Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
___________ / Ю. Я. Белов
(подпись)
«____» _____________ 2011 г.

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Специальность 010501.65 «Прикладная математика и информатика»

«О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ»

Выпускник _____________ / Г. В. Романенко
(подпись, дата)

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры МАиДУ _____________ / И. В. Фроленков
(подпись, дата)

Красноярск 2011

РЕФЕРАТ

Дипломная работа по теме «О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения» содержит 67 страниц текста и 18 использованных источников.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА, КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, МЕТОД СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ, УСЛОВИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ.

В представленной работе исследуется обратная задача для многомерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка. Постановка обратной задачи возникла из работы «О методах исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений» Ю.Е.Аниконова. В данной работе доказано, что если начальные условия имеют специальный вид, то вопрос отыскания решения исходной обратной задачи сводится к исследованию двух прямых задач, одна из которых содержит выражение для неизвестного коэффициента. Решением обратной задачи является скалярное произведение решений вспомогательных прямых задач. Цель работы, используя теорему, доказанную Ю.Е. Аниконовым, привести обратную задачу к неклассической прямой задаче для сильно нелинейного уравнения специального вида, а затем доказать существование и единственность задачи при помощи метода слабой аппроксимации. Метод слабой аппроксимации был впервые предложен в работах Н.Н. Яненко и А.А. Самарского и получил развитие в работах их учеников и последователей.

Все полученные в работе результаты являются новыми, имеют теоретическое значение и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к обратным и некорректным задачам возник еще в начале XX века. В 1902 году Ж.Адамар сформулировал понятие корректности постановки задач для дифференциальных уравнений. Корректной по Адамару называют задачу, решение которой существует, единственно и устойчиво, т.е. непрерывно зависит от входных данных. В 1943 А.Н.Тихонов указал на практическую важность обратных и некорректных задач и возможность устойчивого их решения.

Для того чтобы дать определение *обратной задачи*, необходимо разобраться с понятием *прямой задачи.*

В прямых задачах математической физики требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное). Для решения прямой задачи задаются:

1. область, в которой процесс изучается;
2. уравнение, описывающее данный процесс;
3. начальные условия (если процесс нестационарный);
4. условия на границе исследуемой области (если область ограничена).

Например, для уравнения теплопроводности можно поставить следующую начально-краевую задачу

$$cu_t = (ku_x)_x - qu + f, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$u(t, 0) - \lambda_1 u_x(t, 0) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t, l) - \lambda_2 u_x(t, l) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Данная задача является математической моделью многих физических процессов. Коэффициенты, входящие в уравнение, и граничные условия представляют собой некоторые эффективные характеристики исследуемого процесса. В том случае, когда поставленная задача описывает процесс распространения тепла в стержне, коэффициенты c и k являются соответсвенно коэффициентами теплоемкости и теплопроводности и характеризуют материал, из которого изготовлен стержень. Теплофизическую интерпретацию имеют также все остальные функции, входящие в уравнение, краевые и начальные условия. В рамках данной математической модели температура в стержне в точке x и момент времени t — функция $u(t,x)$, являющаяся решением поставленной задачи, определяется величинами c, k, q, f, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, φ — характеристиками теплофизического процесса.

В том случае, когда все эти величины заданы, решив *прямую задачу*, можно найти $u(t,x)$, т.е. определить характер процесса распространения тепла в стержне.

Однако, во многих реальных теплофизических процессах те или иные характеристики среды неизвестны, но из эксперимента можно получить дополнительную информацию о температуре. Например, все коэффициенты и функции известны, кроме коэффициента теплопроводности $k(x)$. Из эксперимента при помощи датчиков в точке x_0, определяется функция $g(t) = u(t, x_0)$ — температура в некоторой внутренней точке стержня — как функция от времени. Таким образом, возникает *обратная задача:* определить коэффициент теплопроводности $k(x)$, если задана функция $g(t)$.

В целом, под *обратными задачами* будем понимать задачи, решение которых состоит в обращении причинно-следственных связей, проводится в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта или процесса и заключается в определении параметров данной модели по имеющимся результатам наблюдений и прочей экспериментальной информации.

Многие важные прикладные вопросы, касающиеся упругих смещений, электромагнитных колебаний, диффузионных процессов, геофизики, астрофизики, сейсмологии, компьютерной томографии, геотомографии, квантовой теории рассеяния, подводной акустики, квазиоптики, дифракции, теории колебаний молекул, георадиолокации, геофизической нейтронометрии, графиметрии и др., приводят к обратным задачам. Примеры задач приведены в [1, 2].

Особый, достаточно широкий класс представляют обратные задачи для уравнений в частных производных, поскольку именно такие уравнения наиболее часто употребляются для построения математических моделей самых разнообразных процессов. Важной особенностью обратных задач, возникающих при обработке результатов эксперимента, является то, что исходная информация в этих задачах известна приближенно.

В связи с тем, что ранее практически все обратные задачи были некорректными с точки зрения их постановки, то существенный прогресс в исследовании стал возможен лишь в последние десятилетия в связи с развитием теории некорректных и обратных задач, большой вклад в разработку которой сделан математиками А.Н. Тихоновым, М.М. Лаврентьевым, А.М. Денисовым, А.И. Прилепко, В.Г. Романовым, Ю.Е.Аниконовым и многими другими.

В настоящее время теория обратных задач математической физики активно развивается представителями ряда отечественных математических школ, в том числе Московской (основанной А. Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым).

Целью настоящей дипломной работы было исследование коэффициентной обратной задачи для многомерного параболического уравнения в случае данных Коши с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка.

Постановка обратной задачи возникла из работы Ю.Е.Аниконова [3]. В данной работе доказано, что если начальные условия имеют специальный вид, то вопрос отыскания решения исходной обратной задачи сводится к исследованию двух прямых задач, одна из которых содержит выражение для неизвестного коэффициента. Решением обратной задачи является скалярное произведение решений вспомогательных прямых задач. Цель работы, используя теорему, доказанную Ю.Е. Аниконовым, привести обратную задачу к неклассической прямой задаче для сильно нелинейного уравнения специального вида, а затем доказать существование и единственность задачи при помощи метода слабой аппроксимации.

Передо мной были поставлены следующие задачи.

1. Изучение метода слабой аппроксимации для исследования обратных задач для параболических уравнений ([3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]).

2. Доказательство существования и единственности решения задачи в случае, когда начальные данные имеют вид $u_0(x,z) = \omega_0(x)v_0(z)$.

3. Доказательство существования и единственности решения задачи в случае, когда начальные данные имеют вид $u_0(x,z) = \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_0^i(x)v_0^i(z)$.

4. Построение модельных примеров входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем, и соответствующих им решений.

Дипломная работа состоит из трех частей. В первой приведены некоторые обозначения, вспомогательные утверждения и теоремы, которые необходимы для дальнейшей работы.

Во второй главе исследована обратная задача для многомерного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка, в случае, когда начальные данные заданы в виде $u(0,x,z) = u_0(x,z) = \omega_0(x)v_0(z)$. Используя подход, предложенный Ю.Е. Аниконовым, приводим обратную задачу к двум прямым, одна из которых — классическая задача Коши для многомерного параболического уравнения, а вторая является задачей Коши для сильно нелинейного уравнения специального вида и содержит выражение для неизвестного коэффициента. Доказательство существования решения прямой задачи Коши специального вида проводится методом слабой аппроксимации [5, 10], в предположении достаточной гладкости входных данных в классах гладких ограниченных функций. Единственность решения задачи следует из доказательства тождественного равенства нулю разности двух предполагаемых решений. В конце главы приведен пример, удовлетворяющий условиям доказанных теорем, который показывает, что данный класс задач не пуст.

В третьей главе рассмотрем более широкий класс входных данных. Начальные данные имеют вид $u(0,x,z) = u_0(x,z) = \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_0^i(x)v_0^i(z)$. Доказательство проводится аналогичными методами.

1 Вспомогательные предложения

1.1 Основные определения и теоремы

Пусть Ω — ограниченная область в E_n. E_n — действительное n-мерное евклидово пространство, $n \geq 1$, n — целое.

Точка в E_n обозначается через $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Замыкание множества Ω обозначим как $\overline{\Omega}$.

Пусть α — мультииндекс, то есть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_i — целые неотрицательные числа и $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Под обозначением $D_x^\alpha h(x)$ будем понимать частную производную функции $h(x)$ порядка $|\alpha|$:

$$D_x^\alpha h(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} h(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Символом $C^k(\Omega)$ будем обозначать совокупность всех k-раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на Ω.

Рассмотрим ограниченное в E_n множество Ω и пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $f(x)$ с нормой $||f||_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$.

Пусть M — некоторое бесконечное множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $\big(M \subset C(\overline{\Omega})\big)$.

Определение 1.1. *Говорят, что функции множества M равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$, если существует постоянная k такая, что неравенство*

$$||f||_{C(\overline{\Omega})} \leq k$$

выполняется для всех функций из M.

Определение 1.2. *Говорят, что функции множества M равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такая, что для любых x' и x'' из $\overline{\Omega}$, удовлетворяющих неравенству*

$$|x' - x''| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

причем для всех функций из M.

Определение 1.3. *Множество M метрического пространства $\mathbb{X}$ называется компактным, если из любой бесконечной последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу $x \in M$.*

Теорема 1.1 (Арцела). *Для того, чтобы множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ было компактно в $C(\overline{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$ и равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство теоремы 1.1 можно найти, например, в [14, 15].

Теорема 1.2 (Принцип максимума). *Пусть T — положительная постоянная, $S_T = [0,T] \times \partial\Omega$, $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $u(t,x)$ — классическое решение задачи Коши*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f,$$

где

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall\,(t,x) \in \overline{Q_T}\backslash\Gamma_T,\ \forall\,\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

и выполняются соотношения

$$|\varphi(x)| \leq q,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad |f(t,x)| \leq f_0, \quad c(t,x) \leq m, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \leq e^{mt}(f_0 t + q).$$

Доказательство см. в [11].

Лемма 1.1 (Неравенство Гронуолла). *Пусть неотрицательная, измеримая и ограниченная на отрезке* $[0, t^*]$ *функция* $\chi(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\chi(t) \leq C + \int\limits_0^t [A + B\chi(\theta)]\, d\theta,$$

где постоянные $A, B, C \geq 0$. *Тогда, если* $B > 0$, *при* $0 \leq t \leq t^*$ *имеет место оценка*

$$\chi(t) \leq Ce^{Bt} + \frac{A}{B}\left(e^{Bt} - 1\right). \tag{1.1}$$

Если $B = 0$, *то*

$$\chi(t) \leq C + At.$$

1.2 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$ задачу Коши

$$\varphi_t = \Delta\varphi + h, \tag{1.2}$$

$$\varphi(0, x) = \omega_0(x). \tag{1.3}$$

Здесь $h(t,x)$ и $\omega_0(x)$ — заданные функции. Определению подлежит функция $u(t,x)$.

Определение 1.4. *Функция* $\varphi(t,x)$, *принадлежащая пространству* $C^{1,2}_{t,x} = \{\varphi(t,x)|\varphi_t(t,x), D^\alpha_x\varphi(t,x),\ |\alpha| \leq 2\}$, *называется решением (классическим решением) задачи Коши, если в* $\Pi_{[0,T]}$ *она удовлетворяет уравнению* (1.2), *а при* $t = 0$ — *начальному условию* (1.3).

Теорема 1.3. *Задача Коши* (1.2), (1.3) *не может иметь более одного ограниченного в* $\Pi_{[0,T]}$ *классического решения.*

Обозначим через $B(\mathbb{R}^n)$ и $B(\Pi_{[0,T]})$ банаховы пространства непрерывных и ограниченных в $\mathbb{R}^n$ или, соответственно, в полосе $\Pi_{[0,T]}$ функций с нормой

$$||\omega_0||_{B(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u_0(x)| \text{ и } ||h||_{B(\Pi_{[0,T]})} = \sup_{(t,x)\in(\Pi_{[0,T]})} |h(t,x)|.$$

Теорема 1.4. *Если $\omega_0(x)$ принадлежит $B(\mathbb{R}^n)$, а функции $h(t,x)$, $h_{x_i}(t,x)$ $(i = 1,\ldots,n)$ принадлежат $B(\Pi_{[0,T]})$, то существует принадлежащее $B(\Pi_{[0,T]})$ классическое решение $\varphi(t,x)$ задачи* (1.2), (1.3)*; при этом* $||\varphi||_{B(\Pi_{[0,T]})} \le ||\omega_0||_{B(\mathbb{R}^n)} + T||h||_{B(\Pi_{[0,T]})}$.

Доказательство см. в [12].

В теореме 1.4 установлено существование классического решения задачи Коши (1.2), (1.3) при любых ограниченных ω_0 из $C(\mathbb{R}^n)$ и любых ограниченных h из $C(\Pi_{[0,T]})$, для которых непрерывны и ограничены в $\Pi_{[0,T]}$ все производные первого порядка по пространственным переменным.

1.3 Теорема сходимости метода слабой аппроксимации

Рассмотрим в $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x)|t_0 \le t \le t_1, x \in E_n\}$ систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t,x,\bar{u}). \tag{1.4}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1(t,x),\ldots,u_l(t,x))$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$ — вектор-функции размерности l $(l \ge 0)$. Через $\bar{u} = (v_0,v_1,\ldots,v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом:

$$v_0 = u = (u_1,\ldots,u_l);$$

v_1 — вектор, составленный из всех производных от u первого порядка по x;
v_2 — вектор, составленный из всех производных от u второго порядка по x

и так далее; v_r — вектор, составленный из производных порядка r по x от u. Таким образом,

$$\bar{u} = \left(u_1, \ldots, u_l, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_l}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r}, \ldots, \frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r}\right),$$

и система уравнений (1.4) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно ($r \geq 0$).

Мы предполагаем, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi^i, \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^{m} \varphi_j^i, \quad j = 1, \ldots, l,$$

где φ^i — вектор-функции размерности l; φ_j, φ_j^i — j-е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t) \varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau), \tag{1.5}$$

где функции $\alpha_{i,\tau}$ определены соотношением

$$\alpha_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & t_0 + \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \leq t_0 + \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$.

Система (1.5) слабо аппроксимирует систему (1.4).

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t) \varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau), \tag{1.6}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau)$, зависящие от τ.

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.4), (1.5), (1.6). Под классическими решениями уравнений (1.5) ((1.6)) мы понимаем функцию u^τ, непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.5), в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]}$, обладающую кусочно-непрерывной производной u_t^τ в $\Pi_{[t_0,t_1]}$ (u_t может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau$, при $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$) и удовлетворяющую уравнению (1.5) ((1.6)).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ на классических решениях $\bar{u}^\tau$ системы уравнений (1.6) непрерывны по переменным $(t, x) \in \Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ $(0 < \tau \le \tau_0)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$.

Через $u_{\tau_k}(t, x)$ обозначим решение системы (1.6) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u^{τ_k} системы (1.6) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в

$$\Pi_{[t_0,t_1]}^N = \{(t, x) | t_0 \le t \le t_1, |x| \le N\},$$

последовательность u^{τ_k} сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящими в (1.4), причём

$$\max_{\Pi_{[t_0,t_1]}^N} |\varphi_i(t, x, \bar{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t, x, \bar{u}^{\tau_k})| \to 0,$$
$$\tau_k \to 0, \; i = 1, \ldots, m. \tag{1.7}$$

Теорема 1.5. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда вектор-функция* $u(t, x)$ *есть решение системы* (1.4) *в* $\Pi_{[t_0,t_1]}^N$.

Доказательство теоремы 1.5 можно найти в [5].

Замечание. *Рассмотрим систему уравнений* (1.4) *с вектор-функцией* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. *Из доказательства теоремы* (1.5) *легко видеть,* *что если* $u^{\tau_k}(t,x)$ *— решение системы*

$$\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = \frac{2p}{p-1}\varphi_1, \quad t_0 + n\tau_k < t \le t_0 + \left(n + \frac{p-1}{2p}\right)\tau_k,$$
$$\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = \frac{2p}{p-1}\varphi_2, \quad t_0 + \left(n + \frac{p-1}{2p}\right) < t \le t_0 + \left(n + \frac{p-1}{p}\right)\tau_k,$$
$$\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} = p\varphi_3, \quad t_0 + \left(n + \frac{p-1}{p}\right) < t \le t_0 + (n+1)\,\tau_k,$$

где $p > 1$ *— некоторое фиксированное число, и выполняются условия* $1, 2$, *то* $u(t,x)$ *является решением системы* (1.4) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

1.4 Об одном из методов исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений

Пусть $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ — вещественные евклидовы пространства переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$ $(n \ge 1, m \ge 1)$.

Рассматривается эволюционное уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A_x W + L_z W + \lambda(x,t) B_x W, \quad x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m, t \ge 0, \tag{1.8}$$

где A_x, B_x — линейные операторы, действующие только по переменным x и не зависящие от z; L_z — линейный оператор, действует только по переменным z и не зависит от x.

Найти функции $W(x,z,t)$, $\lambda(x,t)$, входяшие в уравнение (1.8), если заданы начально-краевые данные

$$W_0(x,z) = W|_{t=0}, \quad Q(x,t) = W|_{z=0}. \tag{1.9}$$

Теорема 1.6. *Пусть данные* $W_0(x,z)$, $Q(x,t)$ *обратной задачи* (1.8), (1.9) *удовлетворяют условиям:*

$$W_0(x,z) = (c(x), b(z)), \quad B_x Q \ne 0, \quad W_0(x,0) = Q(x,0),$$

где $c(x)$, $b(z)$ *— элементы гильбертова пространства* H, *зависящие от* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $z \in \mathbb{R}^m$ *соответственно.*

Тогда, если существуют решения $f(x,t)$ и $\varphi(z,t)$ следующих задач Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = L_z\varphi, \quad \varphi|_{t=0} = b(z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_x f + B_x f\frac{\partial Q/\partial t - A_x Q - (f, g(t))}{B_x Q}, \quad f|_{t=0} = c(x), \quad g(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}|_{z=0},$$

то функции $W(x,z,t)$, $\lambda(x,t)$, определенные формулами

$$W(x,z,t) = (f(x,t), \varphi(z,t)),$$
$$\lambda(x,t) = \frac{\partial Q/\partial t - A_x Q - (f, g(t))}{B_x Q},$$

являются решением обратной задачи (1.8), (1.9).

Доказательство см. в [4].

Рассмотрим частный случай задачи (1.8), (1.9).

В области $\widetilde{G}_{[0,T]} = \big\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\}$ рассматривается уравнение

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{1.10}$$

где $B_z(u) = c_1(t)u_{zz}(t,x,z) + c_2(t)u_z(t,x,z) + c_3(t)u(t,x,z)$.

Найти функции $u(t,x,z)$ и $\lambda(t,z)$, входящие в уравнение (1.10), если заданы начальное условие и условие переопределения:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad u(t,0,z) = \psi(t,z). \tag{1.11}$$

Далее приведены теоремы, которые являются частными случаями теоремы 1.6 для различных классов начальных данных.

Теорема 1.7. *Если существуют решения $\varphi(t,x)$ и $f(t,z)$ следующих задач Коши*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = b(t)\Delta_x\varphi,$$
$$\varphi(0,x) = w_0(x), \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t) f_{zz} + B_z(f)\frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$
$$f(0,z) = v_0(z), \tag{1.13}$$

то функции $u(t,x,z)$ *и* $\lambda(t,z)$*, определенные формулами*

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x) f(t,z),$$

$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

являются решением обратной задачи (1.10) — (1.11) *в предположении, что* $u_0(x,z) = w_0(x)v_0(z)$.

Доказательство. Проверим справедливость теоремы непосредственной подстановкой в уравнения (1.10), (1.11) выражений для неизвестных функций.

Подствим $u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z)$ и $\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ в уравнение (1.10), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} f + \frac{\partial f}{\partial t}\varphi =$$
$$= a(t)\varphi f_{zz} + b(t) f \Delta_x \varphi + \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} B_z(f)\varphi.$$

Сгруппируем относительно f и φ, получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - b(t)\Delta_x\varphi\right) f =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} - a(t) f_{zz} - \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} B_z(f)\right)\varphi.$$

Учитывая, что $\varphi(t,x)$ — решение задачи (1.12), а $f(t,z)$ — решение задачи (1.13), получаем тождество.

Очевидно, что функция $u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z)$ удовлетворяет начальному условию из (1.11)

$$u(0,x,z) = \varphi(0,x)f(0,z) = w_0(x)v_0(z) = u_0(x,z).$$

Проверим выполнение условий переопределения $u(t,0,z)=\psi(t,z)$. Пусть $A(t,z)=u(t,0,z)-\psi(t,z)$. Покажем, что $A(t,z)=0$. Рассмотрим уравнение (1.10) при $x=(0,0,\dots,0)$, получим

$$\begin{gathered}u_t(t,0,z)=a(t)u_{zz}(t,0,z)+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\lambda(t,z)B_z(u)=\\ =a(t)u_{zz}(t,0,z)+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\\ +\frac{\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)-f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}B_x(u(t,0,z)+\psi(t,z)-\psi(t,z)).\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}u_t(t,0,z)=a(t)u_{zz}(t,0,z)+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\lambda(t,z)B_z(u)=\\ =a(t)u_{zz}(t,0,z)+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\\ +\frac{\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)-f(t,z)\Delta_x\varphi(t,0)b(t)}{B_z(\psi)}B_z(\psi(t,z))+\\ +\lambda(t,z)B_z(A(t,z)).\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}u_t(t,0,z)=a(t)(u_{zz}(t,0,z)-\psi_{zz}(t,z))+b(t)\Delta_x u(t,0,z)+\\ +\psi_t(t,z)-f(t,z)\Delta_x\varphi(t,0)b(t)+\lambda(t,z)B_z(A(t,z)).\end{gathered}$$

Получили задачу Коши следующего вида

$$A_t(t,z)=a(t)A_{zz}(t,z)+\lambda(t,z)B_z(A(t,z));\quad A(0,z)=0.$$

Так как единственным решением данной задачи является $A(t,z)=0$, то $u(t,0,z)=\psi(t,z)$. Условие переопределения выполняется.

$\square$

Теорема 1.8. *Если решения* $\overline{\varphi}(t,x)=(\varphi^1(t,x),\dots,\varphi^m(t,x))$ *и* $\overline{f}(t,z)=(f^1(t,z),\dots,f^m(t,z))$ *следующих задач Коши*

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t}=b(t)\Delta_x\overline{\varphi},\\ \overline{\varphi}(0,x)=\overline{w}_0(x),\end{gathered}\tag{1.14}$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = a(t)\overline{f}_{zz} + B_z(\overline{f})\frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - (\overline{f}(t,z), \overline{\varphi_t}(t,0))}{B_z(\psi)},$$
$$\overline{f}(0,z) = \overline{v}_0(z), \qquad (1.15)$$

существуют, то функции $u(t,x,z)$ *и* $\lambda(t,z)$, *определенные формулами*

$$u(t,x,z) = (\overline{\varphi}(t,x), \overline{f}(t,z)) = \sum_{i=1}^{m} \varphi^i(t,x) f^i(t,z),$$

$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - (\overline{f}(t,z), \overline{\varphi}_t(t,0))}{B_z(\psi)},$$

являются решением обратной задачи (1.10) — (1.11) *в предположении, что* $u_0(x,z) = (\overline{w}_0(x), \overline{v}_0(z)) = \sum\limits_{i=1}^{m} w_0^i(x) v_0^i(z)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.7.

2 Представление решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде $u_0(x,z) = \omega_0(x)v_0(z)$

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим в области $\widetilde{G}_{[0,T]} = \big\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\}$ задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{2.1}$$

где $B_z(u) = c_1(t)u_{zz}(t,x,z) + c_2(t)u_z(t,x,z) + c_3(t)u(t,x,z)$, с начальным условием условием:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{2.2}$$

Функции $a(t), b(t), c_i(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0,T]$, причем $a(t) \ge a_0 > 0$, $b(t) \ge b_0 > 0$, $c_1(t) \ge c_0 > 0$. Функция $u_0(x,z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}^{n+1}$. Функция $\lambda(t,z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (2.1), (2.2).

Пусть задано условие переопределения

$$u(t,0,z) = \psi(t,z), \tag{2.3}$$

и выполнено условие согласования

$$u_0(0,z) = \psi(0,z). \tag{2.4}$$

Предполагаем выполнение условия

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t,z) + c_2(t)\psi_z(t,z) + c_3(t)\psi(t,z)| \ge \mu > 0, \quad \mu\text{— const.} \tag{2.5}$$

Для исследования обратной задачи используем подход, предложенный Ю.Е.Аниконовым. Для сведения обратной задачи к прямой воспользуемся теоремой 1.7 и получим две прямых задачи (1.12) и (1.13).

2.2 Существование решения задачи

2.2.1 Существование решения прямой задачи

Для доказательства существования решения задачи (1.13) рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \big\{(t,z) \mid z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\}$ вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t) f_{zz} + B_z(f) S_\delta \left(\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \right), \quad f(0,z) = v_0(z), \tag{2.6}$$

здесь $\beta(t,z) = \psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z)$ — это известная функция, а $S_\delta(\vartheta)$ — функция срезки, определенная в $\mathbb{R}$, сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая и обладающая следующими свойствами:

$S_\delta(\vartheta) \ge \frac{\delta}{3} > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R}$ и $S_\delta(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta, & \text{при } \vartheta \ge \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & \text{при } \vartheta \le \frac{\delta}{3}. \end{cases}$

Определению подлежит функция $f(t,z)$. Функция $v_0(z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}$. Функция $S_\delta^{(k)}(\vartheta) \le 2, k = 1, \ldots, 4$.

Для доказательства существования решения вспомогательной задачи используем метод слабой аппроксимации [5]. Фиксируем постоянную $\tau > 0$ такую, что $\tau J = T$. Разбиваем задачу на три дробных шага и линеаризуем задачу сдвигом по переменной t на величину $\frac{\tau}{3}$.

$$f_t^\tau = 3\, a(t) f_{zz}^\tau(t,z), \quad j\tau < t \le \Big(j + \frac{1}{3}\Big)\tau, \tag{2.7}$$

$$f_t^\tau = 3\,(c_1(t) f_{zz}^\tau(t,z) + c_2(t) f_z^\tau(t,z)) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \quad \Big(j + \frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j + \frac{2}{3}\Big)\tau, \tag{2.8}$$

$$f_t^\tau = 3\, c_3(t) f^\tau(t,z) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \quad \Big(j + \frac{2}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j + 1\Big)\tau, \tag{2.9}$$

$$f^\tau(0,z) = v_0(z), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, (J-1),\ J\tau = T, \tag{2.10}$$

где $\lambda^\tau(t,z) = \frac{\beta(t,z) - f^\tau(t - \frac{\tau}{3}, z)\, \varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$.

Относительно функций $v_0(z), \psi(t,z)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему:

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}v_0(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right| \leq C, \quad k=0,1,\dots,4,\ i=0,1,\dots,6. \tag{2.11}$$

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $f^\tau(t,z)$ задачи (2.7)—(2.10) в классе гладких ограниченных функций.

Будем считать далее, что $C > 1$ — некоторые константы, вообще говоря различные, зависящие от констант, ограничивающих коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, константы μ из условия (2.5) и константы, ограничивающие входные данные, из условия (2.11). Константы C не зависят от τ.

Введем обозначение $V_k = \sup\limits_{z\in\mathbb{R}} |\frac{d^k}{dz^k}v_0(z)|$, где $k = \overline{0,4}$ — порядок производной.

На первом дробном шаге, $t \in (0, \frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение

$$f_t^\tau = 3\,a(t) f_{zz}^\tau(t,z).$$

В силу принципа максимума для задачи Коши, учитывая (2.10), получим оценку

$$|f^\tau(\xi,z)| \leq V_0,\ 0<\xi\leq t,\ 0<t\leq\frac{\tau}{3}. \tag{2.12}$$

Рассмотрим второй дробный шаг, $t \in (\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}]$

$$f_t^\tau = 3\,(c_1(t)f_{zz}^\tau(t,z) + c_2(t)f_z^\tau(t,z))S_\delta\left(\frac{\beta(t,z) - f^\tau(t-\frac{\tau}{3},z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}\right).$$

В силу оценки (2.12), свойств срезающей функции и принципа максимума справедлива оценка

$$|f^\tau(\xi,z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau\left(\frac{\tau}{3},z\right)| \leq V_0,\ \frac{\tau}{3}<\xi\leq\frac{2\tau}{3}. \tag{2.13}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (2.9) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим

$$f^\tau(\xi, z) = f^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) + \\ + 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} c_3(\eta) f^\tau(\eta, z) S_\delta\left(\frac{\beta(\eta, z) - f^\tau(\eta - \frac{\tau}{3}, z)\varphi_t(\eta, 0)}{B_z(\psi)}\right) d\eta.$$

Справедливо выполнение следующего неравенства

$$|f^\tau(\xi, z)| \leq \left|f^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| + \\ + 3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} c_3(\eta) f^\tau(\eta, z) S_\delta\left(\frac{\beta(\eta, z) - f^\tau(\eta - \frac{\tau}{3}, z)\varphi_t(\eta, 0)}{B_z(\psi)}\right) d\eta\right| \leq \\ \leq \left|f^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left|f^\tau(\eta, z)\right| \left(1 + \sup_{z\in\mathbb{R}} \left|f^\tau(\frac{2\tau}{3}, z)\right|\right) d\eta, \\ \frac{2\tau}{3} < \xi \leq t, \quad \frac{2\tau}{3} \leq t \leq \tau.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\leq\xi\leq t}$, а так же учитывая оценку (2.13) и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t, z)| \leq V_0 + C(1 + V_0)\int\limits_0^\tau \sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(\eta, z)| d\eta, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t, z)| \leq V_0 e^{C\tau(1+V_0)} + 1 - 1 \leq (1 + V_0)e^{C\tau(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t \in (\tau, 2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t, z)| \leq (1 + V_0)e^{C\tau(1+V_0)} e^{C\tau(1+V_0)e^{C\tau(1+V_0)}} - 1, \quad 0 < t \leq 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C\tau(1+V_0)} \le 2,$$

получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{3C\tau(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \le 2\tau.$$

На втором временном шаге, при условии $e^{3C\tau(1+V_0)} \le 2$, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{5C\tau(1+V_0)} - 1, \; 0 < t \le 3\tau.$$

Рассуждая аналогично, на l-ом шаге $(l < J)$ получаем

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{(2l+1)C\tau(1+V_0)} - 1, \; 0 < t \le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_1^*, $0 < t_1^* \le T$, которая удовлетворяет неравенству

$$e^{3t_1^* C(1+V_0)} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau(t,z)| \le (1+V_0)e^{3t_1^* C(1+V_0)} - 1 \le C, \quad 0 < t \le t_1^*.$$

В итоге получили равномерную по τ оценку

$$|f^\tau(t,z)| \le C, \; (t,z) \in G_{[0,t_1^*]}. \tag{2.14}$$

Оценим первую производную функции $f(t,z)$. Продифференцируем (2.7)—(2.10) по z.

$$f_{tz}^\tau = 3\, a(t) f_{zzz}^\tau(t,z), \qquad j\tau < t \le \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau; \tag{2.15}$$

$$f_{tz}^\tau = 3\, \left(\left(c_1(t) f_{zzz}^\tau(t,z) + c_2(t) f_{zz}^\tau(t,z)\right) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + \right.$$
$$\left. + \left(c_1(t) f_{zz}^\tau(t,z) + c_2(t) f_z^\tau(t,z)\right) S_\delta'(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z)\right),$$
$$\Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau; \tag{2.16}$$

$$f^\tau_{tz} = 3\,\Big(c_3(t) f^\tau_z(t,z) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + c_3(t) f^\tau(t,z) S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)\Big)\,,$$
$$\Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+1\Big)\tau; \qquad (2.17)$$

$$f^\tau_z(0,z) = v_{0z}(z), \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 0,1,2,\ldots,(J-1),\; J\tau = T, \qquad (2.18)$$

где $\lambda^\tau_z = m_1(t,z) f^\tau_z(t-\frac{\tau}{3},z) + m_2(t,z)$, причем $m_2(t,z) = \frac{\beta_z(t,z)-\lambda(t,z)B_z(\psi_z)}{B_z(\psi)}$ и $m_1(t,z) = -\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

На первом дробном шаге, $t \in (0,\frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение (2.15). В силу принципа максимума получим оценку:

$$|f^\tau_z(\xi,z)| \le V_1, \quad 0 < \xi \le t,\; 0 < t \le \frac{\tau}{3}. \qquad (2.19)$$

На втором дробном шаге, $t \in (\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнение (2.16). Введем обозначение $g_1 = f^\tau_z(t,z)$, получим уравнение

$$g_{1t} = A_1 g_{1zz} + E_1 g_{1z} + K_1 g_1,$$

где $A_1 = 3\,c_1(t) S_\delta(\lambda^\tau(t,z))$,

$E_1 = 3(c_2(t) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + c_1(t) S_\delta{}'(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z))$,

$K_1 = c_2(t) S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)$.

В силу принципа максимума, свойств срезающей функции и оценки (2.19) получаем

$$|g_1| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} |g_1(t-\frac{\tau}{3},z)| e^{C\tau(1+g_1(t-\frac{\tau}{3},z))} \le V_1 e^{C\tau(1+V_1)} +$$
$$+1-1 \le (V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)} - 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$|f^\tau_z(\xi,z)| \le (V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)} - 1,\; \frac{\tau}{3} < \xi \le \frac{2\tau}{3}. \qquad (2.20)$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (2.17) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3},t)$. Получим

$$f_z^\tau(\xi,z) = f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big) + 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(c_3(\eta)f_z^\tau(\eta,z)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z))+$$
$$+\,c_3(\eta)f^\tau(\eta,z)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda_z^\tau(\eta,z))d\eta.$$

Справедливо выполнение следующего неравенства

$$|f_z^\tau(\xi,z)| \le \left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right| +$$
$$+\,3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(c_3(\eta)f_z^\tau(\eta,z)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z)) + c_3(\eta)f^\tau(\eta,z)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda_z^\tau(\eta,z))d\eta\right| \le$$
$$\le \left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}|f_z^\tau(\eta,z)| + 1 + \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f_z^\tau\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right|d\eta \le$$
$$\le \left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(|f_z^\tau(\eta,z)|+1)d\eta + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right|d\eta \le$$

$$\le \left|f_z^\tau\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right|e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(|f_z^\tau(\eta,z)|+1)d\eta, \quad \frac{2\tau}{3} < \xi \le t, \quad \frac{2\tau}{3} \le t \le \tau.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\le\xi\le t}$, так же учитывая оценку (2.20) и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)}-1\right)e^{C\tau} + C\int\limits_0^\tau(|f_z^\tau(\eta,z)|+1)d\eta,$$
$$0 < t \le \tau.$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)}-1\right)e^{2C\tau} + e^{C\tau} - 1, \quad 0 < t \le \tau.$$

Следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{3C\tau(1+V_1)}-1\right), \quad 0<t\le\tau. \tag{2.21}$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t\in(\tau,2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{3C\tau(1+V_1)}\right)e^{3C\tau(1+V_1)e^{3C\tau(1+V_1)}}-1, \quad 0<t\le 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{3C\tau(1+V_1)}\le 2,$$

получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{9C\tau(1+V_1)}\right)-1, \quad 0<t\le 2\tau.$$

На втором целом временном шаге в предположении, что $e^{9C\tau(1+V_1)}\le 2$, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{15C\tau(1+V_1)}\right)-1, \quad 0<t\le 3\tau.$$

Далее, аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l<J$) приводят к неравенству

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{3(2l+1)C\tau(1+V_1}\right)-1, \quad 0<t\le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_2^*, $0<t_2^*\le t_1^*\le T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{9t_2^*C(1+V_1)}\le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_z^\tau(t,z)| \le \left((V_1+1)e^{9t_2^*C(1+V_1)}\right)-1, \quad 0<t\le t_2^*.$$

Для $f_z(t,z)$ справедлива равномерная по τ оценка

$$|f_z^\tau(t,z)|\le C,\ (t,z)\in G_{[0,t_2^*]}. \tag{2.22}$$

Продифференцируем (2.15)—(2.18) по z и получим оценку на вторую производную функции $f(t,z)$.

$$f^{\tau}_{tzz} = 3\,a(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^{\tau}(t,z), \qquad j\tau < t \leq \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered} f^{\tau}_{tzz} = 3\,\Bigg[\left(c_1(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^{\tau}(t,z) + c_2(t)f^{\tau}_{zzz}(t,z)\right)S_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z)) + \\ + 2\Big(c_1(t)f^{\tau}_{zzz}(t,z) + c_2(t)f^{\tau}_{zz}(t,z)\Big)S'_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{z}(t,z)) + \\ + \Big(c_1(t)f^{\tau}_{zz}(t,z) + c_2(t)f^{\tau}_{z}(t,z)\Big)\times \\ \times\Big(S''_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{z}(t,z) + S'_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{zz}(t,z)\Big)\Bigg], \\ \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \leq \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \end{gathered} \tag{2.24}$$

$$\begin{gathered} f^{\tau}_{tzz} = 3\,\Big[c_3(t)f^{\tau}_{zz}(t,z)S_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z)) + 2\,c_3(t)f^{\tau}_{z}(t,z)S'_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{z}(t,z) + \\ + c_3(t)f^{\tau}(t,z)\Big(S''_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau\,2}_{z}(t,z) + S'_{\delta}(\lambda^{\tau}(t,z))\lambda^{\tau}_{zz}(t,z)\Big)\Big], \\ \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \leq \Big(j+1\Big)\tau; \end{gathered} \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}f^{\tau}(0,z) = \frac{d^2}{dz^2}v_0(z), \quad j=0,1,2,\ldots,(J-1), \quad J\tau = T, \tag{2.26}$$

где $\lambda^{\tau}_{zz} = p_1(t,z)f^{\tau}_{zz}(t-\frac{\tau}{3},z) + p_2(t,z)$, причем $p_1(t,z) = -\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ и $p_2(t,z) = \frac{\beta_{zz}(t,z)-(2\,\lambda_z(t,z)+\lambda(t,z))B_z(\psi_{zz})}{B_z(\psi)}$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

На первом дробном шаге, $t \in (0,\frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение (2.23). В силу принципа максимума получим оценку:

$$|f^{\tau}_{zz}(\xi,z)| \leq V_2, \quad 0 < \xi \leq t,\ 0 < t \leq \frac{\tau}{3}. \tag{2.27}$$

На втором дробном шаге, $t \in (\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнение (2.24). Обозначим $g_2 = f^{\tau}_{zz}$, получим уравнение

$$g_{2t} = A_2g_{2zz} + E_2g_{2z} + K_2g_2 + D_2,$$

где $A_2 = 3\,c_1(t)S_\delta(\lambda^\tau(t,z))$,

$E_2 = 3(c_2(t)S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 2c_1(t)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z))$,

$K_2 = 3(2c_2(t)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z) + c_1(t)(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z) +$

$+ S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z)))$,

$D_2 = 3c_2(t)f_z^\tau(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z) + S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z))$.

В силу принципа максимума, свойства срезающей функции и оценки (2.27) получаем

$$|g_2| \leq (\sup_{z\in\mathbb{R}}|g_2(t-\frac{\tau}{3},z)| + C\tau(g_2(t-\frac{\tau}{3},z)+1)+1-1)e^{C\tau(1+g_2(t-\frac{\tau}{3},z))} \leq$$
$$\leq (V_2+1)\,(Ct+1)e^{C\tau(1+V_2)} - 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$|f_{zz}^\tau(\xi,z)| \leq (V_2+1)\,e^{2C\tau(1+V_2)} - 1, \quad \frac{\tau}{3} < \xi \leq \frac{2\tau}{3}. \tag{2.28}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (2.25) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$.

$$f_{zz}^\tau(\xi,z) = f_{zz}^\tau\left(\frac{2\tau}{3},z\right) +$$
$$+ 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(c_3(\eta)f_{zz}^\tau(\eta,z)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z)) + 2c_3(\eta)f_z^\tau(\eta,z)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda_z^\tau(\eta,z) +$$
$$+ c_3(t)f^\tau(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z) + S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z)))d\eta.$$

В итоге получаем оценку

$$|f_{zz}^\tau(\xi,z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f_{zz}^\tau\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| +$$
$$+ C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(\sup_{z\in\mathbb{R}}|f_{zz}^\tau(\eta,z)| + 1 + \sup_{z\in\mathbb{R}}|f_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},z)|)d\eta \leq$$

$$\leq \left| f^{\tau}_{zz}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(|f^{\tau}_{zz}(\eta, z)| + 1)d\eta,$$

$$\frac{2\tau}{3} < \xi \leq t, \quad \frac{2\tau}{3} \leq t \leq \tau.$$

От обеих частей последнего неравенства возьмем $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\leq\xi\leq t}$, так же учитывая оценку (2.28) и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t, z)| \leq \left((V_2 + 1)e^{2C\tau(1+V_2)} - 1\right) e^{C\tau} +$$

$$+ C\int\limits_{0}^{\tau}(|f^{\tau}_{zz}(\eta, z)| + 1)d\eta, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Отсюда, по лемме Гроноулла, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t, z)| \leq \left((V_2 + 1)e^{2C\tau(1+V_2)} - 1\right) e^{2C\tau} + e^{C\tau} - 1, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t, z)| \leq \left((V_2 + 1)\, e^{4C\tau(1+V_2)} - 1\right), 0 < t \leq \tau. \tag{2.29}$$

На первом целом шаге получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t, z)| \leq \left((V_2 + 1)\, e^{4C\tau(1+V_2)}\right) e^{4C\tau(1+V_2)e^{4C\tau(1+V_2)}} - 1, \quad 0 < t \leq 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{4C\tau(1+V_2)} \leq 2,$$

получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t, z)| \leq \left((V_2 + 1)\, e^{12C\tau(1+V_2)}\right) - 1, \quad 0 < t \leq 2\tau.$$

При условии, что $e^{12C\tau(1+V_2)} \leq 2$, на втором временном шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t, z)| \leq \left((V_2 + 1)\, e^{20C\tau(1+V_2)}\right) - 1, \quad 0 < t \leq 3\tau.$$

Аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l < J$) приводят к неравенству

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t,z)| \le \Big((V_2+1)\, e^{4(2l+1)C\tau(1+V_2)} \Big) - 1, \quad 0 < t \le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t^*_3, $0 < t^*_3 \le t^*_2 \le T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{12 t^*_3 C(1+V_2)} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{\tau}_{zz}(t,z)| \le \Big((V_2+1)\, e^{12 t^*_3 C(1+V_2)} \Big) - 1, \quad 0 < t \le t^*_3.$$

Получили оценку второй производной равномерную по τ

$$|f^{\tau}_{zz}(t,z)| \le C,\ (t,x) \in G_{[0,t^*_3]}. \tag{2.30}$$

Оценим третью производную функции $f(t,z)$ на всем временном промежутке. Продифференцируем еще раз по z уравнения (2.23)—(2.26).

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} f^{\tau}_t = 3\, a(t) \frac{\partial^5}{\partial z^5} f^{\tau}(t,z), \qquad j\tau < t \le \left(j + \tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial z^3} f^{\tau}_t = 3 &\left(c_1(t) \frac{\partial^5}{\partial z^5} f^{\tau} + c_2(t) \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{\tau} \right) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + \\
&+ 9 \left(c_1(t) \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{\tau} + c_2(t) \frac{\partial^3}{\partial z^3} f^{\tau} \right) S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z) + \\
+9 &\left(c_1(t) \frac{\partial^3}{\partial z^3} f^{\tau} + c_2(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} f^{\tau} \right) \Big(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z) \Big) + \\
&+ 3 \left(c_1(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} f^{\tau} + c_2(t) f^\tau_z \right) \Big(S'''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 3}_z(t,z) + \\
&+ 3 S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)\lambda^\tau_{zz}(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zzz}(t,z) \Big)
\end{aligned}$$

$$\left(j + \tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j + \tfrac{2}{3}\right)\tau; \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3}f_t^\tau = 3\Big[c_3(t)\frac{\partial^3}{\partial z^3}f^\tau S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 3c_3(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}f^\tau S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z)+$$
$$+3c_3(t)f_z^\tau(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z)+S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z))+$$
$$+c_3(t)f_z^\tau\Big(S_\delta^{'''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 3}(t,z)+$$
$$+3S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z)\lambda_{zz}^\tau(t,z)+S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zzz}^\tau(t,z)\Big)\Big],$$
$$\Big(j+\tfrac{2}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+1\Big)\tau; \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3}f^\tau(0,z) = \frac{d^3}{dz^3}v_0(z), \quad j=0,1,2,\ldots,(J-1), \quad J\tau = T, \quad (2.34)$$

где $\lambda_{zzz}^\tau = q_1(t,z)f_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},z)+q_2(t,z)$, причем $q_2(t,z)$ содержит частные производные функций $\frac{\partial^i}{\partial z^i}\lambda(t,z)$ $(i=0,1,2)$ и $q_1(t,z) = -\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ — известные функции,ограниченные равномерно по τ.

На первом дробном шаге, при $t\in(0,\frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнение (2.31) и по принципу максимума получаем оценку

$$|f_{zzz}^\tau(\xi,z)| \le V_3, \quad 0<\xi\le t, \quad 0<t\le\frac{\tau}{3}. \quad (2.35)$$

На втором дробном шаге, $t\in(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнение (2.32). Введем обозначения $g_3 = f_{zzz}^\tau$, получим уравнение

$$g_{3t} = A_3 g_{3zz} + E_3 g_{3z} + K_3 g_3 + D_3,$$

где $A_3 = 3\,c_1(t)S_\delta(\lambda^\tau(t,z))$,
$E_3 = 3(c_2(t)S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 2c_1(t)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z))$,
$K_3 = 3(2c_2(t)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z) + c_1(t)(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z)+$
$+S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z)))$,
$D_3 = 9c_2(t)f_{zz}^\tau(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z)+S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z)) + 3(c_1(t)f_{zz}^\tau+$
$+c_2(t)f_z^\tau)(S_\delta^{'''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 3}(t,z)+3S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z)\lambda_{zz}^\tau(t,z)+$
$+S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zzz}^\tau(t,z))$.

В силу свойств срезающей функции, принципа максимума и оценки (2.35) получаем

$$|g_3| \le (\sup_{z\in\mathbb{R}} |g_3(t-\frac{\tau}{3}, z)| + C\tau(g_3(t-\frac{\tau}{3}, z)+1)+1-1)e^{C\tau(1+g_3(t-\frac{\tau}{3},z))} \le$$
$$\le (V_3+1)(Ct+1)e^{C\tau(1+V_3)} - 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$|f^\tau_{zzz}(\xi, z)| \le (V_3+1)e^{2C\tau(1+V_3)} - 1, \quad \frac{\tau}{3} < \xi \le \frac{2\tau}{3}. \tag{2.36}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (2.33) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим

$$f^\tau_{zzz}(\xi, z) = f^\tau_{zzz}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) +$$
$$+ 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \Big(c_3(\eta)\frac{\partial^3}{\partial z^3} f^\tau S_\delta(\lambda^\tau(\eta, z)) + 3\frac{\partial^2}{\partial z^2} f^\tau_z S'_\delta(\lambda^\tau(\eta, z))\lambda^\tau_z(\eta, z) +$$
$$+3f^\tau_z(S''_\delta(\lambda^\tau(\eta, z))\lambda^{\tau 2}_z(\eta, z) + S'_\delta(\lambda^\tau(\eta, z))\lambda^\tau_{zz}(\eta, z)) + f^\tau_z(S'''_\delta(\lambda^\tau(\eta, z))\lambda^{\tau 3}_z(\eta, z) +$$
$$+ 3S''_\delta(\lambda^\tau(\eta, z))\lambda^\tau_z(\eta, z)\lambda^\tau_{zz}(\eta, z) + S'_\delta(\lambda^\tau(\eta, z))\lambda^\tau_{zzz}(\eta, z))\Big) d\eta.$$

Справедлива оценка

$$|f^\tau_{zzz}(\xi, z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| f^\tau_{zzz}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| +$$
$$+ C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (\sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau_{zzz}(\eta, z)| + 1 + \sup_{z\in\mathbb{R}} |f^\tau_{zzz}(\eta - \frac{\tau}{3}, z)|) d\eta \le$$
$$\le \left| f^\tau_{zzz}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (|f^\tau_{zzz}(\eta, z)| + 1) d\eta,$$
$$\frac{2\tau}{3} < \xi \le t, \quad \frac{2\tau}{3} \le t \le \tau.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\le\xi\le t}$, так же учитывая оценку (2.36), на нулевом целом шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{\tau}_{zzz}(t,z)| \le \left((V_3+1)e^{2C\tau(1+V_3)}-1\right)e^{C\tau} + C\int\limits_0^{\tau}(|f^{\tau}_{zzz}(\eta,z)|+1)d\eta,$$

$$0<t\le\tau.$$

Используя лемму Гронуолла, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{\tau}_{zzz}(t,z)| \le \left((V_3+1)e^{2C\tau(1+V_3)}-1\right)e^{2C\tau} + e^{C\tau}-1, \quad 0<t\le\tau.$$

Следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{\tau}_{zzz}(t,z)| \le \left((V_3+1)e^{4C\tau(1+V_3)}-1\right), \quad 0<t\le\tau. \tag{2.37}$$

Оценка на первом целом шаге

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{\tau}_{zzz}(t,z)| \le \left((V_3+1)e^{4C\tau(1+V_3)}\right)e^{4C\tau(1+V_3)e^{4C\tau(1+V_3)}}-1, \quad 0<t\le 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{4C\tau(1+V_3)}\le 2,$$

получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{\tau}_{zzz}(t,z)| \le \left((V_3+1)e^{12C\tau(1+V_3)}\right)-1, \quad 0<t\le 2\tau.$$

В предположении, что $e^{12C\tau(1+V_3)}\le 2$, на втором временном шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{\tau}_{zzz}(t,z)| \le \left((V_3+1)e^{20C\tau(1+V_3)}\right)-1, \quad 0<t\le 3\tau.$$

Далее, аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l<N$) приводят к неравенству

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{\tau}_{zzz}(t,z)| \le \left((V_3+1)e^{4(2l+1)C\tau(1+V_3)}\right)-1, \quad 0<t\le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_4^*, $0 < t_4^* \le t_3^* \le T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{12t_4^* C(1+V_3)} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |f_{zzz}^\tau(t,z)| \le \left((V_3+1) e^{12\, t_4^* C(1+V_3)} \right) - 1, \quad 0 < t \le t_4^*.$$

Итоговая оценка третьей производной функции $f(t,z)$ равномерная по τ:

$$|f_{zzz}^\tau(t,z)| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t_4^*]}. \tag{2.38}$$

Оценим четвертую производную функции $f(t,z)$ на всем временном промежутке. Дифференцируем еще раз по z уравнения (2.31)—(2.34).

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} f_t^\tau = 3\, a(t) \frac{\partial^6}{\partial z^6} f^\tau(t,z), \qquad j\tau < t \le \left(j + \tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{2.39}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^4}{\partial z^4} f_t^\tau = 3 \left(c_1(t) \frac{\partial^6}{\partial z^6} f^\tau + c_2(t) \frac{\partial^5}{\partial z^5} f^\tau \right) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + \\
+ 12 \left(c_1(t) \frac{\partial^5}{\partial z^5} f^\tau + c_2(t) \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau \right) S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z)) \lambda_z^\tau(t,z) + \\
+ 18 \left(c_1(t) \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau + c_2(t) \frac{\partial^3}{\partial z^3} f^\tau \right) \left(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z)) \lambda_z^{\tau 2}(t,z) + \right. \\
\left. + S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z)) \lambda_{zz}^\tau(t,z) \right) + 12 \left(c_1(t) \frac{\partial^3}{\partial z^3} f^\tau + c_2(t) f_{zz}^\tau \right) \times \\
\times \left[S_\delta^{'''}(\lambda^\tau(t,z)) \lambda_z^{\tau 3}(t,z) + 3 S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z)) \lambda_z^\tau(t,z) \lambda_{zz}^\tau(t,z) + \right. \\
\left. + S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z)) \lambda_{zzz}^\tau(t,z) \right] + 3 \left(c_1(t) f_{zz}^\tau + c_2(t) f_z^\tau \right) \times \\
\times \left[\left(S_\delta^{'}(\lambda(t,z))\, \frac{\partial^4}{\partial z^4} \lambda^\tau(t,z) + S_\delta^{''}(\lambda(t,z)) \right) \times \right. \\
\times \left(4 \lambda_z^\tau(t,z) \lambda_{zzz}^\tau(t,z) + 3 {\lambda_{zz}^\tau}^2(t,z) + 6 S_\delta^{'''}(\lambda^\tau(t,z)) \lambda_{zz}^\tau(t,z) \lambda_z^{\tau 2}(t,z) + \right. \\
\left. \left. + S_\delta^{''''}(\lambda^\tau(t,z))\, \lambda_z^{\tau 4}(t,z) \right) \right], \qquad \left(j + \tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j + \tfrac{2}{3}\right)\tau;
\end{gathered} \tag{2.40}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau_t = 3 \Big[& c_3(t) \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 4c_3(t) \frac{\partial^3}{\partial z^3} f^\tau_z S'_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_z(t,z) + \\
& + 6c_3(t) f^\tau_{zz} (S''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_{zz}(t,z)) + \\
& + 4c_3(t) f^\tau_z (S'''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^{\tau 3}_z(t,z) + \\
& + 3S''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_z(t,z) \lambda^\tau_{zz}(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_{zzz}(t,z)) + f^\tau \Big] \times \\
& \times \Big[\big(S'_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \frac{\partial^4}{\partial z^4} \lambda^\tau(t,z) + S''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \big) \big(4\lambda^\tau_z(t,z) \lambda^\tau_{zzz}(t,z) + \\
& + 3{\lambda^\tau_{zz}}^2(t,z) + 6S'''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_{zz}(t,z) \lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S''''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^{\tau 4}_z(t,z) \big) \Big], \\
& \Big(j + \tfrac{2}{3}\Big) \tau < t \le \Big(j+1\Big)\tau; \quad (2.41)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(0,z) = \frac{d^4}{dz^4} v_0(z), \quad j = 0,1,2,\ldots,(J-1),\ J\tau = T, \qquad (2.42)
$$

где $\frac{\partial^4}{\partial z^4}\lambda^\tau = r_1(t,z)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(t-\frac{\tau}{3}, z) + r_2(t,z)$, причем $r_2(t,z)$ содержит частные производные функций $\frac{\partial^i}{\partial z^i}\lambda(t,z)$ $(i = 0, ..., 3)$ и $r_1(t,z) = -\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

Первый дробный шаг $t \in (0, \frac{\tau}{3}]$. Рассматриваем уравнение (2.39) и по принципу максимума получем оценку

$$
\left| \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\xi, z) \right| \le V_4, \quad 0 < \xi \le t, \quad 0 < t \le \frac{\tau}{3}. \qquad (2.43)
$$

На втором дробном шаге, $t \in (\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнение (2.40). Обозначим $g_4 = \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau$, получим уравнение

$$
g_{4t} = A_4 g_{4zz} + E_4 g_{4z} + K_4 g_4 + D_4,
$$

где $A_4 = 3\, c_1(t) S_\delta(\lambda^\tau(t,z))$,

$E_4 = 3(c_2(t) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 4c_1(t) S'_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_z(t,z))$,

$K_4 = 3(c_2(t) S'_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_z(t,z) + 6c_1(t)(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^{\tau 2}_z(t,z) +$

$+ S'_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_{zz}(t,z)))$,

$D^i_4 = 18c_2(t) f^{i\tau}_{zzz} (S''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_{zz}(t,z)) +$

$+12(c_1(t) f^{i\tau}_{zzz} + c_2(t) f^{i\tau}_{zz})(S'''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^{\tau 3}_z(t,z) + 3S''_\delta(\lambda^\tau(t,z)) \lambda^\tau_z(t,z) \lambda^\tau_{zz}(t,z) +$

$$+ S_\delta'(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zzz}(t,z)) + 3(c_1(t)f^{i\tau}_{zz} + c_2(t)f^{i\tau}_z)((S_\delta'(\lambda^\tau(t,z))\tfrac{\partial^4}{\partial z^4}\lambda^\tau(t,z) +$$
$$+ S_\delta''(\lambda^\tau(t,z)))(4\lambda^\tau_z(t,z)\lambda^\tau_{zzz}(t,z) + 3\lambda^\tau_{zz}{}^2(t,z)) +$$
$$+ 6S_\delta'''(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z)\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S_\delta''''(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 4}_z(t,z)).$$

В силу принципа максимума, свойств срезающей функции и оценки (2.43) получаем

$$|g_4| \le (\sup_{z\in\mathbb{R}} |g_4(t-\frac{\tau}{3},z)| + C\tau(g_4(t-\frac{\tau}{3},z)+1) + 1 - 1)e^{C\tau(1+g_4(t-\frac{\tau}{3},z))} \le$$
$$\le (V_4+1)(Ct+1)e^{C\tau(1+V_4)} - 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\xi,z)\right| \le (V_4+1)e^{2C\tau(1+V_4)} - 1, \quad \frac{\tau}{3} < \xi \le \frac{2\tau}{3}. \tag{2.44}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнение (2.41) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим

$$\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\xi,z)\right| = \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau\left(\frac{2\tau}{3},z\right) + 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} (c_3(\eta)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z)) +$$
$$+ 4c_3(t)\frac{\partial^3}{\partial z^3} f^\tau_z S_\delta'(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^\tau_z(\eta,x) + 6c_3(\eta)f^\tau_{zz}(S_\delta''(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^\tau_z(\eta,z) +$$
$$+ S_\delta'(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^\tau_{zz}(\eta,z)) + 4c_3(\eta)f^\tau_z(S_\delta'''(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^{\tau 3}_z(\eta,z) +$$
$$+ 3S_\delta''(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^\tau_z(t,z)\lambda^\tau_{zz}(\eta,z) + S_\delta'(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^\tau_{zzz}(\eta,z)) +$$
$$+ f^\tau\Big((S_\delta'(\lambda^\tau(\eta,z))\frac{\partial^4}{\partial z^4}\lambda^\tau(\eta,z) + S_\delta''(\lambda^\tau(\eta,z)))(4\lambda^\tau_z(\eta,z)\lambda^\tau_{zzz}(\eta,z) +$$
$$+ 3\lambda^\tau_{zz}{}^2(\eta,z)) + 6S_\delta'''(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^\tau_{zz}(\eta,z)\lambda^{\tau 2}_z(\eta,z) + S_\delta''''(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda^{\tau 4}_z(\eta,z)))d\eta.$$

Справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\xi,z)\right| \le \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| +$$
$$+ C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big(\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\eta,z)\Big| + 1 + \sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},z)\Big|\Big)d\eta \le$$

$$\leq \left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, z\right)\right| e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left(\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\eta, z)\right| + 1\right) d\eta,$$

$$\frac{2\tau}{3} < \xi \leq t, \quad \frac{2\tau}{3} \leq t \leq \tau.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\leq\xi\leq t}$, так же учитывая оценку (2.44) и свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\xi, z)\right| \leq \left((V_4+1)e^{2C\tau(1+V_4)} - 1\right) e^{C\tau} +$$
$$+ C\int\limits_{0}^{\tau} \left(\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\eta, z)\right| + 1\right) d\eta, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Используя лемму Гронуолла, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\xi, z)\right| \leq \left((V_4+1)e^{2C\tau(1+V_4)} - 1\right) e^{2C\tau} + e^{C\tau} - 1, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(\xi, z)\right| \leq \left((V_4+1)e^{4C\tau(1+V_4)} - 1\right), \quad 0 < t \leq \tau. \tag{2.45}$$

На первом целом шаге справедлива оценка

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(t, z)\right| \leq \left((V_4+1)e^{4C\tau(1+V_4)}\right) e^{4C\tau(1+V_4)e^{4C\tau(1+V_4)}} - 1, \quad 0 < t \leq 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{4C\tau(1+V_4)} \leq 2,$$

получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(t, z)\right| \leq \left((V_4+1)e^{12C\tau(1+V_4)}\right) - 1, \quad 0 < t \leq 2\tau.$$

В предположении, что $e^{12C\tau(1+V_4)} \leq 2$, на втором временном шаге получим

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^\tau(t, z)\right| \leq \left((V_4+1)e^{20C\tau(1+V_4)}\right) - 1, \quad 0 < t \leq 3\tau.$$

Далее, аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l < N$) приводят к неравенству

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^\tau(t,z)\right| \le \Big((V_4+1)e^{4(2l+1)C\tau(1+V_4)}\Big)-1, \quad 0<t\le(l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_5^*, $0<t_5^*\le t_4^*\le T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{12t_5^*C(1+V_4)}\le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^\tau(t,z)\right| \le \Big((V_4+1)e^{12\,t_5^*C(1+V_4)}\Big)-1, \quad 0<t\le t_5^*.$$

Получили оценку четвертой прозводной функции $f(t,z)$ равномерную по τ:

$$\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4}f^\tau(t,z)\right|\le C, \quad (t,z)\in G_{[0,t_5^*]}. \tag{2.46}$$

Таким образом, в $G_{[0,t_5^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f^\tau(t,z)\right|\le C, \quad k=0,1,\ldots,4. \tag{2.47}$$

В силу оценки (2.47), правые части уравнений (2.7)—(2.10) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0,t_5^*]$, следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$|f_t^\tau(t,z)|\le C, \quad (t,z)\in G_{[0,t_5^*]}. \tag{2.48}$$

Дифференцируя уравнения задачи (2.7)—(2.10) по переменной z один или два раза, получим равномерные по τ оценки

$$|f_{tz}^\tau(t,z)|+|f_{tzz}^\tau(t,z)|\le C, \quad (t,z)\in G_{[0,t_5^*]},$$

что вместе с (2.38), (2.46) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы Арцела о компактности [14] некоторая подпоследовательность $f^{\tau_k}(t,z)$ последовательности $f^{\tau}(t,z)$ решений задачи (2.7)—(2.10) сходится вместе с производными по z до второго порядка включительно к функции $f(t,z) \in C^{0,2}_{t,z}(G_{[0,t_5^*]})$. На основании теоремы 1.5 сходимости МСА, $f(t,z)$ — решение задачи (2.6), причем $f(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t_5^*]})$, где

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t_5^*]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \in C(G_{[0,t_5^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

при этом

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \right| \leq C, \quad k = 0,1,2. \tag{2.49}$$

Пусть выполняется следующее условие при $t \in [0, t_5^*]$

$$\frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geq \delta. \tag{2.50}$$

Для того чтобы снять срезку в уравнении (2.6), докажем, что при $t \in [0, t_5^*]$ выполняется

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geq \frac{\delta}{2}.$$

Проинтегрируем (2.6) по временной переменной в пределах от 0 до t:

$$f(t,z) = v_0(z) + \int\limits_0^t \Psi(\eta, z) d\eta,$$

где $\Psi(t,z) = a(t) f_{zz} + B_z(f) S_\delta \left(\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \right)$.

Так как выполняется условие (2.5), то справедливо равенство

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} = \frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} - \frac{\varphi_t(t,0) \int_0^t \Psi(\eta,z) d\eta}{B_z(\psi)}. \tag{2.51}$$

В силу выполнения условия (2.50), учитывая (2.11), (2.49), получим при $t \in \left[0, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right]$

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geq \delta - A(\delta) t \geq \frac{\delta}{2}.$$

Здесь $A(\delta)$ — некоторая положительная константа, которая оценивает входные данные и зависит от δ, константы C из (2.11), а также константы, ограничивающей коэффициент $a(t)$.

В силу определения срезающей функции $S_\delta(\theta)$ имеем

$$S_\delta(\lambda(t,z)) = \lambda(t,z), \text{ при } t \in [0,t^*], \text{ где } t^* = \min\left(t_5^*, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right).$$

Таким образом, в уравнении (2.6) срезка снимается. Следовательно, доказано существование решения $f(t,z)$ задачи (1.13) в классе $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$.

Теорема 2.1. *При выполнении условий* (2.5), (2.11), (2.50) *на входные данные, существует* t^*, $0 < t^* \le T$ *— некоторая положительная константа, зависящая от* μ *из* (2.5), *постоянных, ограничивающих функции* $a(t)$, $b(t), c_1(t)$, *и постоянных из* (2.11), *ограничивающих входные данные; такая, что существует решение* $f(t,z)$ *задачи* (1.13) *в классе*

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k=0}^{2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \right| \le C. \tag{2.52}$$

Поскольку существование решения доказано в области $G_{[0,t^*]}$, то будем говорить, что задача (1.13) разрешима в малом временном интервале.

2.2.2 Единственность решения прямой задачи

Докажем единственность решения задачи (1.13). Предположим, что $f_1(t,z)$ и $f_2(t,z)$ — два классических решения задачи (1.13). Справедливы соотношения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = a(t) f_{1zz} + B_z(f_1) \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f_1(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = a(t) f_{2zz} + B_z(f_2) \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f_2(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

$$f_1(0,z) = v_0(z), \quad f_2(0,z) = v_0(z).$$

Покажем, что $f(t,z) = f_1(t,z) - f_2(t,z) \equiv 0$.

Так как $f(t,z) = f_1(t,z) - f_2(t,z)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t) f_{zz} + B_z(f)\lambda_1 - B_z(f_2)\frac{f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}, \tag{2.53}$$

$$f(0,z) = 0, \tag{2.54}$$

здесь и далее $\lambda_1 = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f_1(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$.

Перепишем уравнение (2.53) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (a(t) + c_1(t)\lambda_1) f_{zz} + c_2(t)\lambda_1 f_z + f\left(c_3(t)\lambda_1 - B_z(f_2)\frac{\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}\right). \tag{2.55}$$

Уравнение (2.55) является уравнением параболического типа, следовательно к задаче Коши (2.55), (2.54) применим принцип максимума. Получим оценку на функцию $f(t,z)$ следущего вида

$$|f(t,z)| \equiv 0.$$

Следовательно, так как показано, что $f_1(t,z) - f_2(t,z) \equiv 0$, то решение единственно.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (2.5), (2.11), (2.50) *на входные данные, тогда решение* $f(t,z)$ *задачи* (1.13) *в классе* $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, *удовлетворяющее соотношению* (2.52), *единственно.*

2.2.3 Существование решения обратной задачи

Задача (1.12) является классической задачей Коши для параболического уравнения. Сформулируем условия существования и единственности решения для данной задачи в виде теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть* $\omega_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ *ограничена, тогда существует единственное решение* $\varphi(t,x)$ *задачи* (1.12), *принадлежащее классу*

$C^{1,2}_{t,x} = \{\varphi(t,x) | \varphi_t(t,x), D^\alpha_x \varphi(t,x), \ |\alpha| \le 2\}$, *удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{|\alpha|\le 2} |D^\alpha_x \varphi_t(t,x)| \le C.$$

В силу того, что функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ выражаются через известные функции, а именно

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x) f(t,z),$$

$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

где $\varphi(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}$, $f(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}$ —решения задач (1.12) и (1.13), справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{2} \sum_{|\alpha|\le 2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u(t,x,z) \right| + \sum_{k=0}^{2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \lambda(t,z) \right| \le C. \qquad (2.56)$$

В силу теорем 1.7, 2.1 — 2.3, справедлива теорема

Теорема 2.4. *При выполнении условий* (2.5), (2.11), (2.50) *на входные данные, существует* t^*, $0 < t^* \le T$ *— некоторая положительная константа, зависящая от* μ *из* (2.5), *постоянных, ограничивающих функции* $a(t)$, $b(t), c_1(t)$, *и постоянных из* (2.11), *ограничивающих входные данные; такая, что существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ *обратной задачи* (2.1) — (2.3) *в классе*

$$Z(t^*) = \left\{ u(t,x,z), \lambda(t,z) \,|\, u(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(\widetilde{G}_{[0,t^*]}),\, \lambda(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) \right\},$$

где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(\widetilde{G}_{[0,t^*]}) = \left\{ u(t,x,z) \middle| D^\alpha_x u, \frac{\partial^k}{\partial z^k} u \in C(\widetilde{G}_{[0,t^*]}), k = 0,1,2, \ |\alpha| \le 2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению (2.56).

2.3 Единственность решения обратной задачи

Пусть выполняются условия (2.5), (2.11), (2.56). Доказательство единственности решения задачи (2.1)–(2.3) будем вести от противного. Пусть $u_1(t,x,z), \lambda_1(t,z)$ и $u_2(t,x,z), \lambda_2(t,z)$ — два классических решения задачи (2.1), (2.2). Причем, пара функций $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,z)$ — решение, определяемое теоремой 1.7 и удовлетворяющее условию (2.3), а пара функций $u_2(t,x,z), \lambda_2(t,z)$ — некоторое другое решение задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяющее условию (2.56). Тогда справедливы соотношения:

$$u_{1t} = a(t)u_{1zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u_1(t,x,z) + \lambda_1(t,z)B_z(u_1)$$
$$u_{2t} = a(t)u_{2zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u_2(t,x,z) + \lambda_2(t,z)B_z(u_2)$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z), \quad u_2(0,x,z) = u_0(x,z),$$

$$u_1(t,0,z) = \psi(t,z), \quad u_2(t,0,z) = \psi(t,z).$$

Разность $u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z) = u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,z) - \lambda_2(t,z) = \lambda(t,z)$ является решением задачи

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda_1(t,z)B_z(u) + \lambda(t,z)B_z(u_2), \quad (2.57)$$

$$u(0,x,z) = 0, \quad u(t,0,z) = 0. \quad (2.58)$$

Полагаем в уравнении (2.57) $x = 0$. Используя (2.58), выражаем коэффициент при функции $\lambda(t,z)$. Подставляя его выражение в (2.58), получим

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda_1(t,z)B_z(u) + \\ + \frac{b(t)\Delta_x u(t,0,z)}{B_z(\psi)}B_z(u_2), \quad (2.59)$$

$$u(0,x,z) = 0. \quad (2.60)$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$g_k(t)=\sup_{G[0,t]}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u(\xi,x,z)\right|,\quad k=0,1,2.$$

В силу принципа максимума получим оценки на уравнение (2.59)

$$|u(\xi,x,z)|\le Ce^{C\xi}g_2(t)\xi,\quad (\xi,x,z)\in G_{[0,t]},\quad 0\le t\le t^*,$$

откуда в силу неотрицательности $g_k(t)$ получим оценку

$$g_0(t)\le Ctg_2(t)\le C(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t,\quad 0\le t\le t^*.$$

Дифференцируя уравнения (2.59), (2.60) по x один или два раза, в силу принципа максимума для уравнения

$$(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u)_t=a(t)(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u)_{zz}(t,x,z)+b(t)(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u)_{xx}(t,x,z)+$$
$$+\lambda_1(t,z)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}B_z(u)\right)+\frac{b(t)\Delta_x u(t,0,z)}{B_z(\psi)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}B_z(u_2)\right),\quad (2.61)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}u\right)(0,x,z)=0,\quad (2.62)$$

получаем аналогичные оценки

$$g_k(t)\le Ctg_2(t)\le C(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t,\quad k=1,2\quad 0\le t\le t^*.$$

Сложим все оценки, получим

$$g_0(t,z)+g_1(t,z)+g_2(t,z)\le C(g_2(t,z)+g_1(t,z)+g_0(t,z))t,\quad 0\le t\le t^*.$$

Отсюда получим, что при $t\in[0,\zeta]$, где $\zeta<\frac{1}{C}$, выполняется равенство $g_0(t,z)+g_1(t,z)+g_2(t,z)=0$ и, следовательно,

$$u(t,x,z)=0,\quad (t,x,z)\in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя рассуждения для $t\in[0,2\zeta]$, получим, что

$$u(t,x,z)=0,\quad (t,x,z)\in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов получим оценку

$$u(t,x,z) \equiv 0, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

Учитывая, что $u_1(t,x,z) \equiv u_2(t,x,z), \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$, из (2.57), получим, что для $\lambda(t,z) = \lambda_1(t,z) - \lambda_2(t,z)$ выполняется соотношение

$$\lambda(t,z)B_z(\psi) = 0,$$

откуда в силу (2.5) следует, что

$$\lambda(t,z) = \lambda_1(t,z) - \lambda_2(t,z) = 0, \quad t \in [0,t^*].$$

Справедлива

Теорема 2.5. *При выполнении условий* (2.5), (2.11), (2.50) *на входные данные, решение* $u(t,x,z), \lambda(t,z)$ *задачи* (2.1)–(2.3), *удовлетворяющее соотношению* (2.56), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

2.4 Пример

В качестве примера рассмотрим следующую задачу Коши для параболического уравнения.

В области $G_{[0,T]} = \big\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\}$ рассмотрим уравнение

$$u_t = u_{zz}(t,x,z) + \Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{2.63}$$

где $B_z(u) = u_{zz}(t,x,z) + u_z(t,x,z) + 2u(t,x,z)$, с начальным условием условием:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z) = (\sin(z)+3)(\sin(x)+1). \tag{2.64}$$

Функции $a(t) = 1$, $b(t) = 1$, $c_1(t) = c_2(t) = 1$, $c_3(t) = 2$ — непрерывные, ограниченные на $[0,T]$. Функция $u_0(x,z) = (\sin(z)+3)(\sin(x)+1)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}^2$. Функция $\lambda(t,z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (2.63), (2.64).

Пусть задано условие переопределения следующего вида

$$u(t,0,z) = \psi(t,z) = (t+1)(\sin(z)+3),$$

и выполнено условие согласования

$$u_0(0,z) = \psi(0,z) = \sin(z)+3.$$

Необходимо выполнение следующего условия

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t,z) + c_2(t)\psi_z(t,z) + c_3(t)\psi(t,z)| \geq \mu > 0, \quad \mu\text{— const}.$$

Нетрудно проверить, что данное условие выполненяется

$$B_z(\psi) = (t+1)(-\sin(z)) + (t+1)\cos(z) + 2(t+1)(\sin(z)+3) =$$
$$= (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6) \geq \mu > 0,$$

достаточно взять $\mu = 0,5$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta_x\varphi, \quad \varphi(0,x) = w_0(x) = \sin(x)+1.$$

Решением этой задачи будет являтся функция $\varphi(t,x) = e^{-t}\sin(x)+1$. В этом можно убедится, подставив функцию $\varphi(t,x)$ в уравнение.

$$-e^{(-t)}\sin(x) = -e^{(-t)}\sin(x), \quad \varphi(0,x) = w_0(x) = \sin(x)+1.$$

Функция $w_0(x) = (\sin(x)+1) \in C(\mathbb{R}^n)$ ограничена.

Для задачи

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_{zz} + B_z(f)\frac{\sin(z)(2+t)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)},$$
$$f(0,z) = v_0(z) = \sin(z)+3, \tag{2.65}$$

решением будет являтся функция $f(t,z) = (t+1)(\sin(z)+3)$.

При этом

$$B_z(f) = (t+1)(-\sin(z)) + (t+1)\cos(z) + 2(t+1)(\sin(z)+3) =$$
$$= (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)$$

и

$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} =$$
$$= \frac{\sin(z)+3+\sin(z)(t+1)}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)}.$$

Подставим решение в уравнение

$$\sin(z)+3 = -(t+1)\sin(z)+(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)\frac{\sin(z)+3+\sin(z)(t+1)}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)},$$

$$\sin(z)+3 = -(t+1)\sin(z)+\sin(z)+3+(t+1)\sin(z),$$

получаем верное тождество.

Для существования решения задачи (2.65) необходимо выполнение условия

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}v_0(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right| \le C, \quad k=0,1,\ldots,4,\ i=0,1,\ldots,6. \tag{2.66}$$

Это условие выполняется в силу ограниченности всех производных от функций $v_0(z) = \sin(z)+3$ и $\psi(t,z) = (t+1)(\sin(z)+3)$.

По теореме 1.7 функция $u(t,x,z)$ представима в виде

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z) = (t+1)(e^{-t}\sin(x)+1)(\sin(z)+3).$$

Проверим, удовлетворяет ли функция $u(t,x,z)$ уравнению. Для этого выпишем все функции, участвующие в уравнении

$$u_t = (\sin(z)+3)\left(\sin(x)(e^{-t}-(t+1)e^{-t})+1\right) =$$
$$= (\sin(z)+3)\left(\sin(x)e^{-t}(-t)+1\right),$$

$$u_{xx} = -(\sin(z)+3)(t+1)\sin(x)e^{-t},$$

$$u_{zz} = -(\sin(x)e^{-t}+1)(t+1)\sin(z),$$

$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} =$$

$$= \frac{\sin(z)(t+2)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)},$$

$$B_z(u)(t+1)(-\sin(z)) + (t+1)\cos(z) + 2(t+1)(\sin(z)+3) =$$

$$= (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6),$$

и подставим их в уравнение (2.63).

$$(\sin(z)+3)\big(\sin(x)e^{-t}(-t)+1\big) =$$

$$= -(\sin(x)e^{-t}+1)(t+1)\sin(z) - (\sin(z)+3)(t+1)\sin(x)e^{-t} +$$

$$+ (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)\frac{\sin(z)(t+2)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)}.$$

После элементарных преобразований последнее уравнение примет вид

$$\sin(z)\sin(x)e^{-t}(-t) + \sin(z) + 3\sin(x)e^{-t}(-t) + 3 =$$

$$= -2te^{-t}\sin(z)\sin(x) - 3te^{-t}\sin(x) - t\sin(z) - 2e^{-t}\sin(z)\sin(x) -$$

$$- 3e^{-t}\sin(x) - \sin(z) + te^{-t}\sin(z)\sin(x) + t\sin(z) +$$

$$+ 2e^{-t}\sin(z)\sin(x) + 2\sin(z) + 3te^{-t}\sin(x) + 3.$$

После сокращения, получим верное тождество.

Функция $u_0(x,z)$ представима в виде

$$u_0(x,z) = w_0(x)v_0(z) = (\sin(z)+3)(\sin(x)+1).$$

Условие для существования решения задачи (2.65):

$$\frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} = \frac{\sin(z)(t+2)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)} \geq \delta,$$

выполняется при $\delta = 0,15$ и $\forall\, t \in [0, t^*]$.

Данный пример показывает, что множество решений задачи (2.1)—(2.3) не пусто.

3 Представление решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде $u_0(x,z) = \sum\limits_{i=1}^{m} w_0^i(x) v_0^i(z)$

3.1 Постановка задачи

Рассматривается обратная задача (2.1) — (2.3). Предполагается, что выполнено условие согласования (2.4) и условие (2.5).

Для исследования обратной задачи используем подход, предложенный Ю.Е.Аниконовым. Для сведения обратной задачи к прямой воспользуемся теоремой 1.8 и получим две прямых задачи (1.14) и (1.15).

3.2 Существование решения задачи

3.2.1 Существование решения прямой задачи

Для доказательства существования решения задачи (1.15) рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \big\{(t,z) \mid z \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le T\big\}$ вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = a(t)\overline{f}_{zz} + B_z(\overline{f}) S_\delta \left(\frac{\beta(t,z) - (\overline{f}(t,z), \overline{\varphi}_t(t,0))}{B_z(\psi)} \right), \quad \overline{f}(0,z) = \overline{v}_0(z), \tag{3.1}$$

здесь $\beta(t,z) = \psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z)$ — это известная функция, а $S_\delta(\vartheta)$ — функция срезки, определенная в $\mathbb{R}$, сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая и обладающая следующими свойствами:
$S_\delta(\vartheta) \ge \frac{\delta}{3} > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R}$ и $S_\delta(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta, & \text{при } \vartheta \ge \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & \text{при } \vartheta \le \frac{\delta}{3}. \end{cases}$

Определению подлежит функция $\overline{f}(t,z)$. Функция $\overline{v}_0(z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}$. Функция $S_\delta^{(k)}(\vartheta) \le 2, k = 1, \ldots, 4$.

Для доказательства существования решения вспомогательной задачи используем метод слабой аппроксимации [5]. Фиксируем постоянную $\tau > 0$ такую, что $\tau J = T$. Разбиваем задачу на три дробных шага и линеаризуем задачу сдвигом по переменной t на величину $\frac{\tau}{3}$.

$$f_t^{i\tau} = 3\,a(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z), \quad j\tau < t \le \Big(n + \frac{1}{3}\Big)\tau; \tag{3.2}$$

$$f_t^{i\tau} = 3\,(c_1(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z) + c_2(t) f_z^{i\tau}(t,z)) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)),$$
$$\Big(j + \frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j + \frac{2}{3}\Big)\tau; \tag{3.3}$$

$$f_t^{i\tau} = 3\,c_3(t) f^{i\tau}(t,z) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \quad \Big(j + \frac{2}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j + 1\Big)\tau; \tag{3.4}$$

$$f^{i\tau}(0,z) = v_0^i(z), \quad i = 1, \dots M, \quad j = 0, 1, 2, \dots, (J-1),\ J\tau = T, \tag{3.5}$$

где $\lambda^\tau(t,z) = \dfrac{\beta(t,z) - \sum\limits_{i=1}^{m} f^{i\tau}(t - \frac{\tau}{3}, z)\,\varphi_t^i(t,0)}{B_z(\psi)}$.

Относительно функций $\overline{v}_0(z), \psi(t,z)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему:

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}\overline{v}_0(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\overline{\psi}(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^l}{\partial z^l}\overline{\psi}(t,z)\right| \le C, \quad k = 0, 1, \dots, 4,\ l = 0, 1, \dots, 6. \tag{3.6}$$

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\overline{f}^\tau(t,z)$ задачи (3.2)—(3.5) в классе гладких ограниченных функций.

Будем считать далее, что $C > 1$ — некоторые константы, вообще говоря, различные, зависящие от констант, ограничивающих коэффициенты из уравнения, константы μ и константы, ограничивающие входные данные, из условия (3.6). Константы C не зависят от τ.

Введем обозначения: $F_k(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{m} |\frac{\partial^k}{\partial z^k} f^{i\tau}(\xi,z)|$, $V_k = \sum\limits_{i=1}^{m} \sup\limits_{z\in\mathbb{R}} |\frac{d^k}{dz^k} v_0^i(z)|$, $F_k(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sup\limits_{j\tau<\xi\le t} \sup\limits_{z\in\mathbb{R}} |\frac{\partial^k}{\partial z^k} f^{i\tau}(\xi,z)|$, здесь $k = \overline{0,2}$ — порядок производной.

На первом дробном шаге, $t \in (0, \frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнения

$$f_t^{i\tau} = 3\,a(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z), \quad i = 1,\ldots,m.$$

В силу принципа максимума для задачи Коши, учитывая (3.5), получим оценку

$$|f^{i\tau}(\xi,z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} |v_0^i(z)|, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Сложим получившиеся оценки, получим

$$F_0(\xi) \le V_0, \qquad 0 < \xi \le t,\ 0 < t \le \frac{\tau}{3}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим второй дробный шаг, $t \in (\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}]$.

$$f_t^{i\tau} = 3\,(c_1(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z) + c_2(t) f_z^{i\tau}(t,z)) S_\delta \left(\frac{\beta(t,z) - \sum\limits_{j=1}^{M} f^{j\tau}(t - \frac{\tau}{3},\, z)\, \varphi_t^j(t,0)}{B_z(\psi)} \right),$$
$$i = 1,\ldots,m.$$

В силу оценки (3.7), свойства срезающей функции и принципа максимума справедлива оценка

$$|f^{i\tau}(\xi,z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{i\tau}\left(\frac{\tau}{3}, z\right)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}} |v_0^i(z)|, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Сложим получившиеся оценки, получим

$$F_0(\xi) \le V_0, \qquad 0 < \xi \le t,\ \frac{\tau}{3} < t \le \frac{2\tau}{3}. \tag{3.8}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнения (3.4) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим

$$f^{i\tau}(\xi,z) = f^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) +$$
$$+3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} c_3(\eta) f^{i\tau}(\eta,z) S_\delta \left(\frac{\beta(\eta,z) - \sum\limits_{i=1}^{m} f^{i\tau}(\eta - \frac{\tau}{3},\, z)\, \varphi_t^i(\eta,0)}{B_z(\psi)} \right) d\eta, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Справедливо выполнение следующих неравенств

$$|f^{i\tau}(\xi,z)| \le \left|f^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| +$$

$$+3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} c_3(\eta)f^{i\tau}(\eta,z)S_\delta\left(\frac{\beta(\eta,z)-\sum\limits_{i=1}^{m} f^{i\tau}(\eta-\frac{\tau}{3},\,z)\,\varphi_t^i(\eta,0)}{B_z(\psi)}\right)d\eta\right| \le$$

$$\le \left|f^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\left|f^{i\tau}(\eta,z)\right|\left(1+\sum_{i=1}^{m}\left|f^{i\tau}(\frac{2\tau}{3},z)\right|\right)d\eta,$$

$$\frac{2\tau}{3} < \xi \le t, \quad \frac{2\tau}{3} \le t \le \tau.$$

Возьмем от обеих частей последних неравенств $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\le\xi\le t}$, а так же учитывая оценку (3.8), свойства срезающей функции, на нулевом целом шаге получим оценки $(i = 1,\ldots,m)$.

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{i\tau}(t,z)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}}|v_0^i(z)| + C(1+\sum_{i=1}^{m}\sup_{z\in\mathbb{R}}|v_0^i(z)|)\int\limits_0^{\tau}\sup_{z\in\mathbb{R}}|f^{i\tau}(\eta,z)|d\eta,$$

$$0 < t \le \tau.$$

Сложим полученые оценки, получим справедливую оценку

$$F_0(t) \le V_0 + C(1+V_0)\int\limits_0^{\tau}F_0(\eta)d\eta, \quad 0 < t \le \tau.$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла, получим

$$F_0(t) \le V_0\,e^{C\tau(1+V_0)} + 1 - 1 \le (1+V_0)\,e^{C\tau(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \le \tau.$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t \in (\tau, 2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$F_0(t) \le (1+V_0))e^{C\tau(1+V_0)}e^{C\tau(1+V_0)e^{C\tau(1+V_0)}} - 1, \quad 0 < t \le 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C\tau(1+V_0)} \le 2,$$

получим

$$F_0(t) \le (1 + V_0)\, e^{3C\tau(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \le 2\tau.$$

На втором временном шаге,при условии $e^{3C\tau(1+V_0)} \le 2$,получим

$$F_0(t) \le (1 + V_0)\, e^{5C\tau(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \le 3\tau.$$

Рассуждая аналогично, на l-ом шаге $(l < J)$ получаем

$$F_0(t) \le (1 + V_0)\, e^{(2l+1)C\tau(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_1^*, $0 < t_1^* \le T$, которая удовлетворяет неравенству

$$e^{3t_1^* C(1+V_0)} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$F_0(t) \le (1 + V_0)\, e^{3Ct_1^*(1+V_0)} - 1, \quad 0 < t \le t_1^*.$$

В итоге получили равномерную по τ оценку

$$\sum_{i=1}^{M} |f^{i\tau}(t, z)| \le C,\ (t, z) \in G_{[0,t_1^*]}. \tag{3.9}$$

Оценим первую производную функции $\overline{f}(t, z)$. Продифференцируем уравнения (3.2)—(3.5) по z, получим

$$f^{i\tau}_{tz} = 3\, a(t) f^{i\tau}_{zzz}(t, z), \qquad j\tau < t \le \Big(j + \frac{1}{3}\Big)\tau; \tag{3.10}$$

$$f^{i\tau}_{tz} = 3\ \Big(\big(c_1(t) f^{i\tau}_{zzz}(t, z) + c_2(t) f^{i\tau}_{zz}(t, z)\big)\, S_\delta(\lambda^\tau(t, z)) +$$
$$+ \big(c_1(t) f^{i\tau}_{zz}(t, z) + c_2(t) f^{i\tau}_{z}(t, z)\big)\, S'_\delta(\lambda^\tau(t, z))\lambda^\tau_z(t, z)\Big),$$
$$\Big(j + \frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j + \frac{2}{3}\Big)\tau; \tag{3.11}$$

$$f^{i\tau}_{tz} = 3\,\Big(c_3(t)f^{i\tau}_z(t,z)S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + c_3(t)f^{i\tau}(t,z)S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)\Big)\,,$$
$$\Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau < t \le \Big(j+1\Big)\tau; \quad (3.12)$$

$$f^{i\tau}_z(0,z) = v^i_{0z}(z), \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 0,1,2,\dots,(J-1),\ J\tau = T, \qquad (3.13)$$

где $\lambda^\tau_z = \sum\limits_{i=1}^m h_i(t,z)f^{i\tau}_z(t-\frac{\tau}{3},z) + h(t,z)$, причем $h(t,z) = \frac{\beta_z(t,z)-\lambda(t,z)B_z(\psi_z)}{(B_z(\psi))}$ и $h_i(t,z) = -\frac{1}{(B_z(\psi))}\varphi^i_t(t,0)$, $(i=\overline{1,m})$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

На первом дробном шаге, $t\in(0,\frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнения (3.10). В силу принципа максимума получим оценку на каждое уравнение. Суммируя эти оценки от 1 до m, получим оценку:

$$F_1(\xi) \le V_1, \quad 0<\xi\le t,\ 0<t\le\frac{\tau}{3}. \qquad (3.14)$$

На втором дробном шаге, $t\in(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнения (2.16). Введем обозначение $g^i_1 = f^{i\tau}_z(t,z)$ $(i=\overline{1,m})$, получим уравнения

$$g^i_{1t} = A_1 g^i_{1zz} + E_1 g^i_{1z} + K_1 g^i_1,$$

где $A_1 = 3\,c_1(t)S_\delta(\lambda^\tau(t,z))$,
$E_1 = 3(c_2(t)S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + c_1(t)S_\delta{}'(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z))$,
$K_1 = c_2(t)S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)$.

В силу принципа максимума и оценки (3.14), а также свойств срезающей функции, получаем

$$\sum_{i=1}^M |g^i_1| \le \sum_{i=1}^M \sup_{z\in\mathbb{R}} |g^i_1(t-\frac{\tau}{3},z)| e^{C\tau(1+\sum\limits_{j=1}^M g^j_1(t-\frac{\tau}{3},z))} \le$$
$$\le \sum_{i=1}^M \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d}{dz}v^i_0(z)\right| e^{C\tau(1+\sum\limits_{j=1}^M \sup\limits_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d}{dz}v^j_0(z)\right|)},$$

$$\sum_{i=1}^{M}|g_1^i| \le \left(\sum_{i=1}^{M}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d}{dz}v_0^i(z)\right|\right)e^{C\tau(1+\sum\limits_{i=1}^{M}\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d}{dz}v_0^i(z)\right|)}+1-1\le$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{M}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{d}{dz}v_0^i(z)\right|+1\right)e^{C\tau(1+\sum\limits_{i=1}^{M}\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}|\frac{d}{dz}v_0^i(z)|)}-1.$$

Таким образом, получаем, что

$$F_1(\xi)\le (V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)}-1, \qquad \frac{\tau}{3}<\xi\le\frac{2\tau}{3}. \tag{3.15}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнения (3.12) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi\in(\frac{2\tau}{3},t)$ $(i=\overline{1,m})$. Получим

$$f_z^{i\tau}(\xi,z)=f_z^{i\tau}\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)+3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(c_3(\eta)f_z^{i\tau}(\eta,z)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z))+$$

$$+c_3(\eta)f^{i\tau}(\eta,z)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda_z^\tau(\eta,z))d\eta.$$

Справедливо выполнение следующих неравенств $(i=\overline{1,m})$

$$|f_z^{i\tau}(\xi,z)|\le\left|f_z^{i\tau}\Big(\frac{2\tau}{3},z\Big)\right|+$$

$$+3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(c_3(\eta)f_z^{i\tau}(\eta,z)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z))+c_3(\eta)f^{i\tau}(\eta,z)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda_z^\tau(\eta,z))d\eta\right|,$$

$$\frac{2\tau}{3}<\xi\le t,\quad \frac{2\tau}{3}\le t\le\tau.$$

Суммируя данные неравенства, получаем

$$F_1(\xi)\le F_1\Big(\frac{2\tau}{3}\Big)+$$

$$+3\left|\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}(c_3(\eta)F_1(\eta)S_\delta(\lambda^\tau(\eta,z))+c_3(\eta)F_0(\eta)S_\delta^{'}(\lambda^\tau(\eta,z))\lambda_z^\tau(\eta,z))d\eta\right|\le$$

$$\le F_1\Big(\frac{2\tau}{3}\Big)+C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\left(F_1(\eta)+1+\sum_{i=1}^{M}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f_z^{i\tau}\left(\frac{2\tau}{3},z\right)\right|\right)d\eta\le$$

$$\leq F_1(\frac{2\tau}{3}) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (F_1(\eta)| + 1)\, d\eta + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \sum_{i=1}^{M} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| f_z^{i\tau}\Big(\frac{2\tau}{3}, z\Big)\right| d\eta \leq$$

$$\leq F_1\Big(\frac{2\tau}{3}\Big)e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} (F_1(\eta) + 1)\, d\eta,$$

$$\frac{2\tau}{3} < \xi \leq t, \quad \frac{2\tau}{3} \leq t \leq \tau.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\leq\xi\leq t}$, так же учитывая оценку (3.15), на нулевом целом шаге получим

$$F_1(t) \leq \Big((V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)} - 1\Big)\, e^{C\tau} + C\int\limits_{0}^{\tau} (F_1(\eta) + 1)\, d\eta, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла, получим

$$F_1(t) \leq \Big((V_1+1)e^{C\tau(1+V_1)} - 1\Big)\, e^{2C\tau} + e^{C\tau} - 1, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Следовательно,

$$F_1(t) \leq (V_1+1)e^{3C\tau(1+V_1)} - 1, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t \in (\tau, 2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$F_1(t) \leq (V_1+1)e^{3C\tau(1+V_1)}e^{3C\tau(1+V_1)e^{3C\tau(1+V_1)}} - 1, \quad 0 < t \leq \tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{3C\tau(1+V_1)} \leq 2,$$

получим

$$F_1(t) \leq (V_1+1)e^{9C\tau(1+V_1)} - 1, \quad 0 < t \leq 2\tau.$$

На втором целом временном шаге в предположении, что $e^{9C\tau(1+V_1)} \leq 2$, получим

$$F_1(t) \leq (V_1+1)e^{15C\tau(1+V_1)} - 1, \quad 0 < t \leq 3\tau.$$

Далее, аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l < J$) приводят к неравенству

$$F_1(t) \le (V_1+1)e^{3(2l+1)C\tau(1+V_1)} - 1, \quad 0 < t \le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_2^*, $0 < t_2^* \le t_1^* \le T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{9t_2^* C(1+V_1)} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$F_1(t) \le (V_1+1)e^{9Ct_2^*(1+V_1)} - 1, \quad 0 < t \le t_2^*.$$

Следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$\sum_{i=1}^{m} |f_z^{i\tau}(t,z)| \le C,\ (t,z) \in G_{[0,t_2^*]}. \tag{3.16}$$

Продифференцируем (3.10)—(3.13) по z ($i = \overline{1,m}$).

$$f_{tzz}^{i\tau} = 3\,a(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau}(t,z), \qquad j\tau < t \le \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} f_{tzz}^{i\tau} = 3\, \Bigg[&\left(c_1(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{\tau}(t,z) + c_2(t) f_{zzz}^{i\tau}(t,z)\right) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + \\ &+ 2\left(c_1(t) f_{zzz}^{i\tau}(t,z) + c_2(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z)\right) S_\delta'(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z)) + \\ &+ \left(c_1(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z) + c_2(t) f_z^{i\tau}(t,z)\right) \times \\ &\times \left(S_\delta''(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z) + S_\delta'(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z)\right)\Bigg], \\ &\left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} f_{tzz}^{i\tau} = 3\, \Big[&c_3(t) f_{zz}^{i\tau}(t,z) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 2\,c_3(t) f_z^{i\tau}(t,z) S_\delta'(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z) + \\ &+ c_3(t) f^\tau(t,z)\left(S_\delta''(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z) + S_\delta'(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z)\right)\Big], \\ &\left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le \Big(j+1\Big)\tau; \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f^{i\tau}(0,z) = \frac{d^2}{dz^2} v_0^i(z), \quad j = 0,1,2,\dots,(J-1),\ J\tau = T, \tag{3.20}$$

где $\lambda^\tau_{zz} = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(t,z) f^{i\tau}_{zz}(t-\frac{\tau}{3}, z) + p(t,z)$, причем $p(t,z)$ содержит частные производные функций $\frac{\partial^k}{\partial z^k}\lambda(t,z)$ $(k=0,1)$ и $p_i(t,z) = -\frac{\varphi^i_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

На первом дробном шаге, $t \in (0, \frac{\tau}{3}]$, рассматриваем уравнения (3.17). В силу принципа максимума получим оценку на каждое уравнение. Суммируя эти оценки от 1 до m, получим оценку:

$$F_2(\xi) \leq V_2, \quad 0 < \xi \leq t,\ 0 < t \leq \frac{\tau}{3}. \tag{3.21}$$

На втором дробном шаге, $t \in (\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}]$, рассмотрим уравнения (2.24). Обозначим $g^i_2 = f^{i\tau}_{zz}$ $(i=\overline{1,m})$, получим уравнения

$$g^i_{2t} = A_2 g^i_{2zz} + E_2 g^i_{2z} + K_2 g^i_2 + D^i_2,$$

где $A_2 = 3\, c_1(t) S_\delta(\lambda^\tau(t,z))$,
$E_2 = 3\left(c_2(t) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 2c_1(t) S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)\right)$,
$K_2 = 3\left(2c_2(t) S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z) + c_1(t)(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 2}_z(t,z) +\right.$
$\left.+ S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z))\right)$,
$D^i_2 = 3c_2(t) f^{i\tau}_z\left(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z)\right)$.

В силу принципа максимума и оценки (3.21), а также свойств срезающей функции, получаем

$$\sum_{i=1}^{M} |g^i_2| \leq \left[\sum_{i=1}^{M} \sup_{z\in\mathbb{R}} |g^i_2(t-\frac{\tau}{3}, z)| + \right.$$
$$\left. + C\tau\left(\sum_{i=1}^{M} g^i_2(t-\frac{\tau}{3}, z) + 1\right) + 1 - 1\right] e^{C\tau(1+\sum\limits_{i=1}^{M} g^i_2(t-\frac{\tau}{3},z))} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{M} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left|\frac{d^2}{dz^2} v^i_0(z)\right| + 1\right)(Ct+1) e^{C\tau(1+\sum\limits_{i=1}^{M}\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}|\frac{d^2}{dz^2}v^i_0(z)|)} - 1.$$

Таким образом, получаем, что

$$F_2(\xi) \leq (V_2+1)e^{2C\tau(V_2+1)} - 1, \quad 0 < \xi \leq t,\ \frac{\tau}{3} < t \leq \frac{2\tau}{3}. \tag{3.22}$$

На третьем дробном шаге интегрируем уравнениz (2.25) по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, где $\xi \in (\frac{2\tau}{3}, t)$. Получим $(i = \overline{1, m})$

$$f^{i\tau}_{zz}(\xi, z) = f^{i\tau}_{zz}\left(\frac{2\tau}{3}, z\right) +$$

$$+ 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} (c_3(\eta) f^{i\tau}_{zz}(\eta, z) S_\delta(\lambda^\tau(\eta, z)) + 2c_3(\eta) f^{i\tau}_z(\eta, z) S'_\delta(\lambda^\tau(\eta, z))\lambda^\tau_z(\eta, z) +$$

$$+ c_3(t) f^{i\tau}(S''_\delta(\lambda^\tau(t, z))\lambda^{\tau 2}_z(t, z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t, z))\lambda^\tau_{zz}(t, z)))d\eta.$$

В итоге получаем оценку

$$F_2(\xi) \le F_2\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left(F_2(\eta) + 1 + \sum_{i=1}^{M} \sup_{z\in\mathbb{R}} |f^{i\tau}_{zz}(\eta - \frac{\tau}{3}, z)|\right) d\eta \le$$

$$\le F_2\left(\frac{2\tau}{3}\right) e^{C\tau} + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left(F_2(\eta, z) + 1\right) d\eta,\ \frac{2\tau}{3} < \xi \le t, \quad \frac{2\tau}{3} \le t \le \tau.$$

От обеих частей последнего неравенства возьмем $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}}$, а затем $\sup\limits_{0\le\xi\le t}$, так же учитывая оценку (3.22), на нулевом целом шаге получим

$$F_2(t) \le \left((V_2 + 1)e^{2C\tau(V_2+1)} - 1\right) e^{C\tau} + C\int\limits_0^{\tau} \left(F_2(\eta) + 1\right) d\eta, \quad 0 < t \le \tau.$$

Отсюда, по лемме Гронуолла, получим

$$F_2(t) \le \left((V_2 + 1)e^{2C\tau(V_2+1)} - 1\right) e^{2C\tau} + e^{C\tau} - 1, \quad 0 < t \le \tau.$$

Следовательно,

$$F_2(t) \le \left((V_2 + 1)e^{4C\tau(V_2+1)} - 1\right), \quad 0 < t \le \tau. \tag{3.23}$$

На первом целом шаге получим оценку

$$F_2(t) \le \left((V_2 + 1)e^{4C\tau(V_2+1)} e^{4C\tau(V_2+1)e^{4C\tau(V_2+1)}} - 1\right), \quad 0 < t \le 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{4C\tau(1+V_2)} \le 2,$$

получим

$$F_2(t) \le \left((V_2+1)e^{12C\tau(V_2+1)} - 1\right), \quad 0 < t \le 2\tau.$$

При условии, что $e^{12C\tau(1+V_2)} \le 2$, на втором целом временном шаге получим

$$F_2(t) \le \left((V_2+1)e^{20C\tau(V_2+1)} - 1\right), \quad 0 < t \le 3\tau.$$

Аналогичные рассуждения на l-ом шаге ($l < J$) приводят к неравенству

$$F_2(t) \le \left((V_2+1)e^{4(2l+1)C\tau(V_2+1)} - 1\right), \quad 0 < t \le (l+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_3^*, $0 < t_3^* \le t_2^* \le T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{12t_3^*C(1+V_2)} \le 2.$$

Таким образом, получим оценку

$$F_2(t) \le \left((V_2+1)e^{12Ct_3^*(V_2+1)} - 1\right), \quad 0 < t \le t_3^*.$$

Получили оценку второй производной равномерную по τ

$$\sum_{i=1}^{m} |f_{zz}^{i\tau}(t,z)| \le C,\ (t,x) \in G_{[0,t_3^*]}. \tag{3.24}$$

Третья и четвертая производные оцениваются аналогично оценкам второй производной.

Оценим третью производную функции $\overline{f}(t,z)$ на всем временном промежутке ($i = \overline{1,m}$). Продифференцируем уравнения (3.17)—(3.20) по z еще раз.

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} f_t^{i\tau} = 3\,a(t)\frac{\partial^5}{\partial z^5} f^{i\tau}(t,z), \qquad j\tau < t \le \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} f_t^{i\tau} = 3\left(c_1(t)\frac{\partial^5}{\partial z^5} f^{i\tau} + c_2(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau}\right) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) +$$
$$+ 9\left(c_1(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau} + c_2(t)\frac{\partial^3}{\partial z^3} f^{i\tau}\right) S_\delta'(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z) +$$

$$+ 9\left(c_1(t)\frac{\partial^3}{\partial z^3}f^{i\tau} + c_2(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}f^{i\tau}\right)\times$$

$$\times\left(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z) + S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z)\right)+$$

$$+ 3\left(c_1(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}f^{i\tau} + c_2(t)f_z^{i\tau}\right)\left(S_\delta^{'''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 3}(t,z)+\right.$$

$$\left.+3S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z)\lambda_{zz}^\tau(t,z) + S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zzz}^\tau(t,z)\right),$$

$$\left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3}f_t^{i\tau} = 3\left[c_3(t)\frac{\partial^3}{\partial z^3}f^{i\tau}S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 3c_3(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}f^{i\tau}S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z)+\right.$$

$$+ 3c_3(t)f_z^{i\tau}(S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 2}(t,z) + S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zz}^\tau(t,z))+$$

$$+ c_3(t)f_z^{i\tau}\left(S_\delta^{'''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^{\tau 3}(t,z)+\right.$$

$$\left.\left.+3S_\delta^{''}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_z^\tau(t,z)\lambda_{zz}^\tau(t,z) + S_\delta^{'}(\lambda^\tau(t,z))\lambda_{zzz}^\tau(t,z)\right)\right],$$

$$\left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le \left(j+1\right)\tau; \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3}f^{i\tau}(0,z) = \frac{d^3}{dz^3}v_0^i(z), \quad j = 0,1,2,\ldots,(J-1), \quad J\tau = T, \qquad (3.28)$$

где $\lambda_{zzz}^\tau = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i(t,z)f_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},z) + q(t,z)$, причем $q(t,z)$ содержит частные производные функций $\frac{\partial^k}{\partial z^k}\lambda(t,z)$, $(k = 0,1,2)$ и $q_i(t,z) = -\frac{1}{B_z(\psi)}\varphi_t^i(t,0)$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

Итоговая оценка третьей производной:

$$\sum_{i=1}^{m}|f_{zzz}^{i\tau}(t,z)| \le C,\ (t,x)\in G_{[0,t_4^*]}, \qquad (3.29)$$

где t_4^*, $0 < t_4^* \le t_3^* \le T$.

Оценим четвертую производную функции $\overline{f}(t,z)$ на всем временном промежутке ($i = \overline{1,m}$), для этого уравнения (3.25)—(3.28) дифференцируем еще раз по z .

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4}f_t^{i\tau} = 3\,a(t)\frac{\partial^6}{\partial z^6}f^{i\tau}(t,z), \qquad j\tau < t \le \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau; \quad (3.30)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau}_t = {} & 3\left(c_1(t)\frac{\partial^6}{\partial z^6} f^{i\tau} + c_2(t)\frac{\partial^5}{\partial z^5} f^{i\tau}\right) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + \\
& + 12\left(c_1(t)\frac{\partial^5}{\partial z^5} f^{i\tau} + c_2(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau}\right) S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z) + \\
& + 18\left(c_1(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau} + c_2(t)\frac{\partial^3}{\partial z^3} f^{i\tau}\right)\Big(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + \\
& + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z)\Big) + 12\left(c_1(t)\frac{\partial^3}{\partial z^3} f^{i\tau} + c_2(t) f^{i\tau}_{zz}\right) \times \\
& \times \Big[S'''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 3}_z(t,z) + 3S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)\lambda^\tau_{zz}(t,z) + \\
& + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zzz}(t,z)\Big] + 3\Big(c_1(t) f^{i\tau}_{zz} + c_2(t) f^{i\tau}_z\Big) \times \\
& \times \left[\left(S'_\delta(\lambda(t,z))\,\frac{\partial^4}{\partial z^4}\lambda^\tau(t,z) + S''_\delta(\lambda(t,z))\right) \times \right. \\
& \times \Big(4\lambda^\tau_z(t,z)\lambda^\tau_{zzz}(t,z) + 3{\lambda^\tau_{zz}}^2(t,z) + 6S'''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z)\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + \\
& \left. + S''''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\,\lambda^{\tau 4}_z(t,z)\Big)\right], \qquad \left(j+\tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau; \quad (3.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau}_t = {} & 3\Big[c_3(t)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau} S_\delta(\lambda^\tau(t,z)) + 4c_3(t)\frac{\partial^3}{\partial z^3} f^{i\tau}_z S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z) + \\
& + 6c_3(t) f^{i\tau}_{zz}(S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z)) + \\
& + 4c_3(t) f^{i\tau}_z(S'''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 3}_z(t,z) + \\
& + 3S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_z(t,z)\lambda^\tau_{zz}(t,z) + S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zzz}(t,z)) + f^{i\tau}\Big] \times \\
& \times \Big[\big(S'_\delta(\lambda^\tau(t,z))\frac{\partial^4}{\partial z^4}\lambda^\tau(t,z) + S''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\big)\big(4\lambda^\tau_z(t,z)\lambda^\tau_{zzz}(t,z) + \\
& + 3{\lambda^\tau_{zz}}^2(t,z) + 6S'''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^\tau_{zz}(t,z)\lambda^{\tau 2}_z(t,z) + S''''_\delta(\lambda^\tau(t,z))\lambda^{\tau 4}_z(t,z)\big)\Big], \\
& \left(j+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le \Big(j+1\Big)\tau; \quad (3.32)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau}(0,z) = \frac{d^4}{dz^4} v^i_0(z), \quad j = 0,1,2,\ldots,(J-1),\ J\tau = T, \qquad (3.33)
$$

где $\frac{\partial^4}{\partial z^4}\lambda^\tau = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i(t,z)\frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau}(t-\frac{\tau}{3},z) + r(t,z)$, причем $r(t,z)$ содержит частные производные функций $\frac{\partial^k}{\partial z^k}\lambda(t,z)$ $(j=\overline{0,3})$ и $r_i(t,z) = -\frac{1}{B_z(\psi)}\varphi^i_t(t,0)$ — известные функции, ограниченные равномерно по τ.

Итоговая оценка четвертой производной:

$$\sum_{i=1}^{m} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^4}{\partial z^4} f^{i\tau}(t,z) \right| \le C,\ (t,x) \in G_{[0,t_5^*]}, \tag{3.34}$$

где t_5^*, $0 < t_5^* \le t_4^* \le T$.

Таким образом, в $G_{[0,t_5^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} f^{i\tau}(t,z) \right| \le C, \quad k = 0,1,\ldots,4. \tag{3.35}$$

В силу оценки (3.35), правые части уравнений (3.2)—(3.5) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0,t_5^*]$, следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$\sum_{i=1}^{m} |f_t^{i\tau}(t,z)| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t_5^*]}. \tag{3.36}$$

Дифференцируя уравнения задачи (3.2)—(3.5) по переменной z один или два раза, получим равномерные по τ оценки

$$\sum_{i=1}^{m} |f_{tz}^{i\tau}(t,z)| + \sum_{i=1}^{m} |f_{tzz}^{i\tau}(t,z)| \le C, \quad (t,z) \in G_{[0,t_5^*]},$$

что вместе с (3.29), (3.34) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы Арцела о компактности [14] некоторая подпоследовательность $\overline{f^{\tau_k}}(t,z)$ последовательности $\overline{f^{\tau}}(t,z)$ решений задачи (3.2)—(3.5) сходится вместе с производными по z до второго порядка включительно к функции $\overline{f}(t,z) \in C_{t,z}^{0,2}(G_{[0,t_5^*]})$. На основании теоремы 1.5 сходимости МСА, $\overline{f}(t,z)$ — решение задачи (3.1), причем $\overline{f}(t,z) \in C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,t_5^*]})$, где

$$C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,t_5^*]}) = \left\{ \overline{f}(t,z) \middle| \overline{f}_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k}\overline{f}(t,z) \in C(G_{[0,t_5^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

при этом

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \overline{f}(t,z) \right| \le C, \quad k = 0,1,2. \tag{3.37}$$

Пусть выполняется следующее условие при $t \in [0, t_5^*]$

$$\frac{\beta(t,z) - (\overline{v}_0(z), \overline{\varphi}_t(t,0))}{B_z(\psi)} \geq \delta. \tag{3.38}$$

Для того чтобы снять срезку в уравнении (2.6), докажем, что при $t \in [0, t_5^*]$ выполняется

$$\frac{\beta(t,z) - (\overline{f}(t,z), \overline{\varphi}_t(t,0))}{B_z(\psi)} \geq \frac{\delta}{2}.$$

Проинтегрируем (2.6) по временной переменной в пределах от 0 до t:

$$\overline{f}(t,z) = \overline{v}_0(z) + \int\limits_0^t \Psi(\eta, z) d\eta,$$

где $\Psi(t,z) = a(t)\overline{f}_{zz} + B_z(\overline{f}) S_\delta \left(\frac{\beta(t,z) - (\overline{f}(t,z), \overline{\varphi}_t(t,0))}{B_z(\psi)} \right)$.

Так как выполняется условие (2.5), тогда справедливо равенство

$$\frac{\beta(t,z) - (\overline{f}(t,z), \overline{\varphi}_t(t,0))}{B_z(\psi)} = \frac{\beta(t,z) - (\overline{v}_0(z), \overline{\varphi}_t(t,0))}{B_z(\psi)} - \\ - \frac{\left(\overline{\varphi}_t(t,0), \int_0^t \Psi(\eta,z)\right) d\eta}{B_z(\psi)}. \tag{3.39}$$

В силу выполнения условия (3.38), учитывая (3.6), (3.37), получим при $t \in \left[0, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right]$

$$\frac{\beta(t,z) - (\overline{f}(t,z), \overline{\varphi}_t(t,0))}{B_z(\psi)} \geq \delta - A(\delta) t \geq \frac{\delta}{2}.$$

Здесь $A(\delta)$ — некоторая положительная константа, которая оценивает входные данные и зависит от δ, константы C из (3.6), а также константы, ограничивающей коэффициент $a(t)$. В силу определения срезающей функции $S_\delta(\theta)$ имеем

$$S_\delta(\lambda(t,z)) = \lambda(t,z), \text{ при } t \in [0, t^*], \text{ где } t^* = \min\left(t_5^*, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right).$$

Следовательно, доказано существование решения $\overline{f}(t,z)$ задачи (1.15) в классе $C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,t^*]})$.

Теорема 3.1. *При выполнении условий* (2.5), (3.6), (3.38) *на входные данные, существует* t^**:* $0 < t^* \leq T$ *— некоторая положительная константа, зависящая от* μ *из* (2.5), *постоянных, ограничивающих функции* $a(t)$, $b(t), c_1(t)$, *и постоянных из* (3.6), *ограничивающих входные данные; такая, что существует решение* $\overline{f}(t,z)$ *задачи* (1.15) *в классе*

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ \overline{f}(t,z) \middle| \overline{f}_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k}\overline{f}(t,z) \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k=0}^{2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k}\overline{f}(t,z) \right| \leq C. \tag{3.40}$$

Поскольку существование решения доказано в области $G_{[0,t^*]}$, то будем говорить, что задача (1.15) разрешима в малом временном интервале.

3.2.2 Единственность решения прямой задачи

Единственность решения задачи (1.15) следует из доказательства тождественного равенства нулю в $G_{[0,t^*]}$ разности двух предполагаемых решений.

Теорема 3.2. *При выполнении условий* (2.5), (3.6), (3.38) *на входные данные, решение* $\overline{f}(t,z)$ *задачи* (1.15) *в классе* $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$, *удовлетворяющее соотношению* (3.40), *единственно.*

3.2.3 Существование и единственность решения обратной задачи

Аналогично рассуждениям п. 2.2.3, учитывая доказательства, приведенные в 2.3, а также в силу теорем 1.8, 1.3, 3.1 и 3.2, справедлива теорема

Теорема 3.3. *При выполнении условий* (2.5), (3.6), (3.38) *на входные данные, существует* t^**:* $0 < t^* \leq T$ *— некоторая положительная константа, зависящая от* μ *из* (2.5), *постоянных, ограничивающих функции*

$a(t)$, $b(t), c_1(t)$, и постоянных из (3.6), ограничивающих входные данные; такая, что решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ обратной задачи (2.1) — (2.3) в классе

$$Z(t^*) = \Big\{ u(t,x,z), \lambda(t,z) \mid u(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(\widetilde{G}_{[0,t^*]}),\ \lambda(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) \Big\},$$

где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(\widetilde{G}_{[0,t^*]}) = \left\{ u(t,x,z) \middle| D^\alpha_x u, \frac{\partial^k}{\partial z^k} u \in C(\widetilde{G}_{[0,t^*]}), k = 0,1,2,\ |\alpha| \le 2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению (2.56), существует и единственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе получены следующие результаты:

1. доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи для многомерного параболического уравнения в малом временном интервале в случае, когда начальное условие представимо в виде $u_0(x,z) = \omega_0(x)v_0(z)$;

2. доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи для многомерного параболического уравнения в малом временном интервале в случае, когда начальное условие представимо в виде $u_0(x,z) = \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_0^i(x)v_0^i(z)$.

Все полученные в работе результаты являются новыми и имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы для построения общей теории обратных задач.

Результаты данной работы обсуждались на научном семинаре кафедры МАиДУ ИМ СФУ (под руководством д.ф.-м.н. проф. Ю.Я. Белова), докладывались на XLII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2009), XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2010, диплом II степени), XLVIII международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2010, диплом II степени) и VII всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука» (г. Красноярск, 2011, диплом I степени).

За работу по теме дипломной работы был присужден диплом Конкурса научных студенческих и аспирантских работ по математике и механике имени академика М.А. Лаврентьева.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Ватульян, А. О. Математические модели и обратные задачи / А.О. Ватульян // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №11. – С. 143 – 148.

[2] Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов высших учебных заведений / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

[3] Аниконов, Ю. Е. О методах исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений/ Ю.Е. Аниконов // Доклады академии наук. – 1993. – Т. 331. – №3. – С. 409 – 410.

[4] Аниконов, Ю. Е. Редукция многомерных обратных задач к начально-краевым задачам в пространствах Гильберта/ Ю.Е. Аниконов, М.П. Вишневский // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35. – №3. – С. 495 – 514.

[5] Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. – Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 1999. – 236 с.

[6] Афиногенова, О. А. О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения / О.А. Афиногенова, Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 424. – № 4. – С. 439 – 441.

[7] Белов, Ю. Я. О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой / Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Специальный выпуск журнала «Вычислительные технологии», посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко. – 2006. – Т. 11. – Ч. 1. – С. 46 – 54.

[8] Белов, Ю. Я. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т. 404. – №5. – С. 583 – 585.

[9] Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New York: Marcel Dekker, 2000.

[10] Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко – Новосибирск, 1967. – 195 с.

[11] Ильин, А. М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17. – №3. – С. 3 – 146.

[12] Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

[13] Самарский, А. А. Уравнения математической физики / А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1977.

[14] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функциального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин; 6-е изд. – М.: Наука, 1989. – 624с.

[15] Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература» / И.П. Натансон; 3-е изд. – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 560 с.

[16] Романенко, Г. В. Представление решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения / Г.В. Романенко, И.В. Фроленков // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. – С. 63.

[17] Романенко, Г. В. О представление решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения / Г.В. Романенко // Труды XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам – Красноярск, ИПК СФУ, 2010. – С. 97 – 101.

[18] Романенко, Г. В. Представление решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / Г.В. Романенко, И.В. Фроленков // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2011. – С. 60.