Тема: Тип уравнений в частных производных второго порядка

Варианты заданий

1. Определить тип уравнения в пространстве E_3
$u_{xx} + 4u_{xz} + u_{yy} + u_{zz} + u_x + u_y = 0.$
2. Определить тип уравнения на плоскости переменных $(x; y)$
$(x^2 - 1)^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + u^2 = 0.$
3. Определить тип уравнения на плоскости переменных $(x; y)$
$(x - 1)u_{xx} + 2\cos y\, u_{yy} + u = 0.$
4. Привести уравнение к каноническому виду
$u_{xx}(x, y) + 3u_{yy}(x, y) = u(x, y).$
5. Определить тип уравнения на плоскости переменных $(x; y)$
$(x - 1)u_{xx} + 2\cos^2 y\, u_{yy} + u = 0.$
6. Найти общее решение уравнения $u_{xx} = a^2 u_{yy}$.
7. Найти общее решение уравнения $u_{xy} = 0$.

Тема: Постановка задач

Варианты заданий

1. Записать формулировку следующих задач:
а) колебание струны с однородными краевыми условиями первого рода;
б) вторая краевая задача для уравнения Пуассона;
в) задача Коши для уравнения теплопроводности.
2. Поставить первую краевую задачу для уравнения теплопроводности $(n-1)$ и дать определение классического решения этой задачи.
3. Поставить вторую краевую задачу для уравнения колебания струны и дать определение классического решения этой задачи.
4. Поставить:
а) вторую краевую задачу для уравнения теплопроводности;
б) третью краевую задачу для уравнения Лапласа;
в) задачу Коши для уравнения колебания мембраны.
5. Поставить первую краевую задачу для уравнения Пуассона в квадрате $[0; 2] \times [0; 2]$ и дать определение классического решения этой задачи.

Тема: Теорема единственности

Варианты заданий

1. Доказать единственность гладкого решения первой краевой задачи для уравнения колебания струны.
2. Доказать единственность решения краевой задачи
$u_{tt} = u_{xx} + f(t, x)$, $(t, x) \in Q_T = \{(t, x) | 0 < t < T, 0 < x < \pi\}$,
$u(0, x) = \sin x$, $u_t(0, x) = x(\pi - x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$u(t, 0) = u(t, \pi) = \sin^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant T$,
в классе $C^2(\overline{Q}_T)$.
3. Доказать единственность в классе $C^2(\overline{Q}_T)$, $Q_T = \{(t, x) | 0 < t < T, a < x < b\}$,

решения $u(t,x)$ краевой задачи $u_{tt}=u_{xx}$,
$u(0,x)=u_0(x)$, $u_t(0,x)=u_1(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$,
$u(t,a)=\varphi(t)$, $u(t,b)=\psi(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Тема: Метод Фурье для волнового уравнения

Варианты заданий

1. Найти в $\overline{Q}_T=\{(t,x)|0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant x\leqslant \pi\}$ решение $u(t,x)$ задачи
$u_{tt}=u_{xx}$,
$u(0,x)=\sin\, 2x$, $u_t(0,x)=\sin\, 5x$, $0\leqslant x\leqslant \pi$,
$u(t,0)=u(t,\pi)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$.
2. Найти в $\overline{Q}_T=\{(t,x)|0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant x\leqslant l\}$ решение $u(t,x)$ задачи
$u_{tt}=4u_{xx}$,
$u(0,x)=\sin\, \frac{3\pi x}{l}$, $u_t(0,x)=\sin\, \frac{5\pi x}{l}$, $0\leqslant x\leqslant l$,
$u(t,0)=u(t,l)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$.
3. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля для задачи
$u_{tt}=3u_{xx}$,
$u(0,x)=\sin\, x$, $u_t(0,x)=0$, $0\leqslant x\leqslant \pi$,
$u(t,0)=u(t,\pi)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$. Найти решение этой задачи Штурма-Лиувилля.

Тема: Метод Фурье для уравнения теплопроводности

Варианты заданий

1. Найти в $\overline{Q}_T=\{(t,x)|0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant x\leqslant l\}$ решение $u(t,x)$ задачи
$u_t=u_{xx}$,
$u(0,x)=\sin\, \frac{\pi}{l}x\cos\, \frac{\pi}{l}x$, $0\leqslant x\leqslant l$,
$u(t,0)=u(t,l)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$.
2. Найти решение $u(t,x)$ краевой задачи
$u_t=9u_{xx}$,
$u(0,x)=\sin\, 2x\cos\, 2x$, $u(t,0)=u(t,\pi)=0$.
3. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля для задачи
$u_t=4u_{xx}$,
$u(0,x)=\sin\, x$, $0\leqslant x\leqslant \pi$,
$u(t,0)=u(t,\pi)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$. Найти решение этой задачи Штурма-Лиувилля.

Тема: Принцип максимума для параболических уравнений

Варианты заданий

1. Оценить в $\{(t,x)|0\leqslant t\leqslant \infty, 0\leqslant x\leqslant 1\}$ классическое решение $u(t,x)$ первой краевой задачи
$u(0,x)=x(1-x)$, $u(t,0)=u(t,1)=0$ для уравнения $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$, $\mu=\mathrm{const}>0$.
2. Оценить в $\{(t,x)|0\leqslant t\leqslant \infty, 0\leqslant x\leqslant 1\}$ классическое решение $u(t,x)$ первой краевой задачи
$u_t=u_{xx}+u^2+f(t,x)$, $(t,x)\in[0;1]\times[0;1]$,

$u(0,x)=u_0(x)$, $u(t,0)=u(t,1)=0$.
3. Доказать теорему единственности классического решения первой краевой задачи для уравнения
$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+u^3(t,x)=\mu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$, $\mu=\mathrm{const}>0$.
4. Доказать единственность классического решения $u(t,x)$ задачи
$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+u^2(t,x)+f(t,x)$, $(t,x)\in[0;1]\times[0;1]$, $u(0,x)=u_0(x)$, $u(t,0)=u(t,1)=0$.
5. Оценить в полосе $\{(t,x)|0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant t\leqslant\infty\}$ классическое решение $u(t,x)$ первой краевой задачи
$u_t+u_x=u_{xx}$, $u(0,x)=\sin x$, $u(t,0)=u(t,\pi)=0$.

Тема: Задача Коши для волнового уравнения

Варианты заданий

1. Решить задачу Коши
$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}$, $t>0$, $(x,y)\in R_2$,
$u(0,x,y)=y$, $u_t(0,x,y)=x^2+y$.
2. Решить задачу Коши
$u_{tt}=3u_{xx}+u_{yy}$, $t>0$, $x\in E_1$,
$u(0,x)=\cos^2 x$, $u_t(0,x)=\sin^2 x$.
3. Найти решение следующей задачи:
$u_{tt}=2u_{xx}+2x$, $u(0,x)=3$, $u_t(0,x)=\cos x$, $t\geqslant 0$, $x\in R_1$.

Тема: Задача Коши для уравнения теплопроводности

Варианты заданий

1. Решить задачу Коши
$u_t=3u_{xx}+2u$, $t>0$, $x\in R_1$,
$u(0,x)=3$.
2. Записать формулу Пуассона и указать, решением какой задачи она является.
3. Доказать, что функция
$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\varphi(\xi)\,d\xi$$
есть решение уравнения $u_t=u_{xx}$ при $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям $|\varphi(x)|\leqslant M\,e^{\alpha|x|}$, $\alpha=\mathrm{const}\geqslant 0$, в $\Pi(0,T]=\{0<t\leqslant T,\ x\in E_1\}$.
4. Выписать решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности с начальными данными $u(0,x)=e^x\sin x$ (формула Пуассона).

Тема: Корректность по Адамару

Варианты заданий

1. Дать определение задачи, корректной по Адамару.
2. Дать определение корректности по Адамару. Привести пример некорректно поставленной задачи. Дать обоснование (указать, что нарушается).
3. Определить, корректна ли (по Адамару) задача:
Найти в классе $C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ решение задачи
$u_t = 4u_{xx}$, $u(0,x) = \cos x$, $x \in [0;\pi]$,
$u(t,0) = \cos t$, $u(t,\pi) = t^2$, $t \in [0;T]$.
4. Определить, является ли корректной по Адамару следующая задача (дать обоснование):
$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $0 < x < \pi$,
$u_t(0,x) = \sin^2 x$, $x \in [0;\pi]$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $t \in [0;T]$.

Тема 1: Определение пространств

Варианты заданий

1. Дать определение пространства $C^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
2. Дать определение пространства $C^k(\overline{\Omega})$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
3. Дать определение пространства $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
4. Дать определение пространства $L_p(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
5. Дать определение пространства $L_{2,loc}(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
6. Дать определение пространства $H^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
7. Дать определение пространства $H^1(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
8. Дать определение пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
9. Доказать полноту пространства $H^1(\Omega)$.

Тема: Обобщённая производная (по Соболеву)

Варианты заданий

1. Дать определение α-обобщённой производной.
2. Доказать единственность α-обобщённой производной.
3. Доказать независимость α-обобщённой производной от последовательности операций обобщённого дифференцирования.
4. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет α-обобщённую производную в области Ω, то она имеет α-обобщённую производную в любой подобласти Ω, и эти производные совпадают в этой подобласти.

5. Найти первую обобщённую производную функции $f(x) = |x|$ в области
а) $\Omega = (-5; 7)$; б) $\Omega = (5; 7)$.
6. Найти первую обобщённую производную функции $f(x) = |x - 2|$ в области
а) $\Omega = (-5; 7)$; б) $\Omega = (5; 7)$.
7. Найти первую обобщённую производную функции $f(x) = |x| \sin x$ в области
а) $\Omega = (-1; 1)$; б) $\Omega = (\pi; 7\pi)$.
8. Найти вторую обобщённую производную функции $f(x) = |x| \sin x$ в области
а) $\Omega = (-1; 1)$; б) $\Omega = (\pi; 7\pi)$.
9. Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ не имеет первой обобщённой производной в области $(-a; a)$, $a > 0$.

Тема: След функции

Варианты заданий

1. Дать определение следа функции из класса $H^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$.
2. Найти след $f|_{\partial\Omega}$ функции $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1/2, & |x| = 1, \end{cases}$ на границе $\partial\Omega$ области $\Omega = (-1; 1)$.
3. Найти след $f|_{\partial\Omega}$ функции $f(x) = \begin{cases} 7, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \end{cases}$ на границе $\partial\Omega$ области $\Omega = (-1; 1)$.
4. Выписать неравенство о следе функции из класса $H^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$.

Тема: Эквивалентность норм пространств

Варианты заданий

1. Дать определение эквивалентности норм нормированного пространства.
2. Привести примеры эквивалентных норм в пространстве $H^1(\Omega)$ (с доказательством эквивалентности).
3. Привести примеры эквивалентных норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (с доказательством эквивалентности).
4. Доказать эквивалентность норм в пространстве $H^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\, dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + k(x)|\nabla u(x)|^2)\, dx$,
где $k(x) \geqslant 1$, измерима по Лебегу, ограничена и положительна на $\overline{\Omega}$.
5. Доказать эквивалентность норм в пространстве $H^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\, dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega (2u^2(x) + k(x)|\nabla u(x)|^2)\, dx$,
где $k(x)$ измерима по Лебегу, ограничена и положительна на $\overline{\Omega}$.
6. Доказать эквивалентность норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\, dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega k(x)|\nabla u(x)|^2)\, dx$, где $k(x)$ измерима по Лебегу, ограничена и положительна на $\overline{\Omega}$.
7. Доказать эквивалентность норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\, dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2)\, dx$.
8. Выписать неравенство Пуанкаре-Фридрихса.

Тема: Обобщенное решение эллиптического уравнения

Варианты заданий

1. Доказать теорему существования и единственности в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ обобщенного решения задачи
$-\Delta u = \sin x_1 \cdot \sin x_2,\ u|_{\partial\Omega} = 0.$
2. Дать определение обобщенного решения краевой задачи
$-(x_1^2 + x_2^2 + 1)\Delta u + u = f,\ u|_{\partial\Omega} = 0,$
где Δ — двумерный оператор Лапласа.

3. Дать определение обобщенного решения первой краевой задачи в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ для уравнения Пуассона. Сформулировать и доказать теорему существования и единственности обобщенного решения этой задачи.
4. Пусть задан элемент $u \in H^1(\Omega)$. Является ли линейным непрерывным функционалом над $H^1(\Omega)$ $(\partial\Omega \in C^1)$ функционал
$\int\limits_\Omega uv\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} u(\xi)v(\xi)\,d\xi$?
5. Доказать, что при $\varphi(x) \in H^1(\Omega)$, функционал
$\int\limits_\Omega \varphi(x)v(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sin^2(|s|)v(s)\,ds$ является непрерывным над $H^1(\Omega)$.

Тема: Метод Галёркина

Варианты заданий

1. Вывести априорную оценку последовательности $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ галёркинских приближений в случае первой краевой задачи для эллиптического уравнения.

2. Доказать сильную в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ сходимость галёркинских приближений $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ к обобщенному решению u краевой задачи
$-\Delta u + u = f,\ u|_{\partial\Omega} = 0,$
считая, что слабая сходимость $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ к u уже доказана.

3. Дать определение базиса в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Выписать схему построения решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения (с однородными граничными условиями) методом Галёркина.

Тема: Квадратичный функционал

Варианты заданий

1. Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$. Выписать необходимое условие, которому удовлетворяет элемент u, реализующий минимум функционала $\Phi(u) = ||u||^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} + 2(f,u)_{L_2(\Omega)}$ на $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.
2.Доказать существование обобщенного решения задачи
$-\Delta u = f,\ u|_{\partial\Omega} = 0$
в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

3. Дать определение квадратичного функционала. Доказать его ограниченность снизу.
4. Дать определение базиса в бесконечномерном банаховом пространстве; дать определение минимизирующей последовательности (для функционала).
5. Доказать сходимость минимизирующей последовательности к элементу, реализующему минимум функционала. Доказать единственность минимизирующего элемента.
6. Вывести необходимое условие, которому удовлетворяет элемент, реализующий минимум квадратичного функционала.