m$. Если функция $\Phi(x, u, \nabla u)$ является линейной функцией относительно аргументов u и ∇u, то уравнение (1.1) называется линейным. В противном случае уравнение (1.1) – квазилинейное уравнение.

Далее считаем, что функция $\Phi(x, u, \nabla u)$ – линейная функция относительно аргументов u и ∇.

Рассмотрим коэффициенты уравнения (1.1) в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$. Введем вместо x_s, $s = \overline{1, m}$ новые независимые переменные ξ_k, $k = \overline{1, m}$ при помощи невырожденного линейного преобразования

$$\xi_k = c_{k1}x_1 + \cdots + c_{km}x_m, \qquad k = \overline{1, m}.$$

Производные по старым переменным связаны с производными по новым переменным формулами

$$u_{x_i} = \sum_{s=1}^{m} c_{si}u_{\xi_s}, \qquad u_{x_i x_k} = \sum_{s,l=1}^{m} c_{si}c_{lk}u_{\xi_s\xi_l}, \qquad i, k = \overline{1, m}.$$

Подставив найденные производные в (1.1), получим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{m} a'_{ij}u_{\xi_i\xi_k} + \widetilde{\Phi}(\xi, u, \nabla u) = 0,$$

где коэффициенты a'_{ij} выражаются через старые согласно формулам

$$a'_{ik} = \sum_{s,l=1}^{m} c_{is}c_{kl}a_{kl}^0, \quad i, k = \overline{1, m}. \tag{1.2}$$

Здесь a_{kl}^0 – коэффициенты $a_{kl}(x)$ в точке M_0.

Рассмотрим квадратичную форму

$$Q = \sum_{i,k=1}^{m} a^0_{ik} p_i p_k. \tag{1.3}$$

Вместо переменных $\{p_i\}$ введем новые переменные $\{q_i\}$ при помощи матрицы, транспонированной по отношению к матрице $\|c_{ik}\|$, т.е положим

$$p_k = c_{1k} q_1 + \dots + c_{mk} q_m, \qquad k = \overline{1, m}.$$

При этом преобразованная квадратичная форма (1.3) будет иметь как раз коэффициенты a'_{ik}, определяемые формулой (1.2), т.е.

$$\sum_{i,k=1}^{m} a^0_{ik} p_i p_k = \sum_{i,k=1}^{m} a'_{ik} q_i q_k.$$

Известно, что выбором соответствующего линейного преобразования $\overline{p} = B\overline{q}$ можно привести квадратичную форму (1.3) к каноническому виду

$$Q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i^2, \qquad \text{где } \lambda_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

Тогда уравнение (1.1) заменой $\overline{\xi} = B^T \overline{x}$ приводится к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \widetilde{\Phi}(\xi, u, \nabla u) = 0.$$

Назовем уравнение (1.1) в точке M_0 уравнением эллиптического типа, если все m коэффициентов λ_i одного знака; гиперболического типа, если $m-1$ коэффициент λ_i имеет одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку; ультрагиперболического типа, если среди λ_i имеется l коэффициентов одного знака и $m-l$ противоположного знака $(l, m-l > 1)$; параболического, если только один из коэффициентов λ_i равен нулю, а остальные имеют одинаковый знак.

Заметим, что если $a_{ij} = \text{const}$, $i, j = \overline{1, m}$, то тип уравнения сохраняется во всей области.

Пример 1.1. *Приведя к каноническому виду уравнение $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} + u_z = 0$, определить тип. Выписать замену переменных, приводящую уравнение к каноническому виду.*

Решение. Поставим в соответствие уравнению квадратичную форму

$$Q = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3.$$

Приведем квадратичную форму к каноническому виду, например, методом выделения полного квадрата. Сделаем замену

$$p_1 = l_1 + l_2, \qquad p_2 = l_1 - l_2, \qquad p_3 = l_3.$$

Тогда квадратичная форма преобразуется к виду

$$Q = l_1^2 - l_2^2 + 2l_1l_3 = (l_1 + l_3)^2 - l_2^2 - l_3^2 = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2,$$

где $q_1 = l_1 + l_3$, $q_2 = l_2$, $q_3 = l_3$.

Выразим старые переменные через новые

$$\overline{p} = B\overline{q}, \qquad \text{где}\, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда замена переменных, приводящая исходное уравнение к каноническому виду, будет такова: $\overline{\xi} = B^T\overline{x}$, где $\overline{x} = (x, y, z)$, то есть

$$\xi_1 = x + y, \qquad \xi_2 = x - y, \qquad \xi_3 = -x - y + z.$$

Канонический вид: $u_{\xi_1\xi_1} - u_{\xi_2\xi_2} - u_{\xi_3\xi_3} + u_{\xi_3} = 0$.

Тип уравнения — гиперболический.

Задачи и упражнения

Привести к каноническому виду уравнения

1.1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$.
1.2. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$.
1.3. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$.
1.4. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$.
1.5. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0$.
1.6. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$.
1.7. $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0$.
1.8. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0$.

1.9. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0.$
1.10. $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0.$
1.11. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0.$
1.12. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0.$
1.13. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0.$
1.14. $3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0.$
1.15. $u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$
1.16. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y = 0.$
1.17. $u_{xx} + 4u_{yy} - 3u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} = 0.$
1.18. $u_{xx} - 3u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 4u_{xz} - 4u_{yz} = 0.$
1.19. $u_{xx} - 3u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_{xz} - 6u_{yz} = 0.$
1.20. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{yz} + u_{yt} + 2u_{zt} = 0.$

2. Приведение линейных уравнений второго порядка к каноническому виду (случай двух переменных)

В области $\Omega \subset E^2$ рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

где $a(x,y) \in C(\Omega)$ [1] , $b(x,y) \in C(\Omega)$, $c(x,y) \in C(\Omega)$, $u(x,y) \in C^2(\Omega)$. Уравнение принадлежит:

1) гиперболическому типу, если $b^2 - ac > 0$,
2) параболическому типу, если $b^2 - ac = 0$,
3) эллиптическому типу, если $b^2 - ac < 0$.

Уравнение

$$a(dy)^2 - 2b\,dx\,dy + c(dx)^2 = 0$$

называется уравнением характеристик, а его первые интегралы

$$\varphi_1(x,y) = c_1, \quad \varphi_2(x,y) = c_2$$

[1] $C(\Omega) = \{f(x) | f(x)$ - непрерывная функция на $\Omega\}$.
$C^k(\Omega) = \{f(x) | D^\alpha f(x) \in C(\Omega) \quad \forall \alpha, |\alpha| \le k\}$. $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_m^{\alpha_m}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ – мультииндекс (целочисленный вектор), $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$.

— характеристическими кривыми или просто характеристиками исходного уравнения. В случае гиперболического уравнения имеем два семейства действительных характеристик. В случае параболического уравнения только одно семейство действительных характеристик и, соответственно, одно решение ($\varphi_1(x,y) = c_1$). В случае эллиптического уравнения действительных характеристик нет, характеристическое уравнение имеет комплекснозначное решение ($\psi_1(x,y) + i\psi_2(x,y) = c_1$). Можно найти такое решение уравнения, чтобы функции $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ были дважды непрерывно дифференцируемыми [1].

Заменой переменных

$$\xi = \varphi_1(x,y), \quad \eta = \varphi_2(x,y)$$

уравнение гиперболического типа приводится к каноническому виду[2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \Phi_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0. \qquad (*)$$

Применив еще одну замену переменных $\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta$, получим другой канонический вид гиперболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \Phi_2\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Заменой переменных

$$\xi = \varphi_1(x,y), \quad \eta = \varphi_2(x,y),$$

где $\varphi_2(x,y)$ — произвольная функция, такая, что якобиан преобразования $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$, уравнение параболического типа приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Заменой переменных

$$\xi = \psi_1(x,y), \quad \eta = \psi_2(x,y)$$

уравнение эллиптического типа приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$$

[2] Вид (*) гиперболического уравнения также называют каноническим.

Пример 2.1. *Уравнение*

$$3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0$$

привести к каноническому виду и найти его общее решение.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$3(dy)^2 + 4dxdy + (dx)^2 = 0.$$

Решая обыкновенные дифференциальные уравнения $y' = -\frac{1}{3}$ и $y' = -1$, получим $x + 3y = c_1$ и $x + y = c_2$. Перейдем к новым переменным

$$\xi = x + 3y, \quad \eta = x + y.$$

Находим $u_x = u_\eta + u_\xi$, $u_y = u_\eta + 3u_\xi$, $u_{xx} = u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi}$, $u_{xy} = u_{\eta\eta} + 4u_{\xi\eta} + 3u_{\xi\xi}$, $u_{yy} = u_{\eta\eta} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\xi\xi}$. В новых переменных уравнение примет вид

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}u_\eta = 0.$$

Введем новую функцию $v = ue^{\frac{\xi}{2}}$, тогда относительно новой функции получим уравнение

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Его решение $v(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi)$, или

$$u(\xi, \eta) = f(\eta)e^{-\frac{\xi}{2}} + \widetilde{g}(\xi),$$

где $\widetilde{g}(\xi) = g(\xi)e^{-\frac{\xi}{2}}$. Возвращаясь к переменным (x, y), получаем

$$u(x, y) = f(x + y)e^{-\frac{x+3y}{2}} + \widetilde{g}(x + 3y).$$

Пример 2.2. *Найти решение уравнения*

$$3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 1.$$

Решение. Чтобы найти решение задачи Коши, запишем общее решение данного уравнения, полученное в предыдущем примере: $u(x,y) = f(x+y)e^{-\frac{x+3y}{2}} + \widetilde{g}(x+3y)$. Подставляя заданные условия в общее решение, получим:

$$\begin{cases} f(x)e^{-\frac{x}{2}} + \widetilde{g}(x) = 0, \\ f'(x)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{3}{2}f(x)e^{-\frac{x}{2}} + 3\widetilde{g}'(x) = 1. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение системы, получим, что

$$\begin{cases} f'(x)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}f(x)e^{-\frac{x}{2}} + \widetilde{g}'(x) = 0, \\ f'(x)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{3}{2}f(x)e^{-\frac{x}{2}} + 3\widetilde{g}'(x) = 1. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение последней системы на 3 и вычтем результат умножения из второго уравнения. Получим уравнение

$$-2f'(x)e^{-\frac{x}{2}} = 1.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + C$. Тогда $\widetilde{g}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$. Подставляя эти функции в найденное общее решение, получим $u(x,y) = e^{\frac{x+y}{2}}e^{-\frac{x+3y}{2}} + Ce^{-\frac{x+3y}{2}} + 1 - Ce^{-\frac{x+3y}{2}} = 1 - e^{-y}$.

Задачи и упражнения

2.1. Доказать, что уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

заменой $u(x,y) = v(x,y)e^{-bx-ay}$ приводится к виду $v_{xy} + (c - ab)v = 0$.

2.2. Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy} = F(x,y)$, где $F \in C(|x - x_0| < a, |y - y_0| < b)$, имеет вид

$$u(x,y) = f(x) + g(y) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} F(\xi,\eta)d\eta d\xi,$$

где f и g – произвольные функции класса C^2.

2.3. Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy} + A(x,y)u_x = 0$, где $A(x,y) \in C^1(|x - x_0| < a, |y - y_0| < b)$, имеет вид

$$u(x,y) = f(y) + \int\limits_{x_0}^{x} g(\xi)exp\left\{-\int\limits_{y_0}^{y} A(\xi,\eta)d\eta\right\}d\xi,$$

где f и g – произвольные функции классов C^2, C^1 соответственно.

Определить тип уравнений и привести их к каноническому виду

2.4. $xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0.$
2.5. $xu_{xy} - yu_{yy} - u_y = 0.$
2.6. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0.$
2.7. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0.$
2.8. $yu_{xx} + x(2y-1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} = 0.$
2.9. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$
2.10. $u_{xx} - (1+y^2)^2u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0.$
2.11. $\mathrm{tg}^2 x u_{xx} - 2y\,\mathrm{tg}\, x u_{xy} + y^2u_{yy} + \mathrm{tg}^3 x u_x = 0.$
2.12. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} = 0.$
2.13. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0.$
2.14. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0.$

Найти решения задачи Коши

2.15. $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 1.$
2.16. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = y.$
2.17. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad u|_{y=0} = 3x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0.$
2.18. $u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0, \quad u|_{y=x} = \sin x, \quad u_y|_{y=x} = \cos x.$
2.19. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0, \quad u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 1.$
2.20. $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = y.$
2.21. $4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0,$
$u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 1.$
2.22. $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,$
$u|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad u_y|_{y=\sin x} = \sin x.$
2.23. $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \; u|_{y=0} = -\frac{x^2}{2}, \quad u_y|_{y=0} = -\sin x.$
2.24. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3+\cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0,$
$u|_{y=\cos x} = \sin x, \quad u_y|_{y=\cos x} = \frac{e^x}{2}.$
2.25. $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} + u_x + (1 + \cos x - \sin x)u_y = 0,$
$u|_{y=\sin x} = \cos x, \quad u_y|_{y=\sin x} = \sin x.$
2.26. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3+\cos^2 x)u_{yy} + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0,$
$u|_{y=\cos x} = 0, \quad u_y|_{y=\cos x} = e^{-x^2/2}\cos x.$
2.27. $xu_{xx} - 2x^2u_{xy} + x^3u_{yy} - u_x = 0,$
$u|_{y=\frac{x^2}{2}} = 0, \quad u_y|_{y=\frac{x^2}{2}} = x^2.$

2.28. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - e^y = 0, \quad u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=0} = 0.$

2.29. $u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0,$
$u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=0} = 1.$

2.30. $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0, \quad u|_{x=1} = y, \quad u_x|_{x=1} = 0.$

2.31. $\mathrm{tg}^2 x u_{xx} - 2y\mathrm{tg} x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \mathrm{tg}^3 x u_x + 2\mathrm{tg} x u_x = 0,$
$u|_{y=1} = 0, \quad u_y|_{y=1} = \sin x.$

2.32. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0,$
$u|_{y=\cos x} = x^2, \quad u_y|_{y=\cos x} = x.$

2.33. $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3+\sin^2 x)u_{yy} - \sin x u_y = 0,$
$u|_{y=-\sin x} = x^2, \quad u_y|_{y=-\sin x} = x.$

2.34. $\sin^4 x u_{xx} - 2y\sin^2 x u_{xy} + y^2 u_{yy} + 2\cos x \sin^3 x u_x + y u_y = 0,$
$u|_{y=1} = \mathrm{ctg} x, \quad u_y|_{y=1} = -1.$

Задания, помеченные символом '', предназначены для самостоятельной работы и приведены без ответов.*

2.35.* **Привести к каноническому виду уравнение**

$$u_{x_1x_1} + 2\sum_{k=1}^{m} u_{x_kx_k} - 2\sum_{k=1}^{m-1} u_{x_kx_{k+1}} = 0.$$

Найти характеристики и определить тип системы [1]

2.36.* $\begin{cases} 2u_t + (2t-1)u_x - (2t+1)v_x = 0, \\ 2v_t - (2t+1)u_x + (2t-1)v_x = 0. \end{cases}$

2.37.* $\begin{cases} 2u_x - v_x + u_y - 2u = 0, \\ 3u_x + 3v_x - 5u_y + v_y = 0. \end{cases}$

2.38.* $\begin{cases} xu_{xx} + 2xv_{xx} - u_{yy} - 2v_{yy} = 0, \\ u_{xx} - v_{xx} - 2u_{xy} + 2v_{xy} + u_{yy} - v_{yy} = 0. \end{cases}$

2.39.* $\begin{cases} u_{xx} - 2v_{xy} - u_{yy} = 0, \\ v_{xx} + 2u_{xy} - v_{yy} = 0. \end{cases}$

3. Вывод уравнений математической физики

3.1. Уравнение колебания струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. *Под струной будем понимать тонкую нить,которая не оказывает никакого сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины.*

Сила натяжения, действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси x. Будем рассматривать только поперечные колебания струны, считая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси x.

Обозначим через $u(t,x)$ смещение точек x струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u(t,x)$ дает форму струны в этот момент времени.

Будем рассматривать только *малые* колебания струны, считая, что смещение $u(t,x)$ и его производные первого порядка столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок (x_1,x_2) струны, который при колебании струны деформируется в некоторый участок (M_1,M_2). Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$S' = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = S,$$

то есть в процессе малых колебаний удлинения участков струны не происходит. Это значит, величина натяжения струны, возникающая при движении струны, ничтожно мала по сравнению с тем натяжением, которому она была подвергнута в положении равновесия.

Величину натяжения T можно считать не зависящей от x, то есть $T(x) = T_0$. В самом деле, на участок M_1, M_2 струны действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций на ось x всех этих сил должна равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси u, в силу чего

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1) - T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ - угол между касательной в точке с абсциссой x к струне в момент времени t и положительным направлением оси x. Считая колебания малыми, имеем

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

и, следовательно,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Для вывода уравнения колебания струны воспользуемся *принципом Даламбера*, на основании которого все силы, действующие на некоторый выделенный участок в струне, включая силы инерции, должны уравновешиваться.

Рассмотрим произвольный участок M_1, M_2 струны и составим условие равенства нулю суммы проекций на ось u всех сил, действующих на него: сил натяжения, равных по величине и направленных по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешней силы, направленной параллельно оси u, и силы инерции.

Сумма проекций на ось u сил натяжения, действующих в точках M_1 и M_2, равняется

$$Y = T_0[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)],$$

но в силу малости колебаний

$$\sin\alpha(x) = \frac{\mathrm{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

и, следовательно,

$$Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_1}\right].$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_1} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx,$$

и тогда

$$Y = T_0\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx.$$

Обозначим через $p(t,x)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси u и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось u внешней силы, действующей на участок M_1, M_2 струны, будет равна

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} p(t,x)\,dx.$$

Пусть $\rho(x)$ - линейная плотность струны, тогда сила инерции участка M_1, M_2 струны будет равна

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx.$$

Сумма проекций на ось u всех сил, действующих на участок M_1, M_2 струны, должна быть равна нулю, то есть

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(t,x)\right]\,dx = 0.$$

В силу произвольности x_1 и x_2 следует, что подынтегральная функция должна равняться нулю для каждой точки струны в любой момент времени t, то есть

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t,x).$$

Это и есть *уравнение колебания струны.*

Если $\rho = \mathrm{const}$, то есть струна однородна, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x),$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(t,x) = \frac{p(t,x)}{\rho}.$$

Если внешняя сила отсутствует, то $p(t,x) = 0$ и получаем *уравнение свободных колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Такое уравнение рассматривали еще в XVIII веке Даниил Бернулли, Даламбер и Эйлер.

Известно, что для полного определения движения струны необходимо знать начальное положение и начальную скорость всех точек струны:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Эти условия называются *начальными условиями.*

Далее, так как струна ограничена, нужно указать, что происходит на еч концах. Так, для закрепленной струны на еч концах ($x = 0, x = l$) должны выполняться условия

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0$$

для любого $t \geq 0$. Эти условия называются *краевыми* или *граничными условиями.*

Математическая постановка задачи о колебании струны с закрепленными концами: *найти в* $Q_T = (t_0, t_1) \times (0, l)$ *такое решение* $u(t, x)$ *уравнения*

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(t, x),$$

которое удовлетворяло бы начальным условиям

$$u(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad u_t(t_0, x) = \varphi_1(x), \quad x \in [0, l],$$

и граничным условиям

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Если концы не закреплены, а сами приводятся в движение по определенному закону, то

$$u(t, 0) = f_1(t), \quad u(t, l) = f_2(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

3.2. Уравнение колебаний мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку.

Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости переменных xy и занимает некоторую область Ω, ограниченную замкнутой кривой L. Будем предполагать, что мембрана находится под действием равномерного натяжения T, приложенного к краям мембраны. То есть если провести линию по мембране в любом направлении, то сила взаимодействия между двумя частицами, разделенными элементами линии, пропорциональна длине элемента и перпендикулярна его направлению; величина силы, действующей на элемент ds линии, будет равна Tds.

Будем рассматривать только *поперечные колебания* мембраны, при которых каждая ее точка движется перпендикулярно плоскости переменных xy параллельно оси u. Смещение u точки (x, y) мембраны есть функция от t и x, y: $u = u(t, x, y)$.

Будем рассматривать только малые колебания мембраны, считая, что функция $u(t, x, y)$ и ее частные производные по x и y малы, так что квадратами и произведениями их можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок σ мембраны, ограниченный в положении равновесия кривой l. Когда мембрана будет выведена из положения равновесия, этот участок мембраны деформируется в участок σ' поверхности мембраны, ограниченный пространственной кривой l'. Площадь участка σ' в момент времени t равна

$$\sigma' = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \approx \iint\limits_{\sigma} dx\, dy = \sigma,$$

то есть изменением площади произвольно взятого участка мембраны в процессе колебаний можно пренебречь и мембрана будет находиться под действием первоначального натяжения T.

Рассмотрим произвольный участок σ' мембраны. Со стороны остальной части мембраны на этот участок действует направленное по нормали к контуру l' равномерно распределенное натяжение T, лежащее в касательной плоскости к поверхности мембраны. Найдем проекцию на ось u сил натяжения, приложенных к кривой l', ограничивающей участок σ' мембраны. Обозначим через ds' элемент дуги кривой l'. На этот элемент действует натяжение, равное по величине Tds'. Косинус угла, образованного вектором натяжения T с осью Ou, равен, в силу наших предположений, $\frac{\partial u}{\partial n}$, где n - направление нормали к кривой l. Тогда проекция на ось u сил натяжения, приложенных к элементу ds' контура l', равна $T\frac{\partial u}{\partial n}ds'$, и проекция на ось u сил натяжения, приложенных ко всему контуру l', равна $T\int\limits_{l'} \frac{\partial u}{\partial n} ds'$. Считая, что при малых колебаниях $ds \approx ds'$, путь интегрирования l' в этом интеграле можем заменить на l. Тогда, применяя формулу Грина, получим равенство

$$T\int\limits_{l} \frac{\partial u}{\partial n} ds = T\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy.$$

Обозначим через $p(t, x, y)$ внешнюю силу, действующую на мембрану параллельно оси u и рассчитанную на единицу площади. Тогда проекция на ось u внешней силы, действующей на участок σ' мембраны, будет равна

$$\iint\limits_{\sigma} p(t, x, y)\, dx\, dy.$$

Эти силы должны в любой момент времени t уравновешиваться силами инерции участка σ' мембраны

$$-\iint\limits_{\sigma} \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx\, dy,$$

где $\rho(x, y)$ - поверхностная плотность мембраны.

Отсюда получаем равенство

$$\iint\limits_{\sigma} \left[\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - p(t, x, y)\right] dx\, dy = 0.$$

В силу произвольности площадки σ следует, что

$$\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(t, x, y).$$

Это есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны.

В случае однородной мембраны $\rho = \text{const}$ уравнение малых колебаний мембраны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(t, x, y),$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad f(t,x,y) = \frac{p(t,x,y)}{\rho}.$$

Если внешняя сила отсутствует, то есть $p(t,x,y) = 0$, получаем уравнение *свободных колебаний* однородной мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Известно, что для полного определения движения мембраны необходимо знать в начальный момент времени $t = 0$ смещение и скорость всех точек мембраны

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x,y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,y).$$

Далее, так как на контуре L мембрана закреплена, то должно выполняться условие

$$u|_L = 0$$

при любом $t \geq 0$.

3.3. Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле

Рассмотрим твердое тело, температура которого в точке (x,y,z) в момент времени t определяется функцией $u(t,x,y,z)$. Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность S внутри тела и на ней малый элемент ΔS. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент ΔS за время Δt, пропорционально $\Delta t \cdot \Delta S$ и нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, то есть

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \cdot \Delta t = -k \Delta S \cdot \Delta t \, \mathrm{grad}_n u,$$

где $k > 0$ — коэффициент внутренней теплопроводности, а n — нормаль к элементу поверхности ΔS в направлении движения тепла. Будем считать, что тело изотропно в отношении теплопроводности, то есть коэффициент внутренней теплопроводности k зависит только от точки (x, y, z) и не зависит от направления нормали к поверхности S в этой точке.

Обозначим через q *тепловой поток*, то есть количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности за единицу времени. Тогда

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Для вывода уравнения распространения тепла выделим внутри тела произвольный объем V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени (t_1, t_2). Очевидно, что через поверхность S за промежуток времени (t_1, t_2) входит количество тепла, равное

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S.

Рассмотрим элемент объема ΔV. На изменение температуры этого объема на Δu за промежуток времени Δt нужно затратить количество тепла

$$\Delta Q_2 = [u(t + \Delta t, x, y, z) - u(t, x, y, z)]\gamma(x, y, z)\rho(x, y, z)\Delta V,$$

где $\gamma(x, y, z)$, $\rho(x, y, z)$ — теплоемкость и плотность вещества. Тогда количество тепла, необходимое для изменения температуры объема V на $\Delta u = u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z)$, равно

$$Q_2 = \iiint_V [u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z)]\gamma\rho\, dV$$

или

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}\, dV,$$

так как

$$u(t_2, x, y, z) - u(t_1, x, y, z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dt.$$

Предположим, что внутри рассматриваемого тела есть источники тепла. Обозначим через $F(t,x,y,z)$ *плотность* (количество поглощенного или выделяемого тепла в единицу времени в единице объема тела) *тепловых источников*. Тогда количество тепла, выделяемого или поглощаемого в объеме V за промежуток времени (t_1,t_2), будет равно

$$Q_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(t,x,y,z)\,dV.$$

Составим уравнение баланса тепла для выделенного объема V. Очевидно, что $Q_2 = Q_1 + Q_3$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dV = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(t,x,y,z)\,dV,$$

и, применяя формулу Остроградского ко второму интегралу, имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \left[\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\,\operatorname{grad} u) - F(t,x,y,z)\right] dV = 0.$$

Подынтегральная функция непрерывна, объем V и промежуток времени (t_1,t_2) произвольны, значит, для любой точки (x,y,z) рассматриваемого тела и для любого момента времени t должно выполняться

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\,\operatorname{grad} u) + F(t,x,y,z).$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела.*

Если тело однородно, то γ, ρ и k — постоянные и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(t,x,y,z),$$

где

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \quad f(t,x,y,z) = \frac{F(t,x,y,z)}{\gamma\rho}.$$

Если в рассматриваемом однородном теле нет источников тепла, то есть $F(t, x, y, z) = 0$, получаем *однородное* уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Если температура зависит только от координат t, x, y (например, при распространении тепла в очень тонкой однородной пластине), то уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Для тела линейного размера, например для однородного стержня, уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

В двух последних случаях не учитывается тепловой обмен между поверхностью пластины или стержня с окружающей средой.

Для определения температуры внутри тела в любой момент времени необходимо знать распределение температуры внутри тела в начальный момент времени $t = 0$ (*начальное условие*) и тепловой режим на границе Γ тела (*граничное условие*).

Граничное условие может быть задано различными способами.

1. В каждой точке поверхности Γ задается температура

$$u|_{\Gamma} = \psi_1(t, P),$$

где $\psi_1(t, P)$ — известная функция времени $t \geq 0$ и точки P поверхности Γ.

2. На поверхности Γ задается тепловой поток

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \psi_2(t, P),$$

где $\psi_2(t, P)$ — известная функция.

3. На поверхности Γ твердого тела происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой u_0 известна. Для упрощения задачи закон теплообмена может быть принят в виде закона Ньютона.

Количество тепла, передаваемое в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды

$$q = H(u - u_0),$$

где H — коэффициент теплообмена. Для простоты будем считать его постоянным. По закону сохранения энергии это количество тепла должно быть равно тому количеству тепла, которое передается через единицу площади поверхности за единицу времени вследствие внутренней теплопроводности. Тогда граничное условие можно записать в виде

$$H(u - u_0) = -k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma},$$

где n — внешняя нормаль к поверхности Г. Условие можно переписать в следующем виде, приняв $h = \frac{H}{k}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0)\right)\bigg|_{\Gamma} = 0.$$

Задача о распространении тепла в однородном изотропном твердом теле ставится так: найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(t, x, y, z),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

и одному из указанных выше граничных условий.

3.4. Уравнение Лапласа

Допустим, что температура в каждой точке (x, y, z) внутри тела установилась, то есть она не меняется с течением времени и внутри тела нет источников тепла. Тогда $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением Лапласа*, и ему удовлетворяет установившаяся в однородном теле температура $u(x, y, z)$. Для определения $u(x, y, z)$ уже не надо задавать начальное распределение температуры (начальное условие), достаточно задать одно граничное условие, не зависящее от времени.

Задача определения решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

по его значениям на границе Γ рассматриваемой области D $u|_\Gamma = \varphi(P)$ называется *задачей Дирихле.*

Задача определения решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

удовлетворяющего граничному условию $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \varphi(P)$, называется *задачей Неймана.*

Задачи и упражнения

3.1. Найти статический прогиб струны, закрепленной на концах, под действием непрерывно распределенной нагрузки (на единицу длины).

3.2. Начиная с момента времени $t = 0$ один конец прямолинейного упругого однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому приложена сила $\Phi(t)$, направленная по оси стержня. В момент времени $t = 0$ поперечные сечения стержня были неподвижны и находились в неотклоненном положении. Поставить краевую задачу для определения малых продольных отклонений точек стержня при $t > 0$.

3.3. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах, в среде с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости.

3.4. Во внутренних точках $x = x_i$, $i = 1, ..., m$ на струне сосредоточены массы m_i, $i = 1, ..., m$. Поставить краевую задачу для определения малых поперечных колебаний струны при произвольных начальных данных. Концы струны закреплены.

3.5. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой однородной струны относительно вертикального положения равновесия, если верхний ее конец жестко закреплен, а нижний – свободен.

3.6. Поставить краевую задачу о колебании круглой однородной мембраны, закрепленной по краю, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. В момент времени $t = 0$ к поверхности мембраны приложена внешняя сила плотности $f(t, r, \varphi)$, действующая перпендикулярно плоскости невозмущенной мембраны. Начальные скорости и отклонения точек мембраны отсутствуют.

3.7. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью; рассмотреть случаи:

а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре,

б) на концах стержня поддерживается заданный тепловой поток,

в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

3.8. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого $f(x)$. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на конце $x = 0$ поддерживается постоянная температура u_0, а на боковой поверхности и на конце $x = l$ происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры.

3.9. Поставить задачу об определении температуры в бесконечном тонком теплоизолированном стержне, по которому с момента $t = 0$ в положительном направлении со скоростью v_0 начинает двигаться точечный тепловой источник, дающий q единиц тепла в единицу времени.

3.10. Поставить краевую задачу об остывании тонкого однородного кольца радиуса R, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

3.11. Внутри однородного шара начиная с момента времени $t = 0$ действуют источники тепла с равномерно распределенной постоянной плотностью Q. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ внутри шара, если начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки до центра шара. Рассмотреть случаи:

а) на поверхности шара поддерживается нулевая температура,

б) на поверхности шара происходит теплообмен (по закону Ньютона) с окружающей средой нулевой температуры.

3.12. Поставить задачу о движении полуограниченной струны ($0 \leq x < \infty$) при $t > 0$, если при $t > 0$ по ней бежит волна $u(t, x) = f(x + at)$, а конец струны $x = 0$ закреплен жестко.

3.13. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях мембраны, к которой приложено нормальное давление P на единицу площади, если в невозмущенном состоянии мембрана является плоской, а окружающая среда не оказывает сопротивления колебаниям мембраны. Рассмотреть случаи:

а) мембрана жестко закреплена на границе L,

б) мембрана свободна на L,

в) на части L_1 границы L мембрана закреплена жестко, а на остальной части L_2 границы L она свободна.

Задания, помеченные символом '', предназначены для самостоятельной работы и приведены без ответов.*

3.14.* Дана тонкая прямоугольная пластина со сторонами l, m, для которой известно начальное распределение температуры. Поставить краевую задачу о распределении тепла в пластине, если боковые стороны поддерживаются при температуре

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad u|_{y=m} = \varphi_2(x),$$

$$u|_{x=0} = \psi_1(y), \quad u|_{x=l} = \psi_2(y).$$

3.15.* Начальное распределение температуры в однородном шаре задано функцией $f(r, \theta, \varphi)$. Поставить краевую задачу о распределении тепла в шаре, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре u_0.

3.16.* На плоскую мембрану, ограниченную кривой L, действует стационарная поперечная нагрузка с плотностью $f(x, y)$. Поставить краевую задачу об отклонении точек мембраны от плоскости, если:

а) мембрана закреплена на краю,

б) край мембраны свободен,

в) край мембраны закреплен упруго.

3.17.* Дан цилиндр с радиусом основания R и высотой h. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры внутри цилиндра, если температура верхнего и нижнего оснований есть заданная функция от r, а боковая поверхность:

а) теплоизолирована,

б) имеет температуру, зависящую только от z,

в) свободно охлаждается в среде нулевой температуры.

4. Краевые задачи для уравнений гиперболического типа

В цилиндрической области $Q_T = \{(t,x) \mid 0 < t < T, x \in \Omega, (\Omega \subset E^m)\}$ рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$u_{tt} = \operatorname{div}(p(x)\nabla u) - q(x)u + f(t,x), \tag{4.1}$$

где $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $f(t,x)$ – известные функции.

Зададим начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x), \qquad x \in \overline{\Omega} \tag{4.2}$$

и граничные условия

$$(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n})|_{S_T} = \varphi(t,x), \qquad (t,x) \in S_T, \quad S_T = [0,T] \times \partial\Omega, \tag{4.3}$$

где $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi(t,x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — заданные функции, n – внешняя единичная нормаль к S_T. В случае $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ задачу (4.1) – (4.3) называют *третьей краевой задачей*. В случае $\alpha > 0$, $\beta = 0$, (4.1) – (4.3) – *первая краевая задача*, а в случае $\alpha = 0$, $\beta > 0$, (4.1) – (4.3) – *вторая краевая задача*.

Функция $u(t,x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$ называется *классическим решением* задачи (4.1) – (4.3), если она удовлетворяет в Q_T уравнению (4.1), при $t = 0$ – начальным условиям (4.2), а на S_T – граничному условию (4.3).

Заметим, что для существования классического решения задачи (4.1) – (4.3) необходимо, чтобы функции $p(x)$, $u_0(x)$ были непрерывно дифференцируемыми на $\overline{\Omega}$, функции $q(x)$, $u_1(x)$ были непрерывными на $\overline{\Omega}$, функция $f(t,x)$ непрерывна в $\overline{Q}_T$ и выполнялось условие согласования

$$(\alpha u_0 + \beta\frac{\partial u_0}{\partial n})|_{\partial\Omega} = \varphi(0,x). \tag{4.4}$$

Пример 4.1. *Найти решение уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (t,x) \in (0,T) \times (0,l), \tag{4.5}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in [0,l], \tag{4.6}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \qquad 0 \le t \le T. \tag{4.7}$$

Решение. Считаем, что выполнены условия согласования: $u_0(0) = 0, \quad u_0(l) = 0.$

Будем искать (неравное тождественно нулю) решение задачи (4.5) – (4.7) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от t, то есть $u(t,x) = T(t)X(x)$. Подставляя это выражение в уравнение (4.5), имеем

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x),$$

откуда, разделив переменные, получим

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Последнее равенство двух отношений, одно из которых зависит лишь от x, другое – лишь от t, возможно только в случае, когда оба отношения равны постоянному числу, которое обозначим через $-\lambda$: $\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$, откуда

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(x) \ne 0, \tag{4.8}$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \qquad T(t) \ne 0. \tag{4.9}$$

Из граничных условий (4.7) получаем

$$u(t,0) = T(t)X(0) = 0, \qquad u(t,l) = T(t)X(l) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{4.10}$$

так как иначе мы имели бы $T(t) \equiv 0$ и $u(t,x) \equiv 0$.

Задача (4.8), (4.10) – задача Штурма – Лиувилля, в которой требуется найти все значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (4.8), (4.10), а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им решения — собственными функциями.

Рассматривая отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен (см. с.85 [2]), находим, что нетривиальные решения задачи (4.8), (4.10) возможны лишь при значениях $\lambda = \lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2$, $k = 1, 2, \ldots$.

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции $X_k = \sin(\frac{\pi k}{l} x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрев уравнение (4.9) при найденных λ_k, получаем, что его решение имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos(\frac{a\pi k}{l} t) + B_k \sin(\frac{a\pi k}{l} t),$$

где A_k, B_k – константы.

Функции $u_k(t,x) = T_k \cdot X_k = (A_k \cos(\frac{a\pi k}{l} t) + B_k \sin(\frac{a\pi k}{l} t)) \cdot \sin(\frac{\pi k}{l} x)$, $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют уравнению (4.5) и граничным условиям (4.7).

В силу линейности и однородности уравнения (4.5) сумма частных решений $u_k(t,x)$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\frac{a\pi k}{l} t) + B_k \sin(\frac{a\pi k}{l} t)) \cdot \sin(\frac{\pi k}{l} x) \tag{4.11}$$

также удовлетворяет уравнению (4.5) и граничным условиям (4.7).

При этом предполагается, что сам ряд и ряды, полученные его формальным дифференцированием по t и по x дважды, сходятся равномерно в $[0,T] \times [0,l]$.

Осталось определить константы A_k, B_k таким образом, чтобы были выполнены начальные условия (4.6). Для этого должны быть выполнены равенства

$$
\begin{aligned}
u(0,x) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\tfrac{\pi k}{l}x,\\
u_t(0,x) = u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{kt}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{a\pi k}{l} B_k \sin\tfrac{\pi k}{l}x.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Пусть функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ разлагаются в ряд Фурье по системе функций $\{\sin\frac{\pi k}{l}x\}$, то есть

$$
u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{\pi k}{l}x,
$$

где

$$
\alpha_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi k}{l}x dx, \quad \beta_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_1(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\, dx. \tag{4.13}
$$

Сравнивая ряды (4.13) с рядами (4.12), приходим к выводу, что для выполнения начальных условий нужно положить $A_k = \alpha_k$, $B_k = \frac{l}{\pi k a}\beta_k$.

Тогда ряд

$$
u = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos\frac{a\pi k}{l}t + \frac{l}{a\pi k}\beta_k \sin\frac{a\pi k}{l}t)\sin\frac{\pi k}{l}x \tag{4.14}
$$

есть решение задачи (4.5) – (4.7).

Замечание. Чтобы формула (4.14) определяла классическое решение задачи (4.5) – (4.7), достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

— производные функции $u_0(x)$ до второго порядка включительно непрерывны, производная третьего порядка кусочно – непрерывна и

$$
u_0(0) = u_0(l) = 0, \qquad u_0''(0) = u_0''(l) = 0;
$$

— функция $u_1(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно непрерывную вторую производную и

$$
u_1(0) = u_1(l).
$$

Более подробно см. с. 92 – 96[2].

Пример 4.2. *Найти решение неоднородного уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,T)\times(0,l) \tag{4.5$'$}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in [0,l],$$
$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \qquad 0 \le t \le T.$$

Решение. Будем искать решение задачи в виде ряда Фурье

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\frac{\pi k}{l} x, \tag{4.15}$$

считая, что $f(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{\pi k}{l}x$. Подставляя (4.15) в (4.5') и учитывая разложение $f(t,x)$ в ряд Фурье, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi k}{l} x(-a^2(\frac{\pi k}{l})^2 u_k(t) - u_k''(t) + f_k(t)) = 0.$$

Отсюда следует, что $u_k(t)$ является решением уравнения

$$u_k''(t) + a^2(\frac{\pi k}{l})^2 u_k(t) = f_k(t). \tag{4.16}$$

Здесь $f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(t,x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx$.

Начальные условия для функции $u(t,x)$, определяемой формулой (4.15), имеют вид

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin\tfrac{\pi k}{l}x = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin\tfrac{\pi k}{l}x,$$
$$u_t(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0)\sin\tfrac{\pi k}{l}x = u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin\tfrac{\pi k}{l}x,$$

где α_k, β_k определяются формулами (4.13).

Из последних соотношений следует, что $u_k(t)$ должна удовлетворять условиям

$$u_k(0) = \alpha_k, \qquad u_k'(0) = \beta_k. \tag{4.17}$$

Заметим, что функция $u_k(t)$ полностью определяется соотношениями (4.16), (4.17). Следовательно, решение задачи (4.5'), (4.6), (4.7) найдено.

Перейдем к рассмотрению общего случая: уравнение (4.5'), начальные условия (4.6) и граничные условия

$$u(t,0) = \mu_1(t), \qquad u(t,l) = \mu_2(t). \tag{4.7'}$$

Решение задачи (4.5'), (4.6), (4.7') будем искать в виде

$$u(t,x) = v(t,x) + \gamma(t,x),$$

где $\gamma(t,x)$ подбирается таким образом, чтобы $\gamma(t,0) = \mu_1(t)$, $\gamma(t,l) = \mu_2(t)$. В качестве $\gamma(t,x)$ можно взять, например, функцию $\gamma(t,x) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$.

Функция $v(t,x)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(t,x) - [\gamma_{tt} - a^2\gamma_{xx}], \\ v(0,x) = u_0(x) - \gamma(0,x), \qquad v_t(0,x) = u_1(x) - \gamma_t(0,x), \\ v(t,0) = v(t,l) = 0. \end{gathered}$$

Таким образом, общая краевая задача (4.5'), (4.6), (4.7') для функции $u(t,x)$ сведена к краевой задаче для функции $v(t,x)$ с нулевыми граничными условиями, метод решения которой изложен выше.

Задачи и упражнения

В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ решить задачи со следующими условиями:

4.1. $u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = \sin\frac{2\pi x}{l}$.
4.2. $u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x)$.
4.3. $u(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad u(0,x) = sin\frac{5\pi x}{2l}, \quad u_t(0,x) = \sin\frac{\pi x}{2l}$.
4.4. $u(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad u(0,x) = x,$
$u_t(0,x) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}$.
4.5. $u_x(t,0) = u(t,l) = 0, \quad u(0,x) = \cos\frac{\pi x}{2l},$
$u_t(0,x) = \cos\frac{3\pi x}{2l} + \cos\frac{5\pi x}{2l}$.
4.6. $u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad u(0,x) = x, \quad u_t(0,x) = 1$.

В полуполосе $0 < x < l, t > 0$ решить задачи для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x)$ с начальными условиями $u(0,x) = u_t(0,x) =$

0 **и следующими краевыми условиями (A=const) и правыми частями:**

4.7. $u(t,0)=u(t,l)=0, \quad f(t,x)=Ae^{-t}\sin\frac{\pi x}{l}.$
4.8. $u_x(t,0)=u(t,l)=0, \quad f(t,x)=Ae^{-t}\cos\frac{\pi x}{2l}.$

Найти решения задач:

4.9. $u_{tt}=a^2u_{xx}+b\cdot \text{sh}x, \quad 0<x<l,\ t>0, \quad b=const,$
$u(t,0)=u(t,l)=u(0,x)=u_t(0,x)=0.$
4.10. $u_{tt}=u_{xx}+x(x-l)t^2$, $0<x<l$, $t>0$, $u(t,0)=u(t,l)=0$
$u(0,x)=u_t(0,x)=0.$
4.11. $u_{tt}=u_{xx}$, $0<x<\pi, t>0, \quad u(t,0)=t^2$, $u(t,\pi)=t^3$,
$u(0,x)=\sin x, \quad u_t(0,x)=0.$
4.12. $u_{tt}=u_{xx}, 0<x<\pi, t>0, u(t,0)=t, u_x(t,\pi)=1,$
$u(0,x)=\sin\frac{x}{2}, \quad u_t(0,x)=1.$
4.13. $u_{xx}=u_{tt}, 0<x<l, t>0; \quad u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=t;$
$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0.$
4.14. $u_{xx}=u_{tt}$, $0<x<1, t>0; \quad u|_{x=0}=t+1, \quad u|_{x=1}=t^3+2;$
$u|_{t=0}=x+1$, $u_t|_{t=0}=0.$
4.15. $u_{tt}=u_{xx}-4u$, $0<x<1, t>0; \quad u|_{x=0}=u|_{x=1}=0;$
$u|_{t=0}=x^2-x$, $u_t|_{t=0}=0.$
4.16. $u_{tt}+2u_t=u_{xx}-u$, $0<x<\pi, t>0; \quad u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=0;$
$u|_{t=0}=\pi x-x^2$, $u_t|_{t=0}=0.$
4.17. $u_{tt}+2u_t=u_{xx}-u$, $0<x<\pi, t>0; \quad u_x|_{x=0}=0;$
$u|_{x=\pi}=0; \quad u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=x.$
4.18. $u_{tt}+u_t=u_{xx}$, $0<x<1, t>0; \quad u|_{x=0}=t; \quad u|_{x=1}=0;$
$u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=1-x.$
4.19. $u_{tt}=u_{xx}+u$, $0<x<2, t>0; \quad u|_{x=0}=2t,$
$u|_{x=2}=0, \quad u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0.$
4.20. $u_{tt}=u_{xx}+u$, $0<x<l, t>0; \quad u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=t;$
$u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=\frac{x}{l}.$
4.21. $u_{tt}=u_{xx}+x$, $0<x<\pi, t>0; \quad u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=0;$
$u|_{t=0}=\sin 2x, \quad u_t|_{t=0}=0.$

Задания, помеченные символом '', предназначены для самостоятельной работы и приведены без ответов.*

4.22.* В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ решить задачу со следующими условиями:

$u_x(t,0) = u_x(t,l) + hu(t,l) = 0$, $u(0,x) = 0$, $\quad u_t(0,x) = 1$.

4.23.* Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$, $x = l$, имеющая в начальный момент времени форму $u(0,x) = \frac{16}{5}h\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l}\right]$, где h — достаточно малое число, начала колебаться без начальной скорости. Найти свободные колебания струны.

Найти решения задач

4.24.* $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 < r < R, \quad t > 0,$
$|u(t,0)| < \infty, \quad u(t,R) = 0, \quad u(0,r) = \varphi(r),$
$u_t(0,r) = \psi(r).$

4.25.* $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 < r < R, \quad t > 0,$
$|u(t,0)| < \infty, \quad u(t,R) = U\sin\omega t, \quad u(0,r) = u_t(0,r) = 0,$
$U - \text{const}.$

5. Краевые задачи для уравнений параболического типа

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = div(p(x)\nabla u) - q(x)u + f(t,x), \quad x \in \Omega \subset E^m, \quad t \in (0,T),$$

где $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $f(t,x)$ - заданные функции. Если $p(x)$ —постоянная, то уравнение примет вид

$$u_t = a^2\Delta u - q(x)u + f(t,x), \quad x \in \Omega \subset E^m, \quad t \in (0,T),$$

где $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ – оператор Лапласа, $a = \sqrt{p}$.

Краевые задачи для уравнения теплопроводности ставятся следующим образом:

найти функцию $u(t,x) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению в области $Q_T = (0,T) \times \Omega$, начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}$$

и граничному условию

$$\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{S_T} = \varphi(t,x), \quad S_T = [0,T] \times \partial\Omega,$$

где $\alpha(x) \geq 0$, $\beta(x) \geq 0$, $\varphi(t,x)$ — заданные функции на S_T, n — внешняя нормаль к S_T.

В этом случае функция $u(t,x)$ называется *классическим решением краевой задачи*. Если задана первая краевая задача, то достаточно, чтобы функция $u(t,x) \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$.

1. В случае $\alpha = 1$, $\beta = 0$ имеем краевые условия первого рода (*первая краевая задача*).

2. В случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$ имеем краевые условия второго рода (*вторая краевая задача*).

3. В случае $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ имеем краевые условия третьего рода (*третья краевая задача*).

Если выполнены необходимые условия гладкости

$$p(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad q(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad f(t,x) \in C(Q_T),$$

$$u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \varphi(t,x) \in C(S_T),$$

и условие согласования

$$\left(\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n}\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \varphi(0,x),$$

то краевая задача имеет единственное решение [2].

Пример 5.1. *Найти решение уравнения*

$$u_t = u_{xx}, \qquad (t,x) \in (0,T) \times (0,l),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [0,l],$$

$$u_x(t,0) = 0, \qquad u_x(t,l) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Решение. Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x),$$

где $X_k(x)$ — решения задачи Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0,l),$$

$$X'(0) = 0, \qquad X'(l) = 0.$$

Для функций $T_k(t)$ будем иметь уравнения

$$T'_k(t) + \lambda_k T_k(t) = 0, \quad t > 0.$$

Решение $u(t, x)$ записывается в виде

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

где $\alpha_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\,dx$, $\alpha_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\cos\frac{\pi k}{l}x\,dx$, $X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$, $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, ...$

Подставляя этот ряд в исходное уравнение и учитывая разложение $f(t, x)$ в ряд Фурье, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi k}{l}x(-a^2(\frac{\pi k}{l})^2 u_k(t) - u''_k(t) + f_k(t)) = 0.$$

Отсюда следует, что $u_k(t)$ является решением уравнения

$$u''_k(t) + a^2(\frac{\pi k}{l})^2 u_k(t) = f_k(t).$$

Здесь $f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(t, x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx$.

Если граничные условия неоднородны, то необходимо выполнить замену искомой функции так, чтобы граничные условия для нее были однородными.

Пример 5.2. *Найти решение первой краевой задачи*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(0, x) = Ax/l, \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = Ae^{-t}, \quad A = const.$$

Решение. Нам нужно найти решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Граничные условия неоднородные, поэтому введем новую функцию $v(t, x)$ так, что $u(t, x) = v(t, x) + \frac{x}{l}Ae^{-t}$. Для новой функции имеем задачу с однородными краевыми условиями

$$v_t = a^2 v_{xx} + \frac{x}{l}Ae^{-t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$v(0,x)=0, \quad v(t,0)=0, \quad v(t,l)=0, \quad A=\text{const}.$$

Задача Штурма - Лиувилля, соответствующая рассматриваемой краевой задаче, имеет вид

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad x\in(0,l),$$

$$X(0)=0, \quad X(l)=0.$$

Нетривиальное решение полученной задачи возможно только при $\lambda>0$, при этом

$$X(x)=c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}x),$$

подставляя краевые условия

$$X(0)=c_2=0,$$

$$X(l)=c_1\sin(\sqrt{\lambda}l)=0,$$

получаем $\sqrt{\lambda}l=\pi k$, $k=1,2,...$ и

$$X_k(x)=c_k\sin(\frac{\pi k}{l}x).$$

Решение ищем в виде ряда

$$v(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x),$$

где $X_k(x)$ — решения задачи Штурма-Лиувилля

Чтобы получить уравнение для $T_k(t)$, разложим функцию $\frac{x}{l}Ae^{-t}$ в ряд Фурье по системе функций $\{\sin(\frac{\pi k}{l}x)\}$ $(k=1,2,...)$ на отрезке $(0,l)$.

$$\frac{x}{l}Ae^{-t}=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(\frac{\pi k}{l}x),$$

где $b_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\frac{x}{l}Ae^{-t}\sin(\frac{\pi k}{l}x)\,dx=\frac{2Ae^{-t}}{l^2}\int\limits_0^l x\sin(\frac{\pi k}{l}x)\,dx=(\text{по частям})=\frac{2Ae^{-t}}{l^2}\cdot\left(-x\frac{l}{k\pi}\cos(\frac{\pi k}{l}x)\right)\Big|_0^l+\int\limits_0^l\frac{l}{k\pi}\cos(\frac{\pi k}{l}x)\,dx=-\frac{2Ae^{-t}}{k\pi}\cos(\pi k)=(-1)^{k+1}\frac{2Ae^{-t}}{k\pi}$, $k=1,2,\ldots$.

Подставляя функцию $v(t,x)$, определенную выше в виде ряда Фурье, и разложение в ряд Фурье функции $\frac{x}{l}Ae^{-t}$ в уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k' + a^2 T_k \frac{(k\pi)^2}{l^2}\right)\sin(\frac{\pi k}{l}x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2Ae^{-t}}{k\pi}\sin(\frac{\pi k}{l})x.$$

В силу единственности разложения функции в ряд Фурье

$$T_k' + a^2\frac{(k\pi)^2}{l^2}T_k = (-1)^{k+1}\frac{2Ae^{-t}}{k\pi}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, его решение (при $(ak\pi)^2 \neq l^2$)

$$T_k(t) = (-1)^{k+1}\frac{2A}{k\pi}\frac{l^2}{(ak\pi)^2 - l^2}e^{-t} + c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t},$$

и

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\frac{2A}{k\pi}\frac{l^2}{(ak\pi)^2 - l^2}e^{-t} + c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\right)\sin\frac{k\pi}{l}x = 0.$$

Учитывая начальное условие для $v(t,x)$, получим

$$v(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)X_k(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\frac{2A}{k\pi}\frac{l^2}{(ak\pi)^2 - l^2} + c_k\right)\sin\frac{k\pi}{l}x = 0.$$

Откуда $T_k(0) = (-1)^{k+1}\frac{2A}{k\pi}\frac{l^2}{(ak\pi)^2 - l^2} + c_k = 0$.

Таким образом, $c_k = (-1)^k\frac{2A}{k\pi}\frac{l^2}{(ak\pi)^2 - l^2}$ и решение исходной задачи имеет вид

$$u(t,x) = \frac{Axe^{-t}}{l} + \frac{2Al^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\left[e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2} - e^{-t}\right]}{k(k^2\pi^2a^2 - l^2)}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Задачи и упражнения

В полуполосе $0 < x < l, t > 0$ найти решения уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ со следующими условиями:

5.1. $u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad u(0,x) = Ax, \quad A = \text{const}.$
5.2. $u_x(t,0) = u(t,l) = 0, \quad u(0,x) = A(l-x).$
5.3. $u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad u(0,x) = U = \text{const}.$

Найти решения задач:

5.4. $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$, $\beta = \text{const}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
$u(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad u(0,x) = \sin\frac{\pi x}{2l}.$
5.5. $u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$, $u_x(t,0) = u_x(t,l) = q$,
$u(0,x) = Ax$, $A, q = \text{const}.$
5.6. $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u + \sin\frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, t > 0, \beta = \text{const},$
$u(t,0) = u(t,l) = u(0,x) = 0.$
5.7. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l, t > 0, \quad u(t,0) = 0,$
$u_x(t,l) = Ae^{-t}, \quad u(0,x) = T, A, T = \text{const}.$
5.8. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l, t > 0, \quad u(0,x) = \frac{cx(l-x)}{l^2},$
$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad c = \text{const}.$
5.9. $u_t = a^2 u_{xx} + A\omega(\frac{x}{l} - 1)\cos(\omega t), 0 < x < l, t > 0,$
$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad u(0,x) = 0, A, \omega = \text{const}.$
5.10. $u_t = 36 u_{xx} + \frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi x}{2}$, $0 < x < 2, t > 0, \qquad u(0,x) = 0,$
$u(t,0) = 0$, $u_x(t,2) = 0.$
5.11. $u_t = 3u_{xx} - 6u$, $0 < x < 2, t > 0, \quad u(0,x) = x^2 - \frac{3x}{2} + 1,$
$u(t,0) = 1$, $u(t,2) = 2.$
5.12. $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x$, $0 < x < \frac{\pi}{2},$
$u_x|_{x=0} = u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$
5.13. $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t$, $0 < x < 1, \quad u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = t,$
$u|_{t=0} = e^x \sin\pi x.$
5.14. $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad u|_{x=0} = 0,$
$u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1, \quad u|_{t=0} = x.$
5.15. $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x$, $0 < x < \pi,$
$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t$, $u|_{t=0} = 0.$
5.16. $u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t$, $0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 1 + t,$
$u|_{x=\pi} = 1 + t, \quad u|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x.$
5.17. $u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2\cos t$, $0 < x < \pi, \quad u_x|_{x=0} = t^2,$
$u_x|_{x=\pi} = t^2$, $u|_{t=0} = \cos 2x.$

5.18. $u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2 t\cos 3x - 9x^2 - 2$, $0 < x < \pi$,
$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad u|_{t=0} = x^2 + 2.$

5.19. $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x\cos 2x$,
$0 < x < \frac{\pi}{2}$,
$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + \frac{\pi}{2}, u|_{t=0} = x.$

5.20. $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \sin 2x$,
$0 < x < \pi$,
$u_x|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1, \quad u|_{t=0} = x.$

Задания, помеченные символом '', предназначены для самостоятельной работы и приведены без ответов.*

5.21.* $u_t = a^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r), \quad 0 < r < R, \quad t > 0,$
$u(0,r) = f(r), \quad (u_r + hu)|_{r=R} = 0, \quad h = \text{const} > 0,$
$|u| < \infty.$

5.22.* $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$u(0,x) = f(x), \quad u(t,0) = 0, \quad (u_x + hu)|_{x=l} = 0,$
$h = \text{const} > 0.$

5.23.* $u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q}{c}, \quad -R < x < R, \quad t > 0,$
$u(0,x) = 0, \quad u(t,\pm R) = 0, \quad Q, c = \text{const} > 0.$

5.24.* $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,\ u(0,x) = 0,$
$u(t,0) = T, \quad u_x(t,l) + hu(t,l) = U, \quad T, U, h = \text{const}.$

6. Задача Коши для волнового уравнения

Классической задачей Коши для волнового уравнения называется задача о нахождении функции $u(t,x)$ класса $C^2(t > 0) \bigcap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t,x) \tag{6.1}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x), \tag{6.2}$$

где $f(t,x), u_0(x), u_1(x)$ — заданные функции.

Если выполняются условия

$$f \in C^1(t \geq 0), \quad u_0 \in C^2(E^1), \quad u_1 \in C^1(E^1), \quad m = 1;$$

$$f \in C^2(t \geq 0), \quad u_0 \in C^3(E^m), \quad u_1 \in C^2(E^m), \quad m = 2, 3,$$

то решение задачи Коши (6.1)–(6.2) существует, единственно и выражается:

формулой Даламбера

$$u(t,x) = \tfrac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi +$$
$$+\tfrac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau$$

при m=1;

формулой Пуассона

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{u_1(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t \int\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\tau,\xi)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}$$

при m=2;

формулой Кирхгофа

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=at} u_0(\xi)dS\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at} u_1(\xi)dS$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{1}{|\xi-x|} f(t-\frac{|\xi-x|}{a},\xi)d\xi$$

при m=3.

Замечание. Иногда для решения задач Коши с начальными данными специального вида удобнее использовать метод разделения переменных.

Пример 6.1. *Решить задачу*

$$u_{tt} = \Delta u + 3(xy^2 - x^2y + z^2(x-y))t,$$
$$u|_{t=0} = x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = \sin x \cos(y+3z),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Решение. Будем искать решение задачи в виде $u = w(t,x,y,z) + v(t,x,y,z)$, где w есть решение задачи

$$\begin{gathered} w_{tt} = \Delta w + 3(xy^2 - x^2y + z^2(x-y))t, \\ w|_{t=0} = x^2 - y^2, \quad w_t|_{t=0} = 0, \end{gathered} \tag{6.3}$$

а v – решение задачи

$$v_{tt} = \Delta v, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = \sin x \cos(y+3z). \tag{6.4}$$

Так как функции $xy^2 - x^2y + z^2(x-y)$ и $x^2 - y^2$ гармонические, то воспользуемся результатом задачи 6.2 (см. задания ниже)

$$\begin{gathered} w(t,x,y,z) = x^2 - y^2 + 6(xy^2 - x^2y + z^2(x-y)) \int\limits_0^t (t-\tau)\tau\, d\tau = \\ = x^2 - y^2 + t^3(xy^2 - x^2y + z^2(x-y)). \end{gathered}$$

Решение задачи (6.4) будем искать в виде $v(t,x,y,z) = T(t)X(x)G(y,z)$. Тогда $v_t|_{t=0} = T'(0)X(x)G(y,z) = \sin x \cos(y+3z)$. Следовательно, $T'(0) = 1$, $X(x) = \sin x$, $G(y,z) = \cos(y+3z)$ и функция v имеет вид $v(t,x,y,z) = T(t)\sin x \cos(y+3z)$. Подставляя v в уравнение и рассматривая для v начальное условие при $t = 0$, получим, что $T(t)$ является решением задачи Коши

$$T'' = 11T, \quad T(0) = 0, \quad T'(0) = 1.$$

Найдем это решение $T(t) = \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t$, $v(t,x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t \cdot \sin x \cos(y+3z)$ и решением исходной задачи будет функция

$$u(t,x,y,z) = w + v = x^2 - y^2 + t^3(xy^2 - x^2y + z^2(x-y)) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t \sin x \cos(y+3z).$$

Задачи и упражнения

6.1. Пусть функция $u(t,x)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u; \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

Доказать,что функция $v(t,x) = \int\limits_0^t u(\tau,x)d\tau$ будет решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2\Delta v; \qquad v|_{t=0} = 0, \qquad v_t|_{t=0} = \varphi(x).$$

6.2. Доказать,что если функции $h(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$– гармонические в E^m, а $g(t) \in C^1(t \geq 0)$,то решение задачи Коши $u_{tt} = a^2\Delta u + g(t)h(x)$, $\quad u|_{t=0} = u_0(x)$, $\quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$ выражается формулой

$$u(t,x) = u_0(x) + tu_1(x) + h(x)\int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Указание. Функция $f(x) \in C^2(\Omega)$ называется гармонической в области $\Omega \subset E^m$ изменения аргумента x, если верно равенство $\Delta u(x) = 0$ для любого $x \in \Omega$.

6.3. Доказать,что если $u_0(x) = \sum\limits_{i=1}^m u_0^i(x_i)$, $u_1(x) = \sum\limits_{i=1}^m u_1^i(x_i)$, $u_0^i(x_i) \in C^2(R^1)$, $u_1^i(x_i) \in C^1(R^1)$, $f(t,x) \equiv 0$, то решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u; \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

есть сумма решений одномерных задач, которые находятся по формуле Даламбера при f=0.

6.4. Показать, что если $b(x_1) \in C^2(R^1)$, а $g(x_2,x_3)$– гармоническая функция,то решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u; \quad u|_{t=0} = b(x_1)g(x_2,x_3), \quad u_t|_{t=0} = 0$$

определяется выражением

$$u(t,x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}g(x_2,x_3)[b(x_1+at) + b(x_1-at)].$$

6.5. Пусть функция $u(t,t_0,x)$ при каждом фиксированном $t_0 \geq 0$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\triangle u, \quad u|_{t=t_0} = 0, \quad u_t|_{t=t_0} = f(t_0,x).$$

Доказать, что функция $v(t,t_0,x) = \int_{t_0}^t u(t,\tau,x)d\tau$ будет решением задачи Коши

$$v_{tt} = a^2\triangle v + f(t,x); \quad v|_{t=t_0} = 0, \quad v_t|_{t=t_0} = 0.$$

Решить задачи (m=1)

6.6. $u_{tt} = u_{xx} + 6; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 4x.$
6.7. $u_{tt} = 4u_{xx} + xt; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x.$
6.8. $u_{tt} = u_{xx} + \sin x; \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$
6.9. $u_{tt} = u_{xx} + e^x; \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + \cos x.$
6.10. $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x; \quad u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = 1.$
6.11. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$
6.12. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$

Решить задачи (m=2)

6.13. $u_{tt} = \triangle u + 2; \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = y.$
6.14. $u_{tt} = \triangle u + 6xyt; \quad u|_{t=0} = x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = xy.$
6.15. $u_{tt} = \triangle u + x^3 - 3xy^2; \quad u|_{t=0} = e^x \cos y, \quad u_t|_{t=0} = e^y \sin x.$
6.16. $u_{tt} = \triangle u + t \sin y; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = \sin y.$
6.17. $u_{tt} = 2\triangle u; \quad u|_{t=0} = 2x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2.$
6.18. $u_{tt} = 3\triangle u + x^3 + y^3; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = y^2.$
6.19. $u_{tt} = \triangle u + e^{3x+4y}; \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = e^{3x+4y}.$
6.20. $u_{tt} = a^2 \triangle u + e^t(x^2 - y^2); \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$
6.21. $u_{tt} = \triangle u; \quad u|_{t=0} = x^2 y, \quad u_t|_{t=0} = xy^2.$

Решить задачи (m=3)

6.22. $u_{tt} = \triangle u + 2xyz; \quad u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad u_t|_{t=0} = 1.$
6.23. $u_{tt} = 8\triangle u + t^2 x^2; \quad u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = z^2.$
6.24. $u_{tt} = 3\triangle u + 6r^2; \quad u|_{t=0} = x^2 y^2 z^2, \quad u_t|_{t=0} = xyz, r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$
6.25. $u_{tt} = \triangle u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z; \quad u|_{t=0} = e^{x+y} \cos z\sqrt{2},$
$u_t|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x.$
6.26. $u_{tt} = \triangle u; \quad u|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2, \quad u_t|_{t=0} = xy.$

Задания, помеченные символом '', предназначены для самостоятельной работы и приведены без ответов.*

6.27.* Найти решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \triangle u + f(x), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),$$

если $\triangle^N f = 0$, $\triangle^N u_0 = 0$, $\triangle^N u_1 = 0$. Здесь $\triangle^N = \underbrace{\triangle \ldots \triangle}_{N}$.

6.28.* Убедиться в том, что если в задаче Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0;$$
$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \quad , -\infty < x < \infty$$

функция $f(t,x)$ относительно x нечетная, то $u(t,0) = 0$, а если она четная, то $u_x(t,0) = 0$.

6.29.* Для решения уравнения $u_{tt} = -u_{xx}$ построить решение $u(t,x)$ задачи Коши

$$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = \frac{\sin(kx)}{k}$$

и показать неустойчивость полученного решения (пример Адамара).

6.30.* Показать, что общее решение уравнения $u_{tt} = \triangle u$, зависящее только от r и t, имеет вид

$$u(t,r) = (f(r+t) + g(r-t))/r, \quad r \neq 0,$$

где $f, g \in C^2$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Эти решения называются сферическими волнами.

7. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Задача нахождения функции $u(t,x) \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, удовлетворяющей при $x \in E^m$, $t > 0$ уравнению

$$u_t = a^2 \Delta u + f(t,x)$$

и начальному условию

$$u(0,x) = u_0(x),$$

где $f(t,x)$ и $u_0(x)$ — заданные функции, называется *классической задачей Коши.*

Если функция $f(t,x) \in C^2(t > 0)$ и все ее производные до второго порядка включительно ограничены в каждой полосе $0 \leq t \leq T$, а функция $u_0(x) \in C(E^m)$ и ограничена, то решение задачи Коши в классе функций $u(t,x)$, ограниченных в каждой полосе $0 \leq t \leq T$, существует, единственно и выражается формулой Пуассона

$$u(t,x) = \tfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^m} \int\limits_{R^m} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}\, d\xi +$$
$$\int\limits_0^t \int\limits_{R^m} \frac{f(\tau,\xi)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^m} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\xi\, d\tau.$$

Замечание. При решении задачи Коши иногда удобнее пользоваться методом разделения переменных, а также результатами нижеприведенных задач.

Пример 7.1. *Найти решение задачи Коши*

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + e^t chx, \quad u(0,x) = chx.$$

Решение. Предположим, что функция $u(t,x)$ представима в виде $u(t,x) = T(t)X(x)$. Тогда из начального условия $u(0,x) = T(0)X(x) = \mathrm{ch}x$ можно сделать предположение, что $X(x) = \mathrm{ch}x$, а $T(0) = 1$. Перепишем исходное уравнение:

$$T'(t) \cdot \mathrm{ch}x = a^2 T(t) \cdot \mathrm{ch}x + e^t \mathrm{ch}x$$

или

$$T'(t) = a^2 T(t) + e^t.$$

Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, получим, что при $a^2 = 1$ функция $u(t,x) = (t+1)e^t \mathrm{ch}x$, а при $a^2 \neq 1$ функция $u(t,x) = \frac{1}{1-a^2}(e^t - a^2 e^{a^2 t})\mathrm{ch}x$.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что найденная функция является решением исходной задачи.

Задачи и упражнения

7.1. Пусть функция $w(t,t_0,x)$ принадлежит классу C^2 при $x \in E^m$, $t \geq t_0 \geq 0$. Доказать,что функция $w(t,t_0,x)$ при каждом $t_0 \geq 0$ является решением задачи Коши $w_t = a^2 \triangle w$, $w|_{t=t_0} = f(t_0,x)$ тогда и только тогда, когда функция $v(t,t_0,x) = \int\limits_{t_0}^{t} w(t,\tau,x)d\tau$ при каждом $t_0 \geq 0$ является решением задачи Коши $v_t = a^2 \triangle v + f(t,x)$, $v|_{t=t_0} = 0$.

7.2. Показать, что если $u^k(t,x_k)$ – решение задачи Коши

$$(u^k)_t = a^2 \triangle (u^k), \quad u^k|_{t=0} = f^k(x_k), \quad k = \overline{1,m},$$

то функция $u(t,x)=\prod\limits_{k=1}^{m} u^k(t,x_k)$ будет решением задачи Коши

$$u_t = a^2\triangle u, \quad u|_{t=0} = \prod_{k=1}^{m} f^k(x_k).$$

7.3. Пусть функция $f(t,x) \in C^2(t \geq t_0)$ является гармонической по x при каждом фиксированном $t \geq t_0$. Доказать, что функция $u(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,x)d\tau$ есть решение задачи Коши

$$u_t = a^2\triangle u + f(t,x), \quad u|_{t=t_0} = 0.$$

Решить задачи (m=1)

7.4. $u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \quad u|_{t=0} = 2.$
7.5. $u_t = u_{xx} + 3t^2, \quad u|_{t=0} = \sin x.$
7.6. $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos x.$
7.7. $u_t = u_{xx} + e^t \sin x, \quad u|_{t=0} = \sin x.$
7.8. $u_t = u_{xx} + \sin t, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2}.$
7.9. $4u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = e^{2x-x^2}.$
7.10. $u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = xe^{-x^2}.$
7.11. $4u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \sin x e^{-x^2}.$
7.12. $u_t = 4u_{xx} + te^t, \quad u|_{t=0} = 2.$

Решить задачи (m=2)

7.13. $u_t = \triangle u + e^t, \quad u|_{t=0} = \cos x \cos y.$
7.14. $u_t = \triangle u + 2\sin x \sin y, \quad u|_{t=0} = x^2 - y^2.$
7.15. $u_t = \triangle u + \cos t, \quad u|_{t=0} = xye^{-x^2-y^2}.$
7.16. $u_t = \triangle u, \quad u|_{t=0} = \sin l_1 x \sin l_2 y, \quad l_1, l_2 = \mathrm{const}.$
7.17. $u_t = \triangle u, \quad u|_{t=0} = \sin l_1 x \cos l_2 y, \quad l_1, l_2 = \mathrm{const}.$
7.18. $u_t = \triangle u, \quad u|_{t=0} = \cos l_1 x \cos l_2 y, \quad l_1, l_2 = \mathrm{const}.$
7.19. $u_t = \triangle u, \quad u|_{t=0} = e^{ax} \sin by, \quad a, b = \mathrm{const}.$

Решить задачи (m=3)

7.20. $u_t = 2\triangle u + t\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos y \cos z.$
7.21. $u_t = 3\triangle u + e^t, \quad u|_{t=0} = \sin(x - y - z).$

7.22. $4u_t = \triangle u + \sin 2z, \quad u|_{t=0} = \frac{1}{4}\sin 2z + e^{-x^2}\cos 2y.$

7.23. Решить задачу Коши $u_t = \triangle u, \quad u|_{t=0} = \sin l_1 x_1 + \cos l_m x_m,$
$x \in R^m$.

Задания, помеченные символом '', предназначены для самостоятельной работы и приведены без ответов.*

Решить задачи (m=3)
7.24.* $u_t = \triangle u + \cos(x - y + z)$, $u(0,x) = e^{-(x+y-z)^2}$.
7.25.* $u_t = \triangle u$, $u(0,x) = \cos(xy)\sin z$.

8. Принцип максимума для уравнений параболического типа

Пусть $T = \text{const}$, $S_T = [0,T] \times \partial\Omega$, $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$. Отметим, что определенную таким образом область Q_T называют *цилиндрической*.

Рассмотрим в Q_T линейное уравнение

$$\mathcal{L}(u) = f, \tag{8.1}$$

где

$$\mathcal{L}(u) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t}\ ,$$

причем коэффициенты a_{ij}, b_i, c и правая часть f уравнения (8.1) — вещественные, конечнозначные функции переменных t, x.

Считаем, что всюду ниже $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$ и выполняется соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}_T \setminus \Gamma_T \tag{8.2}$$

и любых отличных от нуля $\xi \in \mathbb{R}^m$.

Отметим, что по определению (см., например, [11-13]) вследствие условия (8.2) уравнение (8.1) является параболическим в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$.

Определение. Функция $u(t,x)$ называется *классическим решением* уравнения (8.1) в $\bar{Q}_T$, если ее производные $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2 u/(\partial x_i \partial x_j)$, $\partial u/\partial t$, $i,j = \overline{1,m}$, непрерывны в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$, сама функция u непрерывна в $\bar{Q}_T$ и в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ выполняется тождество $\mathcal{L}(u(t,x)) = f(t,x)$.

Ниже будем рассматривать только классические решения уравнения (8.1).

Замечание. Легко видеть, что замена $u = ve^{\alpha t}$, где $\alpha = \text{const} > 0$, приводит к уравнению для v вида (8.1) с коэффициентом при v, равным $c - \alpha$. Следовательно, если c — ограниченная сверху функция ($c < l$, $l = \text{const} > 0$), то указанной заменой (если взять $\alpha > l$) можно добиться того, что коэффициент при v в уравнении (8.1) станет строго отрицательным.

Пример 8.1. Доказать теорему 1: *Пусть функция u непрерывна в $\bar{Q}_T$, все ее производные, входящие в оператор $\mathcal{L}$, непрерывны в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ и выполняются неравенства*

$$\mathcal{L}(u(t,x)) \leq 0 \quad \textit{в } \bar{Q}_T \setminus \Gamma_T, \tag{8.3}$$

$$u(t,x) \geq 0 \quad \textit{на } \Gamma_T. \tag{8.4}$$

Пусть коэффициент c оператора $\mathcal{L}$ ограничен сверху некоторой постоянной l ($c(t,x) < l$ $\forall (t,x) \in \bar{Q}_T$). Тогда

$$u(t,x) \geq 0 \quad \textit{в } \bar{Q}_T.$$

Решение. Вначале рассмотрим случай, когда $l < 0$, т.е. $c(t,x) < 0$ в $\bar{Q}_T$. Предположим, что условия теоремы 1 выполнены, но функция u принимает в $\bar{Q}_T$ отрицательные значения (ниже вследствие этого предположения получим противоречие). Так как u непрерывна в $\bar{Q}_T$, то она достигает в $\bar{Q}_T$ своего минимума, причем отрицательного, в некоторой точке (t^0, x^0). Ясно, что вследствие условия (8.4) точка (t^0, x^0) может лежать либо внутри области Q_T, либо внутри ее верхнего основания $\big\{(t,x)\big|_{t=T, x\in\Omega}\big\}$. Следовательно, в этой точке выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \leq 0, \quad cu > 0. \tag{8.5}$$

Покажем, что в этой точке выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0. \tag{8.6}$$

Действительно (аналогичные рассуждения приведены в лекции 1), линейная замена переменных $y = Kx$ ($y_i = \sum\limits_{j=1}^{m} k_{ij}x_j$, $i = \overline{1,m}$) приводит к равенству

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{m} d_{ij}(t,y)\frac{\partial^2 v(t,y)}{\partial y_i \partial y_j}\ , \tag{8.7}$$

где матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $K = \|k_{ij}\|$, $D = \|d_{ij}\|$ связаны соотношением $D = KAK^*$, $v(t,y) = u(t,K^{-1}y)$, K^* — матрица, сопряженная к матрице K. Легко видеть, что минимум функции v совпадает с минимумом функции u и достигается в точке (t^0, y^0), где $y^0 = Kx^0$. Из линейной алгебры известно, что невырожденное преобразование можно подобрать таким образом, чтобы матрица D была диагональной в точке (t^0, x^0). Кроме того, матрица D — положительно определенная вследствие положительной определенности матрицы A (см. соотношение (8.2)). Значит,

$$\sum_{i,j=1}^{m} d_{ij}(t^0,y^0)\frac{\partial^2 v(t^0,y^0)}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_{i=1}^{m} d_{ii}(t^0,y^0)\frac{\partial^2 v(t^0,y^0)}{\partial y_i^2} \geq 0, \tag{8.8}$$

так как $d_{ii} > 0$, а $\partial^2 v/\partial y_i^2 \geq 0$ в точке (t^0, x^0). Из соотношений (8.7), (8.8) следует неравенство (8.6). Из определения оператора $\mathcal{L}$ и соотношений (8.5), (8.6) в точке (t^0, x^0) получаем неравенство $\mathcal{L}(u(t^0,x^0)) > 0$, что противоречит условию (8.3) и доказывает теорему 1 в случае $c(t,x) < 0$. В случае $c(t,x) < l$, $l > 0$ сделаем замену $u(t,x) = v(t,x)e^{lt}$. Функция v неотрицательна на Γ_T, удовлетворяет уравнению (8.1) с отрицательным коэффициентом при v (см. замечание 1) и неположительной правой частью. По доказанному выше $v(t,x) \geq 0$ в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$. Следовательно, и $u(t,x) = v(t,x)e^{lt} \geq 0$ в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$. Теорема 1 доказана.

Далее N, q — неотрицательные постоянные, а c_0 — строго положительная постоянная.

Пример 8.2. Доказать теорему 2: *Пусть функция $u(t,x)$ непрерывна в $\bar{Q}_T$, удовлетворяет в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ уравнению (1) и $|u(t,x)|_{\Gamma_T} \leq q$. Пусть f — ограниченная функция, а коэффициент c не положителен:*

$$|f(t,x)| \leq N, \quad c(t,x) \leq 0 \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}_T.$$

Тогда всюду в $\bar{Q}_T$ выполняется неравенство

$$|u(t,x)| \leq Nt + q. \tag{8.9}$$

Решение. Функции $w_\pm(t,x) = Nt + q \pm u(t,x)$ не отрицательны на Γ_T, а в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ вследствие условия $c \le 0$ удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{L}(w_\pm) = -N + Nct + cq \pm \mathcal{L}(u) \le -N \pm |f| \le 0.$$

По теореме 1 обе функции w_+ и w_- не отрицательны в $\bar{Q}_T$: $(w_\pm(t,x) = Nt + q \pm u(t,x) \ge 0)$, откуда и следует неравенство (8.9). Теорема 2 доказана.

Пример 8.3. Доказать теорему 3:*Пусть $u(t,x)$ — классическое решение в $\bar{Q}_T$ уравнения (1) и выполняются соотношения*

$$|f(t,x)| \le N, \quad c(t,x) \le -c_0 \quad \text{в } \bar{Q}_T \setminus \Gamma_T, \quad |u(t,x)| \le q \quad \text{на } \Gamma_T.$$

Тогда всюду в $\bar{Q}_T$

$$|u(t,x)| \le \max\left\{\frac{N}{c_0}\ , q\right\}. \tag{8.10}$$

Решение. Рассмотрим в $\bar{Q}_T$ функции

$$w_\pm = \max\{N/c_0, q\} \pm u(t,x).$$

Легко проверить, что $w_\pm \ge 0$ на Γ_T, а в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ выполняется неравенство $\mathcal{L}(w_\pm) \le 0$. Например, последнее следует из соотношений

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(w_\pm) = c\max\left\{\tfrac{N}{c_0}\ , q\right\} \pm f \ &\le\ -c_0\max\left\{\tfrac{N}{c_0}\ , q\right\} + N \\ &\le\ -c_0\tfrac{N}{c_0} + N = 0.\end{aligned}$$

По теореме 1 функции $w_\pm(t,x) \ge 0$ в $\bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$, откуда следует (8.10). Теорема 3 доказана.

Замечание. Для параболических систем уравнений принцип максимума может и не выполняться (определение таких систем см. в [13], [15]). Действительно, рассмотрим на интервале $0 < x < \pi$ сильно параболическую систему

$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\ v_{xx}, \quad v_t = \frac{1}{2}\ u_{xx} + v_{xx}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0,x) = 0, \quad v(0,x) = \sin x;$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad v(t,0) = v(t,\pi) = 0.$$

Единственное решение этой первой начально–краевой задачи дается формулами

$$u = e^{-t} \sin \frac{t}{2}\ \sin x, \quad v = e^{-t} \cos \frac{t}{2}\ \sin x.$$

Здесь принцип максимума нарушается для компоненты $u(t,x)$.

Многочисленные приложения принципа максимума для параболических уравнений имеются в монографии [16] (единственность решения нелинейных уравнений, положительные решения задачи Коши, теоремы сравнения решений), см. также [10].

Задачи и упражнения

8.1. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $f \equiv 0$. Доказать, что всюду в $\bar{Q}_T$

$$|u(t,x)| \le \max_{\Gamma_T} |u(t,x)| = M.$$

Указание: рассмотреть функции $w_\pm = M \pm u$ и повторить доказательство теоремы 2.

8.2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $f \equiv c \equiv 0$. Доказать, что всюду в $\bar{Q}_T$ справедливы неравенства

$$l \equiv \min_{\Gamma_T} u(t,x) \le u(t,x) \le \max_{\Gamma_T} u(t,x) \equiv M.$$

Указание: рассмотреть функции $u(t,x) - l$, $M - u(t,x)$.

8.3. Пусть в теореме 2 условие $c \le 0$ заменено условием $c(t,x) \le l$, где $l = \mathrm{const} > 0$. Доказать, что в $\bar{Q}_T$

$$|u(t,x)| \le e^{lt}(Nt + q). \tag{8.11}$$

Указание: сделать замену $u(t,x) = e^{lt}v(t,x)$ и воспользоваться теоремой 2 для функции u.

8.4. Доказать теорему единственности классического решения первой краевой задачи для уравнения (8.1).

8.5. Доказать теорему о непрерывной зависимости классического решения первой краевой задачи для уравнения (8.1) от правой части $f(t,x)$, начальной функции $\varphi(x)$ и граничной функции $\psi(t,x)$.

Указание: считать, что выполняется условие задачи 8.3.

8.6. Доказать теорему единственности классического решения первой краевой задачи для уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f, \quad \mu = \mathrm{const} > 0$$

в предположении ограниченности в $\bar{Q}_T$ производной $\partial u(t,x)/\partial x$.

8.7. Оценить в полосе $\{(t,x)\big|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t < \infty\}$ классическое решение $u(t,x)$ первой краевой задачи

$$u(0,x) = x(1-x), \quad u(t,0) = u(t,1) = 0$$

для однородного уравнения Бюргерса (в случае $f = 0$).

Следует отметить, что неравенство (8.11) есть не что иное, как априорная оценка в классе $C(\bar{Q}_T)$ классического решения первой краевой задачи.

8.8. Доказать, что для задачи в замечании 3 справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^\pi (u^2+v^2)dx = -2\int\limits_0^\pi (u^2+v^2)dx.$$

Вывести отсюда теорему единственности решения.

8.9. Найти в области $\overline{Q} = \{(t,x) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le t \le 2\}$ минимальное и максимальное значения функции $u(t,x)$, являющейся классическим решением краевой задачи

$$u_t = u_{xx} + (x^2+1)u_x, \quad u(0,x) = \cos^2 \pi x,$$
$$u(t,0) = t+1, \quad u(t,2) = t^3+1.$$

8.10. В области $\overline{Q}_T = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T, 0 \le x \le \pi\}$ доказать теорему единственности классического решения $u(t,x)$ задачи

$$u_t + u^3 = u_{xx} + \sin x,$$
$$u(0,x) = \sin^2 x \qquad u(t,0) = t^3, \qquad u(t,\pi) = \sin t.$$

8.11. Оценить в $\overline{Q}_T = \{(t,x)|0 \le t \le 9, 0 \le x \le l\}$ классическое решение задачи

$$u_t + 7u = u_{xx},$$
$$u(0,x) = x^2(x-l), \qquad u(t,0) = 0,01t^2, \qquad u(t,l) = 2\lg(1+t).$$

8.12. В области $\overline{Q}_T = \{(t,x)|0 \le t \le 1, 0 \le x \le 2\}$ определить знак выражения $u(t,x) - w(t,x)$, если $u(t,x)$ является классическим решением задачи

$$u_t = u_{xx} + u_x + x^2,$$
$$u(0,x) = x^2, \qquad u(t,0) = t, \qquad u(t,2) = 2t,$$

а функция $w(t,x)$ является классическим решением задачи

$$w_t = w_{xx} + w_x + x^2,$$
$$w(0,x) = 5, \qquad w(t,0) = 5, \qquad w(t,2) = 5t.$$

9. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Функциональные пространства

Определение 9.1. *Вещественным линейным пространством* называется множество F, для элементов которого определены операции сложения и умножения на вещественные числа, не выводящие из F и обладающие свойствами:

а) $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$,

б) $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$,

в) в F существует элемент o такой, что для любого $f \in F$ имеет место равенство $0 \cdot f = o$,

г) $(c_1 + c_2)f = c_1 f + c_2 f$,

д) $c(f_1 + f_2) = cf_1 + cf_2$,

е) $(c_1 c_2)f = c_1(c_2 f)$,

ж) $1 \cdot f = f$

для любых $f_1, f_2, f \in F$ и любых вещественных чисел c, c_1, c_2.

Определение 9.2. Линейное пространство F называется *нормированным*, если каждому его элементу f можно поставить в соответствие вещественное число $\|f\| = \|f\|_F$ (норма f), и это соответствие обладает следующими свойствами:

а) $\|f\| \ge 0$, причем $\|f\| = 0$ только для $f = o$,

б) $\|cf\| = |c| \, \|f\|$ при произвольном вещественном c и $f \in F$,

в) $\|f_1 + f_2\| \le \|f_1\| + \|f_2\|$ для любых $f_1, f_2 \in F$ (неравенство треугольника).

Определение 9.3. Последовательность f_m, $m = 1, 2, \ldots$ элементов из F называется *фундаментальной*, если $\forall \epsilon > 0$ $\exists N = N(\epsilon)$ такое, что $\forall k, m > N$ $\|f_k - f_m\| < \epsilon$.

Определение 9.4. Линейное нормированное пространство называется *полным*, если для любой фундаментальной последовательности его элементов найдется элемент этого пространства, к которому она сходится.

Полное линейное нормированное пространство B называется *банаховым* пространством.

Определение 9.5. Будем говорить, что в линейном пространстве H введено *скалярное произведение*, если любой паре элементов $h_1, h_2 \in H$ поставлено в соответствие вещественное число (h_1, h_2) (скалярное произведение этих элементов), и это соответствие обладает следующими свойствами:

а) $(h_1, h_2) = (h_2, h_1)$,

б) $(h_1 + h_2, h) = (h_1, h) + (h_2, h)$,

в) для любого вещественного c верно $(ch_1, h_2) = c(h_1, h_2)$,

г) $(h, h) \geq 0$, причем $(h, h) = 0$ только при $h = o$.

Определение 9.6. Линейное пространство H со скалярным произведением, полное в норме $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$, порождаемой этим скалярным произведением, называется *гильбертовым* пространством.

Определение 9.7. Множество $R \subset B$ называется *плотным* в нормированном пространстве B, если для любого элемента $f \in B$ существует последовательность f_k, $f_k \in R$, $k = 1, 2, ...$, сходящаяся к f ($f_k \to f$ при $k \to \infty$).

Определение 9.8. Множество $\Omega \subset E^m$ называется *множеством (лебеговой) меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти покрывающее его счетное множество открытых (m – мерных) кубов, сумма объемов которых меньше ε.

Определение 9.9. Если некоторое свойство выполнено всюду в $\Omega \subset E^m$ за исключением, может быть, множества меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено *почти всюду* в Ω (записывают п.в. в Ω).

Определение 9.10. Функция, определенная в области Ω, называется *измеримой* в Ω, если она является пределом п.в. в Ω сходящейся последовательности функций, непрерывных на $\overline{\Omega}$.

Определение 9.11. Неотрицательная п.в. в Ω функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* в Ω, если существует п.в. в Ω сходящаяся к ней монотонно неубывающая последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, функций, непрерывных на $\overline{\Omega}$ с ограниченной сверху последовательностью интегралов (Римана): $\int\limits_{\Omega} f_k(x)\,dx \le C$, $k = 1, 2, ...$ При этом точная верхняя грань множества $\{\int\limits_{\Omega} f_k(x)\,dx, \quad k = 1, 2, ...\}$ называется *интегралом Лебега* функции $f(x)$:

$$(\mathrm{L}) \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \sup_k \int\limits_{\Omega} f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_k(x)\,dx.$$

Определение 9.12. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* по области Ω, если ее можно представить в виде разности $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ двух неотрицательных функций, интегрируемых по Лебегу. При этом интеграл Лебега от функции $f(x)$ определяется равенством

$$(\mathrm{L}) \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = (\mathrm{L}) \int\limits_{\Omega} f_1(x)\,dx - (\mathrm{L}) \int\limits_{\Omega} f_2(x)\,dx.$$

Определение 9.13. Множество измеримых по Лебегу на Ω и интегрируемых по Лебегу по области Ω функций обозначается $L_1(\Omega)$.

Определение 9.14. Множество измеримых и интегрируемых с квадратом по Лебегу по области Ω функций обозначается $L_2(\Omega)$.

Введем обозначения

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ – мультииндекс, $\alpha_i \ge 0$ -целые, $i = \overline{1, m}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$.

Определение 9.15. Пространство функций, непрерывных на множестве $\Omega \subset E^m$, обозначают $C(\Omega)$.

Пространство $C(\Omega)$ является линейным пространством.

Определение 9.16. Пространство функций, непрерывных на множестве $\overline{\Omega} \subset E^m$, обозначают $C(\overline{\Omega})$.

В пространстве $C(\overline{\Omega})$ вводится норма

$$||u||_{C(\overline{\Omega})} = \max_{\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Пространство $C(\overline{\Omega})$ является банаховым пространством.

Определение 9.17. Пространство функций, непрерывно дифференцируемых до порядка k включительно на множестве $\Omega \subset E^m$, обозначают $C^k(\Omega)$:

$$C^k(\Omega) = \{f(x) | \quad D^\alpha f(x) \in C(\Omega) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq k\}.$$

Пространство $C^k(\Omega)$ является линейным пространством.

Определение 9.18. Пространство функций, непрерывно дифференцируемых до порядка k включительно на множестве $\overline{\Omega} \subset E^m$, обозначают $C^k(\overline{\Omega})$:

$$C^k(\overline{\Omega}) = \left\{f(x) | \quad D^\alpha f(x) \in C(\overline{\Omega}) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq k\right\}.$$

В пространстве $C^k(\overline{\Omega})$ вводится норма

$$||u||_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f(x)||_{C(\overline{\Omega})}.$$

Пространство $C^k(\overline{\Omega})$ является банаховым пространством.

Определение 9.19. Пространство функций, измеримых по Лебегу на множестве $\Omega \subset E^m$ и интегрируемых по Лебегу со степенью p, обозначают $L_p(\Omega)$:

$$L_p(\Omega) = \{f(x) | \quad f(x) \text{измеримы по Лебегу и} \int\limits_\Omega |f|^p(x)\, dx < \infty\}.$$

В пространстве $L_p(\Omega)$ вводится норма

$$||u||_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Пространство $L_p(\Omega)$ является банаховым пространством.

Определение 9.20. Пространство функций, измеримых по Лебегу на множестве $\Omega \subset E^m$ и интегрируемых по Лебегу со степенью p на любом Ω', строго вложенном в Ω, обозначают $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Заметим, что $L_p(\Omega) \subset L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Определение 9.21. Последовательность f_m, $m = 1, 2, ...$, элементов из H называется *сходящейся сильно* к элементу f из H ($f_m \to f$ при $m \to \infty$), если $\|f - f_m\|_H \to 0$ при $m \to \infty$.

Определение 9.22. Последовательность f_m, $m = 1, 2, ...$, элементов из H называется *сходящейся слабо* к элементу f из H ($f_m \rightharpoonup f$ при $m \to \infty$), если для любого $h \in H$ $(f_m, h) \to (f, h)$ при $m \to \infty$.

Задачи и упражнения

9.1. Установить, что следующие множества являются множествами меры нуль в m-мерном пространстве:

1) конечное множество точек,
2) счетное множество точек,
3) пересечение счетного множества множеств меры нуль,
4) объединение счетного множества множеств меры нуль,
5) гладкая $(m-1)$ – мерная поверхность,
6) гладкая (k) – мерная поверхность $(k \leq m-1)$.

9.2. При каких значениях α интегрируемы по шару $|x| < 1$ следующие функции:

а) $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$; б) $f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^\alpha}$.

Доказать следующие утверждения:

9.3. Если $f, g \in L_1(\Omega)$, то $\alpha f + \beta g \in L_1(\Omega)$ при любых постоянных α и β.

9.4. Если $f_1, f_2 \in L_2(\Omega)$, то $\alpha f_1 + \beta f_2 \in L_2(\Omega)$ при любых постоянных α и β.

9.5. Ни одно из включений: $L_1(E^m) \subset L_2(E^m)$, $L_2(E^m) \subset L_1(E^m)$ места не имеют.

9.6. Если $f, g \in L_2(\Omega)$, то $f \cdot g \in L_1(\Omega)$.

9.7. Если $f, g \in L_2(\Omega)$, то имеет место неравенство Буняковского

$$\left| \int\limits_\Omega f \cdot g \, dx \right| \leq \left(\int\limits_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |g|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

9.8. Если $f, g \in L_2(\Omega)$, то имеет место неравенство Минковского

$$\left(\int\limits_\Omega |f+g|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq \left(\int\limits_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{1/2} + \left(\int\limits_\Omega |g|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

9.9. Найти интегралы по отрезку $[0,1]$ от следующих функций (предварительно доказав их интегрируемость):

а) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x - \quad \text{иррационально},\\ 0, & x - \quad \text{рационально}; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально и больше} \quad 1/3,\\ x^3, & x \quad \text{иррационально и меньше} \quad 1/3,\\ 0, & \text{если} \quad x \quad \text{рационально}; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально и меньше} \quad 1/2,\\ x^2, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально и больше} \quad 1/2,\\ 0, & \text{если} \quad x \quad \text{рационально}; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} 1/n, & \text{если} \quad x=m/n, \text{ где } m,n \text{ взаимно просты},\\ 0, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально}; \end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases} x^{-1/3}, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально},\\ x^3, & \text{если} \quad x \quad \text{рационально}; \end{cases}$

е) $f(x)=\operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

9.10. Убедиться, что в E^m можно ввести норму следующим образом:

а) $|x|_\infty=\max\limits_{1\le i\le m}|x_i|$; б) $|x|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$.

Здесь $x=(x_1,\ldots,x_m)$.

9.11. Показать, что в пространствах $L_1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ можно ввести нормы

$$||f||_{L_1(\Omega)}=\int\limits_\Omega |f|\,dx;$$

$$||f||_{L_2(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega |f|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Доказать следующие утверждения:

9.12. Если последовательность $f_k(x)$, $k=1,2,...$, функций из $L_2(\Omega)$ сходится к $f(x)$ по норме $L_2(\Omega)$, то она сходится и слабо к $f(x)$ в $L_2(\Omega)$.

9.13. Если последовательность $f_k(x)$, $k=1,2,...$, функций из $L_2(\Omega)$ сходится к $f(x)$ по норме $L_2(\Omega)$, то $\int\limits_\Omega f_k\,dx\to\int\limits_\Omega f\,dx$, $k\to\infty$ (Ω - ограниченная область).

9.14. Если $u_k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, ...$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится к $u(x)$ по норме $L_2(\Omega)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} u_k\,dx = \int\limits_{\Omega} u\,dx$ (Ω - ограниченная область).

9.15. Если последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, функций из $C(\overline{\Omega})$ сходится к $f(x)$ равномерно в $\overline{\Omega}$, то она сходится и по норме $L_2(\Omega)$ (Ω - ограниченная область).

9.16. Если последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, функций из $L_2(\Omega)$ сходится слабо к $f(x) \in L_2(\Omega)$, то последовательность норм $||f_k(x)||_{L_2(\Omega)}$, $k = 1, 2, ...$, ограничена.

9.17. Если последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, функций из $L_2(\Omega)$ сходится слабо к $f(x) \in L_2(\Omega)$ и $||f_k(x)|| \to ||f(x)||$ при $k \to \infty$, то эта последовательность сходится к $f(x)$ и по норме $L_2(\Omega)$.

10. Обобщенные производные. Пространства Соболева

Пусть $\Omega \subset E^m$ — некоторая ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$.

Пограничной полосой области Ω называется совокупность точек этой области, обладающих тем свойством, что их расстояние до $\partial\Omega$ не превосходит заданной постоянной $\delta > 0$, называемой шириной полосы.

Определение 10.1. Функция $g(x)$ называется *финитной* в области Ω, если она обращается в ноль в некоторой пограничной полосе области Ω. Пространство непрерывных финитных в Ω функций обозначается $\overset{\circ}{C}(\Omega)$. Пространство k раз непрерывно дифференцируемых финитных в Ω функций обозначается $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$.

Определение 10.2. Функция $f^\alpha(x) \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$ называется *обобщенной производной* по Соболеву порядка α функции $f(x) \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$, если для любой функции $g(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{|\alpha|}(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} f D^\alpha g\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} f^\alpha g\,dx.$$

Определение 10.3. Множество функций, имеющих все обобщенные производные до порядка k включительно, принадлежащие пространству

$L_2(\Omega)$, обозначим $H^k(\Omega)$:

$$H^k(\Omega) = \{f(x)| \quad D^\alpha f(x) \in L_2(\Omega) \quad \forall \alpha,\ |\alpha| \le k\}.$$

В пространстве $H^k(\Omega)$ вводится норма

$$||u||_{H^k(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha u)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространства $H^k(\Omega)$ называют *пространствами Соболева.*

Определение 10.4. *Следом* $f|_S$ *функции* $f \in C(\overline{\Omega})$ на $(m-1)$ – мерной поверхности S называется значение на этой поверхности функции, которая определена в каждой точке, непрерывна в $\overline{\Omega}$ и почти всюду совпадает с f на S.

Верна

лемма о следе. Пусть S – некоторая $(m-1)$ – мерная поверхность, лежащая в $\overline{\Omega}$. Тогда для любой функции $f \in H^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|f|_S\|_{L_2(S)} \le C\|f\|_{H^1(\Omega)}, \quad C > 0.$$

Здесь константа C не зависит от функции f.

Из леммы о следе следует, что если $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$ - последовательность функций из $C^1(\overline{\Omega})$, сходящаяся в норме $H^1(\Omega)$ к $f(x)$, S - гладкая $(m-1)$-мерная поверхность, лежащая в $\overline{\Omega}$, то последовательность следов функций $f_k(x)$ на S сходится в норме $L_2(S)$ к некоторой функции $g(x) \in L_2(S)$, которую называют *следом* $f|_S$ функции $f(x)$ на поверхности $S \in \overline{\Omega}$. Доказывается, что $f|_S$ не зависит от выбора последовательности $f_k(x)$.

Пример 10.1. *Определить след функции*

$$f = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 2, & |x| = 1 \end{cases}$$

на границе области $\Omega = \{x \mid |x| < 1\}$, $x \in E^m$ *(*$\partial\Omega = \{x| \ |x| = 1\}$*).*

Решение. Рассмотрим последовательность заданных на $\overline{\Omega}$ функций $f_k(x) \equiv 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как $f_k = f$ при $x \in \Omega$ и обобщенные производные (здесь обобщенные производные в области Ω совпадают с классическими) $\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, m}$, при $x \in \Omega$, то для функций f_k и f имеет место тождество $\|f(x) - f_k(x)\|_{H^1(\Omega)} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. То есть $f_k(x) \to f(x)$

при $k \to \infty$ по норме пространства $H^1(\Omega)$. След $f_k|_{\partial\Omega}$ непрерывной в $\overline{\Omega}$ функции f_k, $k = 1, 2, \ldots$, на границе $\partial\Omega$ равен 1. Предел последовательности $f_k|_{\partial\Omega}$ в норме пространства $L_2(\partial\Omega)$ равен 1. Значит, $f|_{\partial\Omega} = 1$.

Определение 10.5. Замыкание пространства $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$ в норме пространства $H^1(\Omega)$ обозначается $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega)$.

Замечание. Если функция $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, то ее след $f|_{\partial\Omega}$ на границе области Ω равен нулю.

Действительно, из определения пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ следует, что для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ существует последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ такая, что $\|f_k(x) - f(x)\|_{\overset{\circ}{H}{}^1} \to 0$ при $k \to \infty$. След $f_k|_{\partial\Omega} = 0$. Согласно лемме о следе имеет место неравенство

$$\|f_k|_{\partial\Omega} - f|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} = \|f|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} \le c\|f_k - f\|_{H^1(\Omega)}.$$

Из последнего неравенства получаем, что $\|f|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} = 0$. Отсюда $f|_{\partial\Omega} = 0$.

Определение 10.6. Два скалярных произведения $(u, v)_I$ и $(u, v)_{II}$ и соответсвующие им нормы $||u||_I$ и $||u||_{II}$ называются *эквивалентными* в гильбертовом пространстве H, если существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что для любого $u \in H$ справедливы неравенства $c_1||u||_I \le ||u||_{II} \le c_2||u||_I$.

Верно

неравенство Стеклова (Пуанкаре-Фридрихса)

$$\int\limits_{\Omega} f^2\,dx \le c\int\limits_{\Omega} |\nabla f|^2\,dx,$$

которое справедливо для функций из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, здесь $c > 0$ – постоянная, зависящая только от свойств области Ω.

Пример 10.2. *Доказать, что скалярные произведения в* $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} [fg + \nabla f \cdot \nabla g]\,dx,$$

$$(f,g)_I = \int\limits_{\Omega} [|\sin|x||fg + 2\nabla f \cdot \nabla g]\, dx$$

эквивалентны.

Решение. Скалярные произведения эквивалентны, если эквивалентны порождаемые ими нормы

$$\|f\|^2 = \Big(\int\limits_{\Omega} [f^2 + |\nabla f|^2]\, dx\Big),$$

$$\|f\|_I^2 = \Big(\int\limits_{\Omega} [|\sin x|f^2 + 2|\nabla f|^2]\, dx\Big),$$

то есть если существуют костанты $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

$$c_1\|f\| \le \|f\|_I \le c_2\|f\|.$$

Рассмотрим первое неравенство, учитывая, что $|\sin|x|| \ge 0$,

$$\|f\|_I^2 = \int\limits_{\Omega} [|\sin x|f^2 + 2|\nabla f|^2]\, dx \ge \int\limits_{\Omega} 2|\nabla f|^2\, dx = \int\limits_{\Omega} (|\nabla f|^2 + |\nabla f|^2)\, dx,$$

используя неравенство Стеклова (Пуанкаре-Фридрихса)

$$\int\limits_{\Omega} f^2\, dx \le c\int\limits_{\Omega} |\nabla f|^2\, dx,$$

которое справедливо в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, получим

$$\|f\|_I^2 \ge \int\limits_{\Omega} (|\nabla f|^2 + |\nabla f|^2)\, dx \ge \int\limits_{\Omega} (\tfrac{1}{c} f^2 + |\nabla f|^2)\, dx \ge$$
$$\min\{1/c, 1\} \int\limits_{\Omega} (f^2 + |\nabla f|^2)\, dx = \min\{1/c, 1\}\|f\|^2,$$

таким образом, $c_1 = (\min\{1/c, 1\})^{1/2}$.

Рассмотрим второе неравенство, учитывая, что $|\sin|x|| \le 1$,

$$\|f\|_I^2 = \int\limits_{\Omega} [|\sin x|f^2 + 2|\nabla f|^2]\, dx \le 2\int\limits_{\Omega} [f^2 + |\nabla f|^2]\, dx = 2\|f\|^2,$$

таким образом, $c_2 = \sqrt{2}$.

Задачи и упражнения

10.1. Установить, что смешанная о.п. не зависит от порядка дифференцирования.

10.2. Показать, что из существования о.п. $D^\alpha f$ не следует, вообще говоря, существования о.п. $D^{\alpha'} f$ при $\alpha'_i \le \alpha_i$, $i = 1, ..., m$, $|\alpha'| < |\alpha|$.

Указание. Рассмотреть функцию $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, где f_i не имеют обобщенной производной первого порядка по x_i.

10.3. Показать, что если в области Ω функция $f(x)$ имеет о.п. $D^\alpha f$, то и в любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ функция $f(x)$ имеет на Ω' о.п. f^α и $f^\alpha = D^\alpha f$ на Ω'.

10.4. Пусть в области Ω_1 задана функция $f_1(x)$, имеющая о.п. $D^\alpha f_1$, а в области Ω_2 — функция $f_2(x)$, имеющая о.п. $D^\alpha f_2$. Доказать, что если $\Omega_1 \cup \Omega_2$ — область, и для $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, $f_1(x) = f_2(x)$, то функция

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \Omega_1, \\ f_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

имеет о.п. $D^\alpha f$ в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, равную $D^\alpha f_1$ в Ω_1 и $D^\alpha f_2$ в Ω_2.

10.5. Пусть в шаре $|x| < 1$ задана функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, x_2 > 0, \\ -1, & \text{если } |x| < 1, x_2 < 0. \end{cases}$$

Доказать, что $f(x_1, x_2)$ имеет о.п. первого порядка в каждом из полукругов, но не имеет о.п. по x_2 в круге $|x| < 1$.

10.6. Вычислить производные первого и второго порядков следующих функций 1) $y = |x| \sin x$; 2) $y = |x| \cos x$ в области $|x| \le \alpha$, $\alpha \in R$.

Доказать утверждения:

10.7. Если в области Ω у функции $f(x)$ существует о.п. $D^\alpha f = \omega(x)$, а у функции $\omega(x)$ существует о.п. $D^\beta \omega$, то существует о.п. $D^{\alpha+\beta} f$.

10.8. а) $y = \mathrm{sign} x \notin H^1(-1, 1)$, б) $y = |x| \in H^1(-1, 1)$, $y = |x| \notin H^2(-1, 1)$.

10.9. Если $f \in H^1(\Omega)$ и $g \in \overset{\circ}{H^1}(\Omega)$, то для всех $i = 1, 2, \dots, m$, справедлива формула $\int\limits_\Omega f g_{x_i}\, dx = -\int\limits_\Omega g f_{x_i}\, dx$ (формула интегрирования по частям).

10.10. Если $f \in H^1(\Omega)$ и $g \in H^1(\Omega)$, то для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, справедлива формула

$$\int\limits_\Omega f g_{x_i}\,dx = -\int\limits_\Omega g f_{x_i}\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} fg\cos(n, x_i)\,ds,$$

где под знаком интеграла по границе $\partial\Omega$ стоят следы функций f и g на $\partial\Omega$.

10.11. Для любой $f(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(a, b)$ имеет место неравенство (одномерный вариант неравенства Стеклова (Пуанкаре - Фридрихса))

$$\int\limits_a^b f^2\,dx \le (b-a)^2 \int\limits_a^b f'^2\,dx.$$

10.12. Доказать существование такой постоянной $c > 0$, что для любой $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ имеет место неравенство Стеклова (Пуанкаре - Фридрихса)

$$\int\limits_\Omega f^2\,dx \le c\int\limits_\Omega |\nabla f|^2\,dx.$$

10.13. Показать, что выражение $\int\limits_\Omega (\nabla f, \nabla g)\,dx$ задает скалярное произведение в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, эквивалентное скалярному произведению $\int\limits_\Omega [fg + (\nabla f, \nabla g)]\,dx$.

10.14. Пусть $p, q \in C(\overline{\Omega})$, $\quad p(x) \ge p_0 > 0, \quad q(x) \ge 0$. Доказать, что скалярные произведения в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

$$(f,g) = \int\limits_\Omega [fg + (\nabla f, \nabla g)]\,dx,$$

$$(f,g)_I = \int\limits_\Omega [qfg + p(\nabla f, \nabla g)]\,dx$$

эквивалентны.

10.15. Пусть вещественные функции p_{ij}, $p_{ij}(x) = p_{ji}(x)$, $i, j = 1, 2, ..., m$ и q принадлежат $C(\overline{\Omega})$, $q(x) \ge 0$ и для всех $x \in \overline{\Omega}$ и всех вещественных векторов $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in R_m$ имеет место неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^m p_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge$

$\gamma_0 \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^2$, где постоянная $\gamma_0 > 0$. Доказать, что в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ можно определить скалярное произведение

$$(f,g)_I = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{m} p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} + qfg \right) dx,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(f,g) = \int\limits_{\Omega} [fg + (\nabla f, \nabla g)]\, dx.$$

10.16. Пусть $p, q \in C(\overline{\Omega})$, $\quad p(x) \geq p_0 > 0$, $\quad q(x) \geq q_0 > 0$. Доказать, что скалярные произведения в $H^1(\Omega)$

$$(f,g) = \int\limits_{\Omega} [fg + (\nabla f, \nabla g)]\, dx,$$

$$(f,g)_I = \int\limits_{\Omega} [qfg + p(\nabla f, \nabla g)]\, dx$$

эквивалентны.

10.17. Пусть $p, q \in C(\overline{\Omega})$, $\quad p(x) \geq p_0 > 0$, $\quad q(x) \geq 0$ и $q(x) \not\equiv 0$ в Ω. Доказать, что скалярные произведения в $H^1(\Omega)$

$$(f,g) = \int\limits_{\Omega} [fg + (\nabla f, \nabla g)]\, dx,$$

$$(f,g)_I = \int\limits_{\Omega} [qfg + p(\nabla f, \nabla g)]\, dx$$

эквивалентны.

10.18. Доказать, что если $\sigma(x) \in C(\partial\Omega)$ и $\sigma(x) > 0$, то выражение

$$(f,g)_I = \int\limits_{\Omega} (\nabla f, \nabla g)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma f g\, ds$$

задает скалярное произведение, причем оно будет эквивалентным скалярному произведению

$$(f,g) = \int\limits_{\Omega} [fg + (\nabla f, \nabla g)]\, dx.$$

10.19. Пусть $p, q \in C(\overline{\Omega}), \sigma(x) \in C(\partial\Omega), \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0$ в $\overline{\Omega}$, $\sigma(x) \geq 0$ на $\partial\Omega$ или $q(x) \not\equiv 0$, или $\sigma(x) \not\equiv 0$. Тогда скалярные произведения в $H^1(\Omega)$

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} [fg + (\nabla f, \nabla g)]\, dx,$$

$$(f, g)_I = \int\limits_{\Omega} [qfg + p(\nabla f, \nabla g)]\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma fg\, ds$$

эквивалентны.

11. Обобщенные решения уравнений эллиптического типа

Пусть $\Omega \subset E^m$ — некоторая ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$.

В области Ω задано уравнение

$$-div(p(x)\nabla u(x)) + q(x)u = f(x), \tag{11.1}$$

а на границе области граничные условия первого рода

$$u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \tag{11.2}$$

или третьего рода

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \tag{11.3}$$

Будем считать, что $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, $\sigma(x) \in L_2(\partial\Omega)$. В случае первой краевой задачи считаем, что $\varphi(x)$ является следом на $\partial\Omega$ некоторой функции из $H^1(\Omega)$.

Определение 11.1. Функция $u(x) \in H^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением первой краевой задачи* (11.1),(11.2), если ее след на $\partial\Omega$ равен $\varphi(x)$ и она удовлетворяет при всех $v \in \overset{\circ}{H^1}(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} (p(x)(\nabla u, \nabla v) + quv)\, dx = \int\limits_{\Omega} fv\, dx.$$

Определение 11.2. Функция $u(x) \in H^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением третьей краевой задачи* (11.1),(11.3), если при всех $v \in H^1(\Omega)$ она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} (p(x)(\nabla u, \nabla v) + quv)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} p(x)\sigma uv\, dS =$$

$$\int\limits_{\Omega} fv\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} p(x)\varphi v\, dS. \tag{11.4}$$

Замечание. При $\sigma \equiv 0$ задача (11.1),(11.3) является второй краевой задачей и формула (11.4) определяет ее обобщенное решение.

Пример 11.1. *Пусть в области Ω задано уравнение*

$$-div(p(x)\nabla u(x)) + q(x)u = f(x), \tag{11.5}$$

а на границе области условие

$$u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \tag{11.6}$$

Доказать, что если $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi(x) \in C(\partial\Omega)$, то классическое решение $u(x) \in C^2(\Omega) \cup C^1(\overline{\Omega})$ задачи (11.5), (11.6) является ею обобщенным решением.

Решение. Так как классическое решение $u(x)$ уравнения (11.5) – функция непрерывная в $\overline{\Omega}$, ею след на границе области Ω совпадает с ею значением. Поэтому краевое условие (11.6) будет верно и в смысле следа.

Умножим уравнение (11.5) на произвольную функцию $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω

$$-\int\limits_{\Omega} div(p\nabla u)v\, dx + \int\limits_{\Omega} quv\, dx = \int\limits_{\Omega} fv\, dx. \tag{11.7}$$

Преобразуем первое слагаемое левой части тождества

$$-\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(p\frac{\partial u}{\partial x_i})v\, dx = -\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(p\frac{\partial u}{\partial x_i})v\, dx.$$

В последнем выражении применим к каждому слагаемому формулу интегрирования по частям (см. задачу 10.10). Получим, что

$$-\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(p\frac{\partial u}{\partial x_i})v\,dx =$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} pv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n,x_i)\,ds + \int\limits_{\Omega} p \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx =$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} pv\frac{\partial u}{\partial n}\,ds + \int\limits_{\Omega} p(\nabla u, \nabla v)\,dx,$$

так как $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, то след $v|_{\partial\Omega} = 0$ и первый интеграл в этом выражении равен 0.

Здесь $\cos(n,x_i)$, $i = 1,2,\ldots,$ – направляющие косинусы единичной внешней нормали n к границе области Ω.

Согласно последнему равенству первое слагаемое в левой части тождества (11.7) можно заменить на выражение $\int\limits_{\Omega} p(\nabla u, \nabla v)\,dx$. После замены получим, что для $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} p(\nabla u, \nabla v)\,dx + \int\limits_{\Omega} quv\,dx = \int\limits_{\Omega} fv\,dx.$$

Пример 11.2. *Рассмотрим в области Ω задачу (11.5), (11.6). Доказать, что если $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \in C(\overline{\Omega})$, $q(x) > 0$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, то задача (11.5), (11.6) имеет единственное обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.*

Решение. Рассмотрим гильбертовое пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_I = \int\limits_{\Omega} p(\nabla u, \nabla v)\,dx + \int\limits_{\Omega} quv\,dx,$$

которое эквивалентно исходному скалярному произведению в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

$$(u, v) = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, dx + \int\limits_\Omega uv\, dx.$$

Обозначим за $\|\cdot\|_I$ норму, порожденную скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_I$, за $\|\cdot\|$ норму, порожденную скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Данные нормы эквивалентны (см. упражнение 10.14).

Для функции $f(x)$ определим функционал

$$F(v) = \int\limits_\Omega fv\, dx \qquad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Заданный функционал линеен.

Покажем, что данный функционал ограничен.

$$|F(v)| \le \int\limits_\Omega |fg|\, dx \le \text{(неравенство Коши – Буняковского)}$$
$$\le \left(\int\limits_\Omega f^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega v^2\, dx\right)^{1/2} = \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \le \text{в силу эквивалентности норм в } \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \le$$
$$\le C\|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_I = \widetilde{C}\|v\|_I.$$

Из последнего неравенства следует, что F ограничен. Тогда согласно теореме Рисса [3] о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ такой, что линейный ограниченный функционал $F(v)$ может быть представлен в виде $F(v) = (u, v)_I$. Последнее означает, что функция $u(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega p(\nabla u, \nabla v)\, dx + \int\limits_\Omega quv\, dx = \int\limits_\Omega fv\, dx$$

для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, т.е. функция u является обобщенным решением задачи (11.5), (11.6).

Пример 11.3. *Доказать, что для всех функций $v \in C^2[0,1]$ верно неравенство $\int\limits_0^1 (v'^2 + 2xv)\, dx + v^2(0) + v^2(1) \ge -\frac{41}{270}$. Имеет ли место знак равенства для какой-либо функции?*

Решение. Рассмотрим выражение $\int\limits_0^1 (v'^2 + 2xv)\,dx + v^2(0) + v^2(1) = \int\limits_0^1 v'^2\,dx + v^2(0) + v^2(1) + 2\int\limits_0^1 xv\,dx = (\|v\|^*_{H^1(0,1)})^2 + 2(x,v)_{L_2(0,1)} = \Phi(v)$. Здесь $\|v\|^*_{H^1(0,1)} = \Big(\int\limits_0^1 v'^2\,dx + v^2(0) + v^2(1)\Big)^{1/2}$. Известно, что существует функция $v_0 \in C^1(0,1)$, реализующая минимум функционала $\Phi(v)$ [20]. Рассмотрим функцию $F(t) = \Phi(v_0 + tw)$, где v_0 - функция, на которой функционал $\Phi(v)$ принимает минимальное значение, $w(x)$ - произвольная функция из $H^1(0,1)$, t - произвольное вещественное число, тогда очевидно, что $F(0) = \Phi(v_0)$, а так как $\Phi(v) \geq \Phi(v_0)$, то $F'(0) = 0$. То есть

$$F'(t) =$$

$$\int\limits_0^1 (v_0' + tw')^2\,dx + (v(0) + tw(0))^2 + (v(1) + tw(1))^2 + 2\int\limits_0^1 x(v + tw)\,dx =$$

$$\int\limits_0^1 v_0'^2\,dx + v^2(0) + v^2(1) + 2\int\limits_0^1 xv\,dx +$$

$$2t(\int\limits_0^1 v_0'w'\,dx + v_0(0)w(0) + v_0(1)w(1) + \int\limits_0^1 xw\,dx) +$$

$$t^2(\int\limits_0^1 w'^2\,dx + w^2(0) + w^2(1))$$

и $F'(0) = 2(\int\limits_0^1 v_0'w'\,dx + v_0(0)w(0) + v_0(1)w(1) + \int\limits_0^1 xw\,dx)$. Отсюда имеем $\int\limits_0^1 v_0'w'\,dx + v_0(0)w(0) + v_0(1)w(1) + \int\limits_0^1 xw\,dx = 0$ для любой функции $w \in H^1(0,1)$.

Считая, что $v_0 \in C^2([0,1])$, проинтегрируем по частям первый интеграл в этой сумме, получим

$$v_0'w|_0^1 - \int\limits_0^1 v_0''w\,dx + v_0(0)w(0) + v_0(1)w(1) + \int\limits_0^1 xw\,dx = 0.$$

После очевидных преобразований имеем

$$(v_0'(1)+v_0(1))w(1)+(-v_0'(0)+v_0(0))w(0)+\int\limits_0^1(-v_0''+x)w\,dx=0.$$

Рассмотрим $w\in\overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$. След функции w в граничных точках интервала $(0,1)$ равен 0 и

$$\int\limits_0^1(-v_0''+x)w\,dx=0,$$

то есть

$$(-v_0''+x,w)_{L_2(0,1)}=0.$$

Так как $\overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$ всюду плотно в $L_2(0,1)$, то по теореме об ортогональности $-v_0''+x=0$, и мы имеем следующее равенство:

$$(v_0'(1)+v_0(1))w(1)+(-v_0'(0)+v_0(0))w(0)=0,$$

где $w(0)$ и $w(1)$ могут принимать произвольные значения, но тогда $v_0'(1)+v_0(1)=0$, $-v_0'(0)+v_0(0)=0$.

Таким образом, надо найти решение следующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$v_0''-x=0,$$

$$v_0'(1)+v_0(1)=0,$$
$$-v_0'(0)+v_0(0)=0.$$

Решая ее, получим, что $v(x)=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c_2$. В силу краевых условий найдем

$$v(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{9}(x+1).$$

Вычислим значение функционала на функции $v(x)$: $\int\limits_0^1[(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{9})^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{4}{9}(x^2+x)]\,dx+(-\frac{2}{9})^2+(\frac{1}{6}-\frac{4}{9})^2=-\frac{41}{270}$. Таким образом, мы доказали требуемое неравенство и нашли функцию, для которой верно равенство.

Задачи и упражнения

11.1. Пусть $u(x)$ — классическое решение задачи

$$-\Delta u = f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Показать, что если $u \in C^1(\overline{\Omega})$ и $f \in L_2(\Omega)$, то $u(x)$ является обобщенным решением этой задачи.

11.2. Пусть $u(x)$ — классическое решение задачи

$$-\Delta u = f,$$

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \varphi(x).$$

Показать, что $u(x)$ является обобщенным решением этой задачи.

11.3. Если $u(x)$ — обобщенное решение задачи

$$-\Delta u = f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

и $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, то $u(x)$ является классическим решением этой задачи.

11.4. Если $u(x)$ — обобщенное решение задачи

$$-\Delta u = f,$$

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$$

и $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, то $u(x)$ является классическим решением этой задачи.

11.5. Пусть $u(x)$ — классическое решение задачи

$$-div(p(x)\nabla u(x)) + q(x)u = f(x),$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x),$$

принадлежащее $H^1(\Omega)$. Показать, что $u(x)$ является обобщенным решением этой задачи.

11.6. Пусть задана функция $f(x) \in L_2(\Omega)$. Доказать, что функционал

$$F(v) = \int\limits_{\Omega} f(x)v(x)\,dx$$

является линейным непрерывным функционалом над $H^1(\Omega)$ ($\partial\Omega \in C^1$).

11.7. Пусть задана функция $u(x) \in H^1(\Omega)$. Доказать, что функционал

$$F(v) = \int\limits_{\partial\Omega} u(s)v(s)\,ds$$

является линейным непрерывным функционалом над $H^1(\Omega)$ ($\partial\Omega \in C^1$).

11.8. Пусть задана функция $u(x) \in H^1(\Omega)$. Доказать, что функционал

$$F(v) = \int\limits_{\partial\Omega} u(s)v(s)\,ds + \int\limits_{\Omega} v(x)\,dx$$

является линейным непрерывным функционалом над $H^1(\Omega)$ ($\partial\Omega \in C^1$).

11.9. Доказать существование и единственность обобщенного решения задачи

$$-\Delta u + u = f,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

в классе функций $H^1(\Omega)$.

11.10. Пользуясь неравенством Стеклова, доказать существование и единственность обобщенного решения первой краевой задачи

$$-\Delta u = f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

11.11. Рассмотрим при $f \in L_2(\Omega)$ функционал

$$E(v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dx - 2\int\limits_{\Omega} fv\,dx$$

на множестве функций $v \in H^1(\Omega)$, для которых $v|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ является следом на $\partial\Omega$ некоторой функции из $H^1(\Omega)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $E(v)$ достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи

$$-\Delta u = f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

11.12. Рассмотрим при $f \in L_2(\Omega)$, $p \in C(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ функционал

$$E_1(v) = \int\limits_{\Omega} p|\nabla v|^2\,dx + \int\limits_{\Omega} qv^2\,dx - 2\int\limits_{\Omega} fv\,dx$$

на множестве функций $v \in H^1(\Omega)$, для которых $v|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ является следом на $\partial\Omega$ некоторой функции из $H^1(\Omega)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $E_1(v)$ достигает минимального значения, есть обобщенное решение задачи

$$-div(p(x)\nabla u(x)) + q(x)u = f(x),$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

11.13. Рассмотрим при $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \geq 0$ на $\partial\Omega$, $\sigma(x) \not\equiv 0$, функционал

$$\tilde{E}_1(v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma v^2\,dS - 2\int\limits_{\Omega} fv\,dx - 2\int\limits_{\partial\Omega} \varphi v\,dS$$

на множестве функций $v \in H^1(\Omega)$. Показать, что функция $u(x)$, на которой функционал $\tilde{E}_1(v)$ достигает минимума, есть обобщенное решение задачи

$$-\Delta u = f,$$
$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x).$$

11.14. Найти функцию v_0, реализующую минимум функционала $\int\limits_0^1 (v'^2 + v^2)\,dx + 2\int\limits_0^1 v\,dx$ в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$.

11.15. Доказать, что для всех функций $v \in C^2[0,1]$, $v(1) = 0$ имеет место неравенство $\int\limits_0^1 v\,dx \le \frac{5}{24} + \frac{v^2(0)}{4} + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 v'^2\,dx$. Найти функцию из этого класса, для которой достигается равенство.

11.16. Найти $\inf\limits_{v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \left\{ \int\limits_0^1 (|\nabla v|^2 + 2\sin x_1 \sin x_2 v)\,dx \right\}$, где $\Omega = \{0 \le x_1 \le \pi, \quad 0 \le x_1 \le \pi\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 2004.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1982.

4. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. –М.: Мир, 1966.

5. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. –М.: Наука, 1971.

6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. –М.: Наука, 1966.

7. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. –М.: Мир, 1964.

8. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Под ред. Л.В. Овсянникова и В.Н. Монахова. –Новосибирск: Наука, 1985.

9. Курант Р. Уравнения с частными производными. –М.: Мир, 1964.

10. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. –М.: Мир, 1957.

11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. –М.: Наука, 1973.

12. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Успехи матем. наук. – 1962. – Т.17, N3. – С. 3 – 146.

13. Андреев В.К. Избранные вопросы теории уравнений с частными производными. –Красноярск: КГУ, 1980.

14. Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. –Красноярск: КГУ, 1999.

15. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. –М.: Высшая школа, 1964.

16. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. –М.: Мир, 1968.

17. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985.

18. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980.

19. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988.

20. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976.

21. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: Наука, 1964.

22. Сборник задач по уравнениям математической физики/ Под ред. В.С.Владимирова. – М.: Наука, 1982.

ОТВЕТЫ

1.1. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. **1.2.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0$; $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{x}{2} + y$, $\zeta = -\frac{x}{2} - y + z$. **1.3.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0$; $\xi = x + y$, $\eta = y - x$, $\zeta = y + z$. **1.4.** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = 2x - y + z$. **1.5.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = \frac{3}{2}x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$. **1.6.** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0$; $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = z + x + y$, $\tau = 2x - 2y + z + t$. **1.7.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0$; $\xi = x + y$, $\eta = y - x$, $\zeta = z$, $\tau = y + z + t$. **1.8.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - u_{\tau\tau} = 0$; $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $\zeta = -2y + z + t$, $\tau = z - t$. **1.9.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = 2x - y + z$, $\tau = x + z + t$. **1.10.** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = -x - y + z$, $\tau = x - y + t$. **1.11.** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = -x + y$, $\zeta = 2x - 2y + z$. **1.12.** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + 3u_\xi + \frac{3}{2}u_\eta - \frac{9}{2}u_\zeta = 0$; $\xi = x$, $\eta = \frac{1}{2}(x + y + z)$, $\zeta = -\frac{1}{2}(3x + y - z)$. **1.13.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + 2u_\eta = 0$; $\xi = x + y$, $\eta = -x + y$, $\zeta = -x - y + z$. **1.14.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 4u = 0$; $\xi = y + z$, $\eta = -y - 2z$, $\zeta = x - z$. **1.15.** $u_{\xi\xi} + 2u = 0$; $\xi = x$, $\eta = -2x + y$, $\zeta = -x + z$. **1.16.** $u_{\xi\xi} - 2u_\xi + 6u_\zeta = 0$; $\xi = x$, $\eta = -2x + y$, $\zeta = -3x + z$. **1.17.** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}z$, $\zeta = \frac{1}{2}x + 2z$. **1.18.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = -\frac{1}{2}(x - y)$, $\zeta = -x - y + z$. **1.19.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$; $\xi = x$, $\eta = x + y$, $\zeta = -3x - 2y + z$. **1.20.** $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} - u_{\tau\tau} = 0$; $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $\zeta = z - x - y$, $\tau = t - x - y$. **2.4.** Гиперболический тип при $x > 0$: $\xi = y + 2\sqrt{x}$, $\eta = y - 2\sqrt{x}$, $u_{\xi\eta} = 0$, параболический тип при $x = 0$: $u_{yy} - \frac{1}{2}u_x = 0$, эллиптический тип при $x < 0$: $\xi = y$, $\eta = \sqrt{-x}$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$. **2.5.** Гиперболический тип при $x \neq 0$: $\xi = xy$, $\eta = x$, $u_{\xi\eta} = 0$, параболический тип при $x = 0$: $u_{yy} + \frac{1}{y}u_y = 0$, уравнение вырождается при $x = y = 0$. **2.6.** Гиперболический тип при $x \neq 0$, $y \neq 0$: $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$, $u_{\xi\eta} + \frac{1}{2\eta}u_\xi = 0$, параболический тип при $x = 0$ или $y = 0$: $u_{yy} + \frac{2}{y}u_y = 0$ или $u_{xx} = 0$, уравнение вырождается при $x = y = 0$. **2.7.** Гиперболический тип при $x \neq 0$, $y \neq 0$: $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = yx^3$, $u_{\xi\eta} - \frac{1}{4\eta}u_\eta = 0$, параболический тип при $x = 0$ или $y = 0$: $u_{yy} = 0$ или $u_{xx} = 0$, уравнение вырождается при $x = 0$ или $y = 0$. **2.8.** $\xi = y - x^2$, $\eta = y^2 + x^2$, $x^2(1 + 2y)^u_{\xi\eta} + (2x^2 - y)u_\eta = 0$. **2.9.** Параболический тип при $x \neq 0$, $y \neq 0$: $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = x$, $u_{\eta\eta} - \frac{2\eta^2}{\xi + \eta^2}u_\xi = 0$, уравнение вырождается при $x = 0$, $y = 0$. **2.10.** $\xi = arctg(y) + x$, $\eta = arctg(y) - x$, $u_{\xi\eta} = 0$.**2.11.** Параболический тип всюду: $\xi = y\sin x$, $\eta = y$, $u_{\eta\eta} - \frac{\xi}{\eta}u_\xi = 0$, при $y = 0$: $u_{xx} + tgx u_x = 0$, при $tgx = 0$: $u_{yy} = 0$. **2.12.** Гиперболический тип всюду: $\xi = y^2 + e^x$, $\eta = y^2 - e^x$, $-(\xi^2 - \eta^2)u_{\xi\eta} + \frac{(\xi+3\eta)}{4}u_\xi - \frac{(3\xi+\eta)}{4}u_\eta = 0$.**2.13.** Эллиптический тип при $x \neq 0$, $y \neq 0$: $\xi = x^2$, $\eta = y^2$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$, при $x = 0$, $y = 0$ уравнение вырождается. **2.14.** Гиперболический тип всюду: $\xi = y^2 + x^2$, $\eta = y^2 - x^2$, $2(\xi^2 - \eta^2)u_{\xi\eta} + \xi u_\xi - \eta u_\eta = 0$. **2.15.** $\xi = x + 3y$, $\eta = x + y$, $v_{\xi\eta} + \frac{1}{2}v_\eta = 0$, $u = 1 - e^{-y}$. **2.16.** $\xi = x + y$, $\eta = 3x + 2y$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = \frac{5}{4}x^2 + xy$. **2.17.** $\xi = x + y$, $\eta = y - 3x$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = 3x^2 + y^2$. **2.18.** $\xi = y + 5x$, $\eta = y + x$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = \frac{5}{2}\sin(\frac{x+y}{2}) - \frac{3}{2}\sin(\frac{y+5x}{6})$. **2.19.** $\xi = y + 2x$, $\eta = y$, $v_{\eta\eta} = 0$, $u = x + y$. **2.20.** $\xi = y$, $\eta = y + 2x$, $v_{\xi\eta} = e^\xi$, $u = (1 + 2x - e^{2x})e^y + x^2 + xy$. **2.21.** $\xi = x - \frac{2}{3}y^3$, $\eta = x + 2y$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = x - \frac{1}{3}y^3 + y$. **2.22.** $\xi = y - x - \sin x$, $\eta = y + x - \sin x$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = x + \cos(x - y + \sin x)$. **2.23.** $\xi = x$, $\eta = x + e^y$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = -\frac{1}{2}x^2 + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x$. **2.24.** $\xi = 2x - y + \cos x$, $\eta = 2x + y - \cos x$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = e^x \mathrm{sh}(\frac{y - \cos x}{2}) + \sin x \cos(\frac{y - \cos x}{2})$. **2.25.** $\xi = y - \sin x + x$, $\eta = y - \sin x - x$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = \cos(y - x - \sin x)$. **2.26.** $\xi = 2x - y + \cos x$, $\eta = 2x + y - \cos x$, $4v_{\xi\eta} + v_\eta = 0$, $v = f(\xi) + e^{-\xi/4}g(\eta)$, $u = 2e^{-(2x - y - \cos x)/4}\cos x + \sin(\frac{y - \cos x}{2})$.**2.27.** $\xi = y + \frac{x^2}{2}$, $\eta = y$, $v_{\eta\eta} = 0$, $u = y^2 - \frac{x^4}{4}$.**2.28.** $\xi = x + y$, $\eta = y$, $v_{\eta\eta} = e^\eta$, $u = (x - 1)e^{x+y} + e^y + 1$.**2.29.**

$\xi = y - x^2$, $\eta = y - x^2 - 2x$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = 1 + x$.**2.30.** $\xi = x^3 y$, $\eta = \frac{y}{x}$, $4\xi v_{\xi\eta} - v_\eta = 0$, $u = y$. **2.31.** $\xi = y\sin x$, $\eta = y$, $v_{\eta\eta} = 0$, $u = y(y-1)\sin x$. **2.32.** $\xi = y - \cos x + x$, $\eta = y - \cos x - x$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = (y - \cos x + x)^2 - (y - \cos x)^2 - x$. **2.33.** $\xi = y + \cos x + 2x$, $\eta = y + \cos x - 2x$, $v_{\xi\eta} = 0$, $u = \frac{(y+\cos x+2x)^2}{4}$. **2.34.** $\xi = \ln y - \mathrm{ctg} x$, $\eta = y$, $v_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} v_\eta = 0, v = f(\xi)\ln\eta + g(\xi), u = \mathrm{ctg} x - \ln y$. **3.1.** $T u_{xx} + f(x) = 0$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, где $f(x)$ - плотность нагрузки. **3.2.** $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(t,0) = \varphi(t)$, $u_x(t,l) = \frac{\Phi(t)}{ES}$, $t > 0$, $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = 0$, $0 \le x \le l$, $a^2 = \frac{E}{\rho}$. **3.3.** $u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu^2 u_t$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,x) = \varphi(x)$, $u_t(0,x) = \psi(x)$, $0 \le x \le l$, $t > 0$, $u(t,0) = u(t,l) = 0$, $t > 0$, где $2\nu^2 = k/\rho$, k - коэффициент трения. **3.4.** $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \ne x_i$, $i = 1, ..., m$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(t,0) = u(t,l) = 0$, $u(t, x_i - 0) = u(t, x_i + 0)$, $u_x(t, x_i + 0) - u(t, x_i - 0) = \frac{m_i}{T} u_{tt}(t, x_i)$, $t > 0$, $i = 1, ..., m$, $u(0,x) = f(x)$, $u_t(0,x) = F(x)$, $0 \le x \le l$. **3.5.** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $0 < x < l$, $t > 0$, $|u(t,0)| < \infty$, $u(t,l) = 0$, $t > 0$, $u(0,x) = f(x)$, $u_t(0,x) = F(x)$, $0 \le x \le l$. **3.8.** $u_{tt} + k u_t = a^2 \Delta u + \frac{f(t,r,\varphi)}{\rho}$, $0 \le r < R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $t > 0$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$, $|u(t,0,\varphi)| < \infty$, $u(t,R,\varphi) = 0$, где $a^2 = T/\rho$, $k = \alpha/\rho$, α - коэффициент упругого сопротивления среды. **3.9.** $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,x) = f(x)$, $0 \le x \le l$, краевые условия: а) $u|_{x=0} = \varphi_1(t)$, $u|_{x=l} = \varphi_2(t)$, $t > 0$, б) $-kSu_x|_{x=0} = q_1(t)$, $kSu_x|_{x=l} = q_2(t)$, $t > 0$, в) $u_x|_{x=0} = h[u(t,0) - \varphi_1(t)]$, $u_x|_{x=l} = -h[u(t,l) - \varphi_2(t)]$, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ – теплоемкость, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — в случае а) — температура концов стержня, в случае в) — температура окружающего пространства на концах стержня, q_i — тепловые потоки на концах стержня. **3.10.** $u_t = a^2 u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho S} u$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,x) = f(x)$, $0 \le x \le l$, $u|_{x=0} = u_0$, $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$, $t > 0$, p — периметр поперечного сечения стержня, $h = \frac{\alpha}{k}$, $a^2 = k/(c\rho)$. **3.11.** $u_t = a^2 u_{xx} + \frac{q}{c}\delta(x - v_0 t)$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, $u(0,x) = \varphi(x)$, $a^2 = k/(c\rho)$. **3.12.** $u_t = a^2 u_{xx} - b(u - u_0)$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,x) = f(x)$, $0 \le x \le l$, $u|_{x=0} = u|_{x=l}$, $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l}$, $a^2 = k/(c\rho)$, $b = \frac{\alpha P}{c\rho S}$, где P — периметр поперечного сечения кольца, $x = R\theta$, θ — угловая координата. **3.13.** $u_t = a^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r) + \frac{Q}{c\rho}$, $0 \le r < R$, $t > 0$, $u(0,r) = f(r)$, $0 \le r \le R$, $|u(t,0)| < \infty$; граничные условия: а) $u(t,R) = 0$, б) $(u_r + Hu)|_{r=R} = 0$, $H = \alpha/k$, $a^2 = k/(c\rho)$. **4.1.** $\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi at}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}$. **4.2.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{ak\pi t}{l} + +b_k\sin\frac{ak\pi t}{l})\times\sin\frac{k\pi x}{l}$, $a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$, $b_k = \frac{2}{a\pi k}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$. **4.3.** $\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\times\sin\frac{\pi x}{2l} + \cos\frac{5a\pi t}{2l}\cdot\sin\frac{5\pi x}{2l}$. **4.4.** $\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l} + +\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l} + \frac{8l}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cdot\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t\cdot\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$. **4.5.** $\cos\frac{a\pi t}{2l}\cos\frac{\pi x}{2l} + \frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi t}{2l}\cdot\cos\frac{3\pi x}{2l} + \frac{2l}{5a\pi}\cdot\sin\frac{5a\pi t}{2l}\cdot\cos\frac{5\pi x}{2l}$. **4.6.** $t + \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)}{l}a\pi t \cos\frac{(2k+1)}{l}\pi x$. **4.7.** $\frac{A}{1+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{l} + \frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}$. **4.8.** $\frac{A}{1+\left(\frac{a\pi}{2l}\right)^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{2l} + \frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\right)\cos\frac{\pi x}{2l}$. **4.9.** $\frac{b}{a^2}\left(\frac{x}{l}shl - shx\right) + \frac{2b}{a^2\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cos\frac{k\pi at}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l} - \frac{2b\pi}{a^2}\mathrm{sh}l\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2\pi^2+l^2}\cdot\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$. **4.10.** $-\frac{8l^4t^2}{\pi^5}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k+1}{l}\pi x}{(2k+1)^5} + \frac{16l^6}{\pi^7}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k+1}{l}\pi x}{(2k+1)^7} - \frac{16l^6}{\pi^7}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\cos\frac{2k+1}{l}\pi t}{(2k+1)^7}$. **4.11.** $\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)t^2 + \frac{x}{\pi}t^3 + \sin x\cos t + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\ [(-1)^k 3t - 1 + \cos kt$

$-\frac{(-1)^k}{k}3\sin kt]\sin kx$. **4.12.** $x+t+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)t}{2}\sin\frac{(2k+1)x}{2}$. **4.13.** $\frac{xt}{l}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2l}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}$. **4.14.** $t+1+x(t^3-t+1)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{(k\pi)^2}\left[\frac{6(-1)^{k+1}}{(\pi k)^2}-1\right]\sin\pi kt+\frac{(-1)^k 12t}{\pi^3k^3}\right\}\cdot\sin\pi kx$. **4.15.** $-\frac{8}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^3}\cos(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2+4t})$. **4.16.** $-\frac{8e^{-t}}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cdot\left[\cos(2k+1)t+\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)t\right]\sin(2k+1)x$. **4.17.** $8e^{-t}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}[(-1)^k-\frac{2}{\pi(2k+1)}]\sin\frac{2k+1}{2}t\cos\frac{2k+1}{2}x$. **4.18.** $t(1-x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{t}{2}}\frac{1}{(k\pi)^3}[2\cos\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t-2]\sin\pi kx$, $\lambda_k=\sqrt{(k\pi)^2-\frac{1}{4}}$. **4.19.** $(2-x)t+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4t}{k\pi\lambda_k^2}-\frac{k\pi}{\lambda_k^3}\sin\lambda_k t\right)\sin\frac{k\pi x}{2}$, $\lambda_k=\sqrt{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2-1}$. **4.20.** $\frac{xt}{l}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k\lambda_k^2}\left(t-\frac{\sin\lambda_k t}{\lambda_k}\right)\sin\frac{\pi kx}{l}$, $\lambda_k=\sqrt{(\pi k/l)^2-1}$. **4.21.** $\sin 2x\cos 2t+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k^3}(1-\cos kt)\sin kx$; **5.1.** $\frac{2lA}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\,exp\left(-\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}t\right)$. **5.2.** $\frac{8lA}{\pi^2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot exp\left[-\frac{(2k+1)^2a^2\pi^2t}{4l^2}\right]\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$. **5.3.** U. **5.4.** $exp\left[-\left(\frac{a^2\pi^2}{4l^2}+\frac{\beta}{a^2}\right)t\right]\sin\frac{\pi x}{2l}$. **5.5.** $qx+\frac{(A-q)l}{2}-\frac{4l(A-q)}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}exp\left[-\frac{(2k+1)^2a^2\pi^2}{l^2}t\right]\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}$. **5.6.** $\frac{1}{\beta+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\cdot\left[1-exp[-(\beta+\frac{a^2\pi^2}{l^2})t]\right]\cdot\sin\frac{\pi x}{l}$. **5.7.** $\frac{aA}{\cos\frac{l}{a}}\cdot e^{-t}\sin\frac{x}{a}+\frac{2}{l}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\frac{T}{\omega_k}+\frac{(-1)^ka^2A}{1-a^2\omega_k^2}\right]e^{-a^2\omega_k^2t}\cdot\sin\omega_k x$, $\omega_k=\frac{(2k+1)\pi}{2l}$, $\omega_k\neq\frac{1}{a}$. **5.8.** $\frac{8c}{\pi^3}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cdot exp\left[-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}\right]\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$. **5.9.** $\frac{2A\omega}{\pi}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi kx}{l}\cdot\int\limits_0^t e^{\lambda_k^2\xi}\cos\omega\xi\,d\xi$, $\lambda_k=\frac{\pi ka}{l}$. **5.10.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)\left[1-e^{-36\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)^2t}\right]}{360(k^2+k-\frac{3}{4})(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)x$. **5.11.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2k\pi(1-2\cos k\pi)}{8+k^2\pi^2}+\frac{16(-8+8\cos k\pi-k^2\pi^2\cos k\pi)}{k^3\pi^3(8+k^2\pi^2)}\cdot e^{-\frac{3}{4}(8+k^2\pi^2)t}\right]\sin\frac{k\pi x}{2}$. **5.12.** $t\cos x+\frac{1}{8}(e^{-8t}-1)\cos 3x$. **5.13.** $xt+\sin\pi xe^{x-t-\pi^2t}$. **5.14.** $x+t\sin x+\frac{1}{8}(1-e^{-8t})\sin 3x$. **5.15.** $tx^2+\frac{1}{4}(e^{4t}-1)+t\cos 2x$. **5.16.** $t+1+(1-e^{-t})e^x\sin x+e^{x-4t}\sin 2x$. **5.17.** $xt^2+e^t+\sin t-\cos t+e^{-3t}\cos 2x$. **5.18.** $x^2+2e^{9t}+(2t-\sin 2t)\cos 3x$. **5.19.** $x+t^2+\frac{1}{5}(e^{5t}-1)\cos x+\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\cos 3x$. **5.20.** $x^2t+x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{C_{2k-1}}{(2k-1)^2-6}(1-e^{-6}(2k-1)^2t)\sin(2k-1)x$, $C_{2k-1}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-3}\right)$.
6.6. $u=(x+2t)^2$. **6.7.** $u=x^2+xt+4t^2+\frac{1}{6}xt^3$. **6.8.** $u=\sin x$. **6.9.** $u=xt+\sin(x+t)-(1-\mathrm{ch}t)e^x$. **6.10.** $u=1+t+\frac{1}{9}(1-\cos 3t)\sin x$. **6.11.** $u=\frac{1}{a^2\omega^2}(1-\cos a\omega t)\sin\omega x$. **6.12.** $u=\frac{t}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t$. **6.13.** $u=x+ty+t^2$. **6.14.** $u=xyt(1+t^2)+x^2-y^2$. **6.15.** $u=\frac{1}{2}t^2(x^3-3xy^2)+e^x\cos y+te^y\sin x$. **6.16.** $u=x^2+t^2+t\sin y$. **6.17.** $u=2x^2-y^2+(2x^2+y^2)t+2t^2+2t^3$. **6.18.** $u=x^2+ty^2+\frac{1}{2}t^2(6+x^3+y^3)+t^3+\frac{3}{4}t^4(x+y)$. **6.19.** $u=e^{3x+4y}\left[\frac{26}{25}\mathrm{ch}5t-\frac{1}{25}+\frac{1}{5}\mathrm{sh}5t\right]$. **6.20.** $u=(x^2-y^2)(e^t-1-t)$. **6.21.** $u=yt^2+\frac{1}{3}xt^3+xy^2t+x^2y$. **6.22.** $u=x^2+y^2-2z^2+t+t^2xyz$. **6.23.** $u=y^2+tz^2+8t^2+\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4x^2+\frac{2}{45}t^6$. **6.24.** $u=x^2y^2z^2+tzxy+3t^2(x^2+y^2+z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+3t^4(3/2+x^2+y^2+z^2)+9/5t^6$. **6.25.** $u=e^{x+y}\cos(z\sqrt{2})+te^{3y+4z}\sin 5x+t^3e^{x\sqrt{2}}\sin y\cos z$. **6.26.** $u=x^2+y^2+z^2+3t^2+xyt$.

7.4. $u = 1 + e^t + \frac{1}{2}t^2$. **7.5.** $u = t^3 + e^{-t}\sin x$. **7.6.** $u = (1+t)e^{-t}\cos x$. **7.7.** $u = \mathrm{ch} t \sin x$. **7.8.** $u = 1 - \cos t + (1+4t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right)$. **7.9.** $u = (1+t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2x-x^2+t}{1+t}\right)$. **7.10.** $u = x(1+4t)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right)$. **7.11.** $u = (1+t)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{1+t}\exp\left(-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}\right)$. **7.12.** $u = e^t(t-1)+3$. **7.13.** $u = e^t - 1 + e^{-2t}\cos x\cos y$. **7.14.** $u = x^2 - y^2 + \sin x \sin y(1-e^{-2t})$. **7.15.** $u = \sin t + \frac{xy}{(1+4t)^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{1+4t}\right)$. **7.16.** $u = \sin l_1 x \sin l_2 y \exp(-(l_1^2 + l_2^2)t)$. **7.17.** $u = \sin l_1 x \cos l_2 y \exp(-(l_1^2 + l_2^2)t)$. **7.18.** $u = \cos l_1 x \cos l_2 y \exp(-(l_1^2 + l_2^2)t)$. **7.19.** $u = \sin by \exp(ax + (a^2 - b^2)t), a \neq b; u = \sin by e^{ax}, a = b$. **7.20.** $u = \frac{1}{4}\cos x(e^{-2t} - 1 + 2t) + \ cosy \cos z e^{-4t}$. **7.21.** $u = e^t - 1 + \sin(x-y-z)e^{-9t}$. **7.22.** $u = \frac{1}{4}\sin 2z + \frac{1}{\sqrt{1+t}}\cos 2y exp(-t - \frac{x^2}{1+t})$. **7.23.** $u = e^{-l_1^2 t}\sin l_1 x_1 + e^{-l_m^2 t}\cos l_m x_m$. **8.7.** $0 \le u(t,x) \le \frac{1}{4}$. **8.9.** $\max\limits_{\overline{Q_T}} u(t,x) = 9$, $\min\limits_{\overline{Q_T}} u(t,x) = 0$. **8.11.** $|u(t,x)| \le \max\{2, \frac{4l^3}{27}\}$. **8.12.** $u(t,x) - w(t,x) \ge 0$. **9.2.** а) $\alpha < m$, б) $\alpha < 1$. **9.9.** а) $1/3$, б) $\frac{35}{108}$, в) $\frac{1}{\pi} + \frac{7}{24}$, г) 0, д) $3/2$, е) $1 - 2\ln 2$. **10.6.** 1. $y' = \mathrm{sign} x \sin x + |x|\cos x$, $y'' = 2\mathrm{sign} x \cos x - |x|\sin x$. 2. $y' = \mathrm{sign} x \cos x - |x|\sin x$. **11.12.** $-1 + \frac{2\sqrt{e}}{e+1}\mathrm{ch}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. **11.13.** $-x^2 + \frac{x+1}{2}$. **11.14.** $\frac{-\pi^2}{8}$.