ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Сибирский федеральный университет»

Институт математики

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Майнагашева Антонина Савельевна

Об одной задаче идентификации функции источника многомерного параболического уравнения

Бакалаврская работа

Допустить к защите —
зав. кафедрой
доктор физико-математических
наук, профессор
Ю.Я. Белов

Подпись:

Научный руководитель
кандидат физико-математических
наук, И.В. Фроленков

Подпись:

Красноярск 2009

Содержание

Введение

Все задачи делятся на два типа: прямые задачи и обратные задачи. Прямые задачи — это задачи, в которых известны условия и нужно найти следствие. Обратные — это задачи, в которых по следствию нужно найти условия (причины).

При изучении физических объектов или явлений экспериментальными методами типична ситуация, когда интересующие исследователя количественные характеристики объекта недоступны для непосредственного наблюдения. Или проведение самого эксперимента вообще невозможно по каким-либо причинам.

В некоторых задачах для диагностики объектов (например, для их внутренней структуры) требуются математическая обработка интерпретация результатов наблюдения. Речь идет о задачах, в которых требуется определить причины, если известны следствия. Например, определить место и мощность землетрясения по измеренным на поверхности земли колебаниям. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, можно ставить проблему идентификации математической модели, например, определение коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, границы области, граничных или начальных условий и т.д. Такие задачи относятся к классу обратных задач математической физики и в настоящий момент во всем мире играют большую роль в естественных науках и их приложениях.

Пример1. Процесс радиоактивного распада описывается физическим законом, заключающимся в том, что скорость распада пропорциональна количеству радиоактивного вещества, имеющемуся в данный момент времени. Коэффициент пропорциональности α, являющийся характерной для данного вещества постоянной, называется коэффициентом распада. Таким образом, математическая модель процесса радиоактивного распада описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\alpha m(t), \quad t \geqslant t_0, \quad m(t_0) = M,$$

где $m(t)$ — количество вещества в данный момент времени, а M — количество радиоактивного вещества в начальный момент времени. Если постоянные α и M известны, то, решив задачу Коши, мы можем определить, как будет меняться количество радиоактивного вещества с течением времени. Обратная задача для исследуемого процесса состоит в следующем. Вид радиоактивного вещества, т.е. постоянная α и его первоначальное количество M неизвестны, но из эксперимента можно определить количество радиоактивного вещества $m(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$. Требуется по функции $m(t)$, заданной при $t \in [t_1, t_2]$, определить постоянные α и M. Таким образом, обратная задача заключается в определении коэффициентаα и начальных данных M по дополнительной информации о решении $m(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$.

Пример2. Краевая задача для уравнения теплопроводности

$$cu_t = (ku_x)_x - qu + f, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$u(t,0) - \lambda_1 u_x(t,0) = \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(t,l) - \lambda_2 u_x(t,l) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Является математической моделью многих физических процессов. Коэффициенты, входящие в уравнение и граничные условия, представляют собой некоторые эффективные характеристики исследуемого процесса. В том числе, когда поставленная задача описывает процесс распространения тепла в стержне, коэффициенты c и k являются соответственно коэффициентами теплоемкости и теплопроводности и характеризуют материал, из которого изготовлен стержень. Теплофизическую интерпретацию имеют также все остальные функции, входящие в уравнение, краевые и начальные условия. В рамках данной математической модели температура в стержне в точке x и момент времени t — функция $u(t,x)$, являющаяся решением поставленной задачи, определяется величинами $c, k, q, f, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \varphi$ — характеристиками теплофизического процесса. В том случае, когда все эти величины заданы, решив прямую задачу, можно найти $u(t,x)$, т.е. определить характер процесса распространения тепла в стержне. Однако во многих реальных теплофизических процессах те или иные характеристики среды неизвестны, но из эксперимента можно получить дополнительную информацию о температуре. Например, все коэффициенты и функции известны, кроме коэффициента теплопроводности $k(x)$. Из эксперимента, установив датчик в точке x_0, определяется функция $g(t) = u(t,x_0)$ — температура в некоторой внутренней точке стержня — как функция от времени. Таким образом, возникает обратная задача: определить коэффициент теплопроводности $k(x)$, если задана функция $g(t)$. Можно рассмотреть случаи, когда неизвестны другие коэффициенты или несколько коэффициентов одновременно. Нужно отметить, что многообразие обратных задач определяется не только многими возможными неизвестными величинами, но и различными типами задания дополнительной информации, т.е. характером проведения эксперимента.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, границы области, граничных или начальных условий. Неизвестные элементы начально-краевых задач определяются по некоторой дополнительной информации. Такой информацией служат различного рода условия переопределения. Многие важные прикладные вопросы, касающиеся упругих смещений, электромагнитных колебаний, диффузионных процессов, геофизики, сейсмологии, компьютерной томографии, геотомографии, диагностики плазмы, квантовой теории рассеяния, подводной акустики, квазиоптики, дифракции, теории колебаний молекул, георадиолокации, геофизической нейтронометрии, графиметрии и др. приводят к обратным задачам.

При обработке данных натуральных экспериментов по дополнительным косвенным измерениям делается вывод о внутренних связях явления или процесса. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, можно ставить проблему идентификации математической модели, например, определение коэффициентов дифференциальных уравнений. Такие задачи относятся к классу обратных задач математической физики и во всем мире играют большую роль в естественных науках и их приложениях.

Исследованиям различных многомерных обратных задач были посвящены работы: Романова В.Г., Аниконова Ю.Е., Кожанова А.И., Булова Ю.Я. и его учеников.

Ранее, мной была исследована задача идентификации функции источника параболического уравнения.

В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \,|\, 0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in E_1\}$ рассматривается уравнение

$$u_t = a^2(t)u_{xx} + \lambda(t)f(t,x), \tag{0.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{0.2}$$

с условиями переопределения заданными на гладкой кривой

$$u(t,\gamma(t)) = \varphi(t), \quad \gamma(t) \in C^1[0,T], \tag{0.3}$$

Пусть выполняется условие

$$|f(t,\gamma(t))| \geqslant \delta > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{0.4}$$

где δ — некоторая фиксированная постоянная. Это условие является условием неравенства нулю коэффициента $\lambda(t)$.

Обратная задача приводится к прямой задаче

$$u_t^\theta(t,x) = a^2(t)u_{xx}^\theta(t,x)+$$
$$+\frac{\varphi'(t) - u_x^\theta(t-\theta,\gamma(t))\gamma'(t) - a^2(t)u_{xx}^\theta(t-\theta,\gamma(t))}{f(t,\gamma(t))}f(t,x),$$

$$u^\theta(t,x)|_{t\leqslant 0} = u_0(x), \quad x\in E_1.$$

Относительно входных данных, предположим, что они достаточно гладкие, и имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему

$$|\varphi'|+|\varphi|+|\gamma'|+|\gamma|+\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(t,x)\right|+\left|\frac{d^k}{dx^k}u_0(x)\right|\leqslant C, \quad k=1,...,4, \tag{0.5}$$

$$(t,x)\in G_{[0,T]}, C - \text{постоянная}$$

Пусть также выполняется следующее условие при $(t,x)\in G_{[0,T]}$

$$\sum_{k=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x)\right|+|\lambda(t)|\leqslant C. \tag{0.6}$$

Доказана теорема существования и единственности решения $u(t,x)$, $\lambda(t)$ задачи (0.1)–(0.3) в классе гладких ограниченных функций, удовлетворяющее соотношению (0.6).

Цель моей бакалаврской работы заключается в том, чтобы доказать существование и единственность решения в классе гладких ограниченных функций.

1 Вспомогательные предложения

В этой главе приводятся некоторые обозначения и теоремы, которые используются в дальнейшем изложении.

1.1 Некоторые обозначения

Обозначим символом E_n n-мерное евклидово пространство действительных чисел. Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном пространстве E_n. Точку в E_n будем обозначать символом $x = (x_1, ..., x_n)$. Символ $\partial\Omega$ обозначает границу области Ω. Предполагается, что в каждой точке $x \in \partial\Omega$ (за исключением, быть может, множества меры ноль точек) определен вектор внешней нормали.

Замыкание множества Ω обозначим как $\overline{\Omega}$.

Пусть α — мультииндекс, то есть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где α_i — целые неотрицательные числа и $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Под обозначением $D_x^\alpha f(x)$ будем понимать частную производную функции $f(x)$ порядка $|\alpha|$:

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_1^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Символом $C^k(\Omega)$ будем обозначать совокупность всех k-раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на Ω. При $k = 0$ вместо $C^0(\Omega)$ будем писать $C(\Omega)$. Если в $C^k(\Omega)$ ввести норму

$$||f|| = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \max_{x \in \Omega} |D_x^\alpha f(x)|,$$

то пространство $C^k(\Omega)$ превращается в банахово пространство.

Под $C^{k,l}_{t,x}(\Omega)$ будем понимать множество функций, непрерывно дифференцируемых в Ω по t до порядка k включительно, по x — до порядка l включительно. Символом $C^{k,l,m}_{t,x,z}(\Omega)$ будем обозначать множество функций, непрерывно дифференцируемых в Ω по t до порядка k включительно, по x — до порядка l включительно и по z до порядка m включительно.

1.2 Неравенство Гронуолла

Лемма 1.2.1 *Пусть неотрицательная, измеримая и ограниченная на отрезке* $[0, t^*]$ *функция* $y(t)$ *удовлетворяющая неравенству*

$$y(t) \leqslant C + \int\limits_0^t (A + By(\tau))\, d\tau,$$

где постоянные $A, B, C \geqslant 0$. *Тогда, если* $B > 0$, *при* $0 \leqslant t \leqslant t^*$ *имеет место оценка*

$$y(t) \leqslant Ce^{Bt} + \frac{A}{B}(e^{Bt} - 1).$$

Если $B = 0$, *то*

$$y(t) \leqslant C + At.$$

1.3 Теорема Арцела

Пусть M — некоторое бесконечное множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций ($M \in C(\overline{\Omega})$).

Определение 1.1 *Множество* M *нормированного пространства* X *называется компактным в* X, *если из каждой последовательности* $\{x_n\} \subset M$ *можно выделить фундаментальную подпоследовательность.*

Определение 1.2 *Говорят, что функции множества* M *равномерно ограничены в* $C(\overline{\Omega})$, *если существует постоянная* K, *такая, что* $||f||_{C(\overline{\Omega})} \leqslant K$ *для всех* $f \in M$.

Определение 1.3 *Говорят, что функции множества* M *равностепенно непрерывны в* $\overline{\Omega}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *такое, что для любых* $x', x" \in \overline{\Omega}$, *удовлетворяющих неравенству* $|x' - x < \delta$, *имеет место неравенство* $|f(x') - f(x")| < \varepsilon$, *выполняющееся сразу для всех* $f \in M$.

Теорема 1.3.1 (Арцела) *Для того, чтобы множество* $M \subset C(\overline{\Omega})$ *было компактно в* $C(\overline{\Omega})$, *необходимо и достаточно, чтобы функции из* M *были равномерно ограничены в* $C(\overline{\Omega})$ *и равностепенно непрерывны в* $\overline{\Omega}$.

1.4 Принцип максимума для параболического уравнения второго порядка

Пусть $T > 0$ — $const$, $S_T = [0, T] \times \partial\Omega$, $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ и Ω — ограниченная область пространства E_n с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим в Q_T линейное уравнение

$$L(u) = f, \tag{1.1}$$

где дифференциальный оператор L имеет вид

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t}$$

и коэффициенты a_{ij}, b_i, c и правая часть f уравнения (1.1) — вещественные конечнозначные функции переменных t, x.

Считаем, что $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$, $i, j = 1, ..., n$, и выполняется соотношение

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j, \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T \setminus \Gamma_T \tag{1.2}$$

при любых значениях $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in E_n$.

Определение 1.4 *Функция u называется классическим решением уравнения* (1.1) *в* $\overline{Q}_T$, *если ее производные* $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $i, j = 1, ..., n$, *непрерывны в* $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$, *сама функция* $u(t,x)$ *непрерывны в* $\overline{Q}_T$ *и в* $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ *выполняется тождество* $L(u(t,x)) = f(t,x)$.

Теорема 1.4.1 *Пусть классическое решение* $u(t,x)$ *уравнения* (1.1) *удовлетворяет условию*

$$|u(t,x)| \leqslant q \quad \text{при} \quad (t,x) \in \Gamma_T.$$

Пусть f *— ограниченная функция, а коэффициент* c *ограничен сверху:*

$$|f(t,x)| \leqslant N, \quad c(t,x) \leqslant M \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T; \quad N, M = const \geqslant 0.$$

Тогда всюду в $\overline{Q}_T$ *выполняется неравенство*

$$|u(t,x)| \leqslant e^{Mt}(Nt + q). \tag{1.3}$$

Теорема 1.4.2 *Пусть функция* $u(t,x)$ *в* $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)\,|\,0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in E_n\}$ *непрерывна и ограничена снизу:*

$$-d < u(t,x), \quad d = const > 0$$

а в $\Pi_{(0,T]}$*б имеет все непрерывные производные, входящие в оператор* L*, и удовлетворяет неравенству* $L(u) \leqslant 0$*. Пусть коэффициенты* a_{ij}*,* b_i*,* c *удовлетворяют соотношениям*

$$|a_{ij}(t,x)| \leqslant M(|x|^2 + 1), \quad |b_i(t,x)| < M(|x|^2 + 1)^{1/2},$$

$$|c(t,x)| < M, \quad M = const > 0.$$

Тогда $u(t,x) \geqslant 0$ *всюду в* $\Pi_{[0,T]}$*, если* $u \geqslant 0$ *при* $t = 0$*.*

Рассмотрим для уравнения (1.1) задачу Коши: найти непрерывную в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)\,|\,0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in E_n\}$ функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую в $\Pi_{(0,T]}$ уравнению (1.1) и при $t = 0$ совпадающую с заданной на E_n функцией φ:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in E_n. \tag{1.4}$$

Теорема 1.4.3 *Пусть функция* $u(t,x)$ *— классическое ограниченное решение задачи Коши* (1.1), (1.4)*, коэффициенты* a_{ij}*,* b_i *оператора* L *подчинены условиям теоремы* 1.2.1 *и выполняются соотношения*

$$|\varphi(x)| \leqslant q, \quad x \in E_n,$$

$$|f(t,x)| \leqslant N, \quad c(t,x) \leqslant M, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \leqslant e^{Mt}(Nt + q).$$

1.5 Общая формулировка метода слабой аппроксимации

В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + L(t)u = f(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = u_0, \tag{1.5}$$

где $L(t)$ — нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор с переменной областью определения $D(L(t))$, причем при каждом фиксированном $t \in [), T]$ оператор $L(t)$ отображает $D(L(t))$ в $\mathfrak{B}$.

Пусть $L = \sum_{i=1}^m L_i$, $f = \sum_{i=1}^m f_i$ и $\cap_{i=1}^m D(L_i(t)) \subseteq D(L(t))$. Мы считаем, что операторы $L_i(t)$ отображают $D(L_i(t))$ в $\mathfrak{B}$ и функции $f_i(t) \in \mathfrak{B}$, $i = 1, ..., m$.

Наряду с задачей (1.5) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ:

$$\frac{du^\tau}{dt} + L_\tau(t)u^\tau = f_\tau(t), \quad t \in [0,T], \quad u^\tau(0) = u_0. \tag{1.6}$$

Здесь

$$L_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\tau,t)L_i(t), \quad f_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i(\tau,t)f_i(t),$$

а функции $\alpha_i(\tau,t)$, $\beta_i(\tau,t)$ слабо аппроксимируют единицу, то есть для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ при $\tau \to 0$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (\alpha_i(\tau,t) - 1)\, dt \to 0, \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} (\beta_i(\tau,t) - 1)\, dt \to 0.$$

Метод решения задачи (1.5), при котором в качестве приближенных решений u^τ, $\tau > 0$ берутся решения задачи (1.6) и решение u задачи (1.5) находится как предел при $\tau \to 0$ решений

u^τ ($u = \lim_{\tau\to 0} u^\tau$), vs будем называть *методом слабой аппроксимации.*

Часто коэффициенты $\alpha_i(\tau,t)$, $\beta_i(\tau,t)$ выбираются в виде

$$\alpha_i(\tau,t) = \beta_i(\tau,t) = \begin{cases} m, & (n+\dfrac{i-1}{m})\tau < t \leqslant (n+\dfrac{i}{m})\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
$$n = 0, 1, ..., N-1.$$

В этом случае нахождение решения u^τ задачи (1.6) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_1(t)u^\tau = mf_1(t), \quad t \in \big(0, \frac{\tau}{m}\big], \quad u^\tau(0) = u_0, \text{—первый дробный шаг,}$$

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_2(t)u^\tau = mf_2(t), \quad t \in \big(\frac{\tau}{m}, \frac{2\tau}{m}\big], \text{—второй дробный шаг.}$$

В качестве начальных данных на этом шаге берется значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t = \frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $\big(\frac{2\tau}{m}, \frac{3\tau}{m}\big]$,..., $\big(\frac{(m-1)\tau}{m}, \tau\big]$. Тем самым находят решение на полуинтервале $(0,\tau]$ — нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на множестве $[\tau, 2\tau]$ — первом целом шаге, затем — на множестве $[2\tau, 3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов (это число равно N) решение u^τ находят на отрезке $[0,T]$. Задачу (1.6) называют *расщеплением задачи* (1.5).

В тех случаях, когда все операторы L_i имеют более простую структуру, чем оператор L, построение и исследование различных свойств решения задачи (1.6) проще, чем аналогичное исследование задачи (1.5). Так в некоторых нелинейных задачах только расщепление позволяет получить априорные оценки, достаточные для доказательства теорем существования.

1.6 Теорема сходимости метода слабой аппроксимации

В полосе $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x)\,|\,t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x \in E_n\}$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t,x,\overline{u}). \tag{1.7}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1(t,x), ..., u_l(t,x))$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_l)$ — вектор функции размерности l $(l \geqslant 0)$. Через $\overline{u} = (v_0, v_1, ..., v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом: $v_0 = u = (u_1, ..., u_l)$; v_1 — вектор, составленный их всех производных порядка r по x от u. Таким образом,

$$\overline{u} = \left(u_1, ..., u_l, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u_l}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r}, ..., \frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r}\right)$$

и система уравнений (1.7) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно $(r \geqslant 0)$.

Мы предполагаем, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m}, \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^{m} \varphi_j^i, \quad j = 1, ..., l,$$

где φ^i — вектор-функции размерности l; φ_j, φ_j^i — j-е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\tau}(t)\varphi_i(t,x,\overline{u}^\tau), \tag{1.8}$$

где функции $a_{i,\tau}$ определены следующим соотношением

$$\alpha_{i,\tau} = \begin{cases} m, & t_0 + \big(n + \dfrac{i-1}{m}\big)\tau < t \leqslant t_0 + \big(n + \dfrac{i}{m}\big)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$n = 0, 1, ..., N-1; \; \tau N = t_1 - t_0.$$

Система (1.8) слабо аппроксимирует систему (1.7).

Наконец рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau), \tag{1.9}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \overline{u}^\tau)$, зависящие от τ.

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.7), ((1.8), (1.9)). Под классическим решением уравнения (1.8) ((1.9)) мы понимаем функцию u^τ, непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.8) ((1.9)), обладающую кусочно непрерывной производной u^τ_t в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]}$ (u^τ_t может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = (n + i/m)\tau$; $n = 0, 1, ..., N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$; $j = 0, 1, ..., m-1$) и удовлетворяющую уравнению (1.8) ((1.9)) в $\Pi_{[t_0,t_1]}$.

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1.6.1 *Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau)$ на классических решениях $\overline{u}^\tau$ системы уравнений* (1.9) *непрерывны по переменным* $(t, x) \in \Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}(0 < \tau \leqslant \tau_0)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$.

Через $u^{\tau_k}(t,x)$ обозначим решение системы (1.9) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 1.6.2 *Пусть при всех* $\tau_k > 0$ *классическое решение* u^{τ_k} *системы* (1.9) *существует и при* $\tau_k \to 0$ *равномерно в*

$$\Pi^N_{[t_0,t_1]} = \{(t,x)\,|\, t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ |x| \leqslant N\},$$

последовательность u^{τ_k} *сходится к некоторой вектор-функции и вместе со всеми производными по* x*, входящими в (1.7), причем*

$$\max_{\Pi^N_{[t_0,t_1]}} |\varphi_i(t,x,\overline{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t,x,\overline{u}^{\tau_k})| \to 0, \tag{1.10}$$

$$\tau_k \to 0, \quad i = 1,...,m.$$

Теорема 1.6.1 *Пусть выполняются условия* 1.6.1, 1.6.2*. Тогда вектор-функция* $u(t,x)$ *есть решение системы* (1.7) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

2 Задача идентификации функции источника многомерного параболического уравнения

2.1 Разрешимость задачи Коши

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \,|\, 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\}$ уравнение

$$u_t(t,x,z) = \Delta u(t,x,z) + u_{zz}(t,x,z) + \lambda(t,x) f(t,x,z), \tag{2.1}$$

где $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$, с начальными данными

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad (x,z) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2.2}$$

Функция $\lambda(t,x)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t,x,\gamma(t)) = \varphi(t,x), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^n, \gamma(t) \in C^1[0,T]. \tag{2.3}$$

Пусть выполняется условие согласования

$$u_0(x,\gamma(0)) = \varphi(0,x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Все входные данные в поставленной задаче считаем действительнозначными функциями.

Пусть также выполняется условие

$$|f(t,x,\gamma(t))| \geqslant \delta > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

2.2 Переход от обратной задачи к прямой

Приведем задачу (2.1)–(2.3) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Для этого положим в уравнении (2.1) $z = \gamma(t)$, используя условие (2.3), получим

$$u_t(t,x,\gamma(t)) = \Delta u_{x_i x_i}(t,x,\gamma(t)) + u_{zz}(t,x,\gamma(t)) + \lambda(t,x) f(t,x,\gamma(t)),$$

$$u_t(t,x,\gamma(t)) + u_z(t,x,\gamma(t))\gamma'(t) = \varphi_t'(t,x).$$

Отсюда находим

$$\lambda(t,x) = \\ = \frac{\varphi_t'(t,x) - u_z(t,x,\gamma(t))\gamma'(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(t,x,\gamma(t)) - u_{zz}(t,x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(t,x,\gamma(t)) = \Delta\varphi(t,x)$, обозначим $\psi(t,x) = \varphi_t'(t,x) - \Delta\varphi(t,x)$, где $\psi(t,x)$ — известная функция.

Отсюда следует

$$\lambda(t,x) = \frac{\psi(t,x) - u_z(t,x,\gamma(t))\gamma'(t) - u_{zz}(t,x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))}, \qquad (2.6)$$

Заметим, что знаменатель выражения (2.6) не обращается в ноль в силу условия (2.5).

Таким образом, функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x,z) = \Delta u(t,x,z) + u_{zz}(t,x,z) + \\ + \frac{\psi(t,x) - u_z(t,x,\gamma(t))\gamma'(t) - u_{zz}(t,x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))} f(t,x,z). \quad (2.7)$$

Докажем классическую разрешимость задачи (2.7), (2.2).

2.3 Разрешимость прямой задачи

Для доказательства существования решения задачи (2.7), (2.2) применим метод слабой аппроксимации. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t - \frac{\tau}{2})$ на втором дробном шаге в нелинейных членах.

$$u^\tau_t(t,x,z) = 2\Delta u^\tau(t,x,z) + 2u^\tau_{zz}(t,x,z),\ t \in \left(j\tau, \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau\right] \quad (2.8)$$

$$u^\tau_t(t,x,z) = 2\frac{\psi(t,x) - u^\tau_z(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))\gamma'(t) - u^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))}\cdot$$
$$\cdot f(t,x,z), \quad t \in \left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, (j+1)\tau\right] \quad (2.9)$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R}. \qquad (2.10)$$

Здесь $j = 0,1,\ldots,N-1$; $\tau(N-1) = T$; $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t,x,z)$.

Множества вида $(j\tau,(j+1)\tau]$, $j = 0,1,\ldots,N-1$, будем называть j-м целым временным шагом. Множества вида $\left(\left(j+\frac{k-1}{2}\right)\tau, \left(j+\frac{k}{2}\right)\tau\right]$, $k = 1,2$, будем называть k-м дробным шагом j-го целого шага.

Введем следующие обозначения:

$$U^\tau(t) = \sum_{k=0}^{6} U^\tau_k(t), \qquad (2.11)$$

$$U^\tau_k(t) = \sup_{n\tau<\xi\leqslant t\leqslant(n+1)\tau}\ \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi,x,z)\right|, U_k(0) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right|. \qquad (2.12)$$

Функции $U^\tau(t)$ и $U^\tau_k(t)$ являются неотрицательными и неубывающими на каждом полуинтервале $(j\tau,(j+1)\tau]$, $j = 0,1,\ldots,N-1$.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения и удовлетворяют им

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\right| + \left|D_x^\alpha \varphi(t,x)\right| \leqslant C, \qquad |\alpha| \leqslant 4, \tag{2.13}$$

$$\sum_{k=0}^{6}\left(\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,x,z)\right|\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{4}\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant 4}\left(\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha f(t,x,z)\right|\right) \leqslant C, \tag{2.14}$$
$$(t,x,z)\in G_{[0,T]}, \quad C \text{ — постоянная больше единицы.}$$

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x,z)$ задачи (2.8) – (2.10) в классе гладких, ограниченных функций.

Рассмотрим целый нулевой шаг ($j=0$).

На первом дробном шаге для решения u^τ задачи

$$u_t^\tau = 2\Delta u^\tau(t,x,z) + 2u_{zz}^\tau(t,x,z), \qquad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}$$
$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z),$$

в силу принципа максимума получаем

$$|u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} |u_0(x,z)|, \qquad 0<\xi\leqslant\frac{\tau}{2}. \tag{2.15}$$

Продифференцируем уравнения (2.8), (2.10) по z, k раз, где $k=\overline{1,6}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right) = 2\frac{\partial^k}{\partial z^k}\Delta u^\tau(t,x,z) + 2\left(\frac{\partial^{k+2}}{\partial z^{k+2}}u^\tau(t,x,z)\right),$$

в силу принципа максимума получаем оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right|, \quad \text{где} \quad k=\overline{1,6}, \quad 0<\xi\leqslant\frac{\tau}{2} \tag{2.16}$$

Возьмем от левых частей неравенств (2.15), (2.16) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}$, а затем $\sup\limits_{n\tau<\xi\leqslant t\leqslant(n+1)\tau}$, и сложим полученные неравенства. Используя обозначения (2.11), (2.12), получим

$$U^\tau(t)\leqslant U(0), \quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{2}. \tag{2.17}$$

На втором дробном шаге, интегрируя по временной переменной в пределах от $\frac{\tau}{2}$ до t уравнение

$$u_t^\tau(t,x,z)=2\frac{\psi(t,x)-u_z^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))\gamma'(t)-u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))}\cdot \\ \cdot f(t,x,z), \quad \frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau,$$

получим равенство

$$u^\tau(t,x,z)=u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)+ \\ +2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\frac{\psi(\theta,x)-u_z^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\gamma'(\theta)-u_{zz}^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))}{f(\theta,x,\gamma(\theta))}\cdot \\ \cdot f(\theta,x,z)\,d\theta.$$

Из последнего соотношения следует неравенство

$$|u^\tau(t,x,z)| \leqslant |u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)| +$$
$$+ 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \frac{|\psi(\theta,x)| + |u_z^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))|\,|\gamma'(\theta)| + |u_{zz}^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))|}{|f(\theta,x,\gamma(\theta))|}\cdot$$
$$\cdot\,|f(\theta,x,z)|\,d\theta.$$

Поскольку данное неравенство выполняется при всех x, z, заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$, получим

$$|u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \Big|u^\tau\Big(\frac{\tau}{2},x,z\Big)\Big| + \frac{2C}{\delta}\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 1 + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|u_z^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\Big| +$$
$$+ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|u_{zz}^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\Big|\,d\theta, \quad t\in\Big(\frac{\tau}{2},\tau\Big].$$

Заменим функцию $|u^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}|u^\tau|$, получим

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}|u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\Big|u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\Big| +$$
$$+\frac{2C}{\delta}\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 1 + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|u_z^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\Big| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|u_{zz}^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\Big|\,d\theta.$$

Используя обозначение (2.11) и (2.12), получим

$$U_0^\tau(t) \leqslant U_0\Big(\frac{\tau}{2}\Big) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + U_1(\theta-\frac{\tau}{2}) + U_2(\theta-\frac{\tau}{2})\,d\theta.$$

Продифференцировав неравенство k раз по z и проделав аналогичные рассуждения, получим

$$U_k^\tau(t) \leqslant U_k\Big(\frac{\tau}{2}\Big) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + U_1(\theta - \frac{\tau}{2}) + U_2(\theta - \frac{\tau}{2})\, d\theta, \quad k = \overline{1,6}$$

$$U^\tau(t) \leqslant U(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + U^\tau\Big(\theta - \frac{\tau}{2}\Big)\, d\theta,$$

в силу оценки (2.17) получаем

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) + C\int\limits_{0}^{\tau} 1 + U^\tau\Big(\theta - \frac{\tau}{2}\Big)\, d\theta. \tag{2.18}$$

Используем неравенство

$$U^\tau(\theta - \frac{\tau}{2}) \leqslant U(0), \quad \text{при} \quad \theta \in \Big(\frac{\tau}{2}, t\Big], \quad t \in \Big(\frac{\tau}{2}, t\Big]$$

получим

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) + C\int\limits_{0}^{\tau} [U(0) + 1]\, d\theta,$$

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) + C\tau[U(0) + 1]$$

Преобразуем его

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) + C\tau[U(0) + 1] + 1 - 1.$$

$$U^\tau(t) \leqslant [U(0) + 1](1 + C\tau) - 1 \leqslant [U(0) + 1]e^{C\tau} - 1.$$

Проделывая аналогичные рассуждения на следующем временном шаге $t \in (\tau, 2\tau]$, получим

$$U^\tau(t) \leqslant ([U(0) + 1]e^{C\tau} - 1 + 1)e^{C\tau} - 1.$$

Преобразуем данное неравенство

$$U^\tau(t) \leqslant [U(0)+1]e^{2C\tau} - 1.$$

Через конечное число шагов на временном шаге $t \in ((N-1)\tau, N\tau], \quad (N\tau = T)$ получим оценку

$$U^\tau(t) \leqslant [U(0)+1]e^{CT} - 1,$$

отсюда следует

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau\right| \leqslant C \quad — \quad \text{равномерно по} \quad \tau, \quad k = \overline{0,6} \tag{2.19}$$

Продифференцируем задачу (2.8)–(2.10) по переменной x_i, и заменим $v^\tau(t,x,z) = u^\tau_{x_i}(t,x,z)$, $v_0(x,z) = \frac{\partial}{\partial x_i} u_0(x,z)$. Получим на $v^\tau(t,x,z)$ задачу

$$v^\tau_t(t,x,z) = 2\Delta v^\tau(t,x,z) + 2v^\tau_{zz}(t,x,z), \qquad t \in \left(j\tau, \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau\right] \tag{2.20}$$

$$v^\tau_t(t,x,z) = 2\frac{\psi_{x_i}(t,x) - v^\tau_z(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))\gamma'(t) - v^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))} \cdot f(t,x,z) + 2F^\tau_1(t,x)G_1(t,x,z), \qquad t \in \left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, (j+1)\tau\right] \tag{2.21}$$

$$v^\tau(0,x,z) = v_0(x,z), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{2.22}$$

где

$$F^\tau_1(t,x) = \frac{\psi(t,x) - u^\tau_z(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))\gamma'(t) - u^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))},$$

$$G_1(t,x,z) = f_{x_i}(t,x,z) - \frac{f(t,x,z)f_{x_i}(t,x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))}$$

Введем следующие обозначения

$$V^\tau(t) = \sum_{k=0}^{4} V_k^\tau(t), \tag{2.23}$$

$$V_k^\tau(t) = \sup_{n\tau<\xi\leqslant t\leqslant(n+1)\tau} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} v^\tau(\xi,x,z)\right|, \quad V_k(0) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} v_0(x,z)\right|. \tag{2.24}$$

Функции $V^\tau(t)$ и $V_k^\tau(t)$ являются неотрицательными и неубывающими на каждом полуинтервале $(j\tau,(j+1)\tau]$, $j = 0,1,\ldots,N-1$.

В силу неравенств (2.14) и (2.19), следующие величины ограничены равномерно по τ в $G_{[0,T]}$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha G_1(t,x,z)\right| + \left|F_1^\tau(t,x)\right| \leqslant C, \qquad |\alpha| \leqslant 3, \quad k = \overline{0,4} \tag{2.25}$$

Рассмотрим целый нулевой шаг ($j = 0$). На первом дробном шаге для решения v^τ задачи

$$v_t^\tau = 2\Delta v^\tau(t,x,z) + 2v_{zz}^\tau(t,x,z), \qquad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}$$

$$v^\tau(0,x,z) = v_0(x,z),$$

в силу принципа максимума получаем

$$|v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} |v_0(x,z)|, \qquad 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{2}. \tag{2.26}$$

Аналогично, дифференцируя уравнения (2.20), (2.22) по z, k раз, где $k=\overline{1,4}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}v^\tau(t,x,z)\right)=2\frac{\partial^k}{\partial z^k}\Delta v^\tau(t,x,z)+2\left(\frac{\partial^{k+2}}{\partial z^{k+2}}v^\tau(t,x,z)\right),$$

в силу принципа максимума получим оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}v^\tau(\xi,x,z)\right|\leqslant\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}v_0(x,z)\right|,$$

$$\text{где}\quad k=\overline{1,4},\quad 0<\xi\leqslant\frac{\tau}{2} \tag{2.27}$$

Возьмем от левых частей неравенств (2.26), (2.27) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}$, а затем $\sup\limits_{n\tau<\xi\leqslant t\leqslant(n+1)\tau}$, и сложим полученные неравенства. Используя обозначения (2.23), (2.24), получим

$$V^\tau(t)\leqslant V(0),\quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{2}. \tag{2.28}$$

На втором дробном шаге, интегрируя по временной переменной в пределах от $\frac{\tau}{2}$ до t уравнение

$$v_t^\tau(t,x,z)=2\frac{\psi_{x_i}(t,x)-v_z^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))\gamma'(t)-v_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))}\cdot$$
$$\cdot f(t,x,z)+2F_1^\tau(t,x)G_1(t,x,z),\quad \frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau,$$

получим равенство

$$v^\tau(t,x,z)=v^\tau\left(\frac{\tau}{2},x,z\right)+$$
$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left[\frac{\psi_{x_i}(\theta,x)-v_z^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\gamma'(\theta)-v_{zz}^\tau(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))}{f(\theta,x,\gamma(\theta))}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot f(\theta,x,z)+F_1^\tau(\theta,x)G_1(\theta,x,z)\right]d\theta.$$

Отсюда следует неравенство

$$|v^\tau(t,x,z)| \leqslant |v^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)| +$$

$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big[\frac{|\psi_{x_i}(\theta,x)| + |v^\tau_z(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))|\,|\gamma'(\theta)| + |v^\tau_{zz}(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))|}{|f(\theta,x,\gamma(\theta))|}\cdot$$

$$\cdot\,|f(\theta,x,z)| + \Big|F^\tau_1(\theta,x)\Big|\Big|G_1(\theta,x,z)\Big|\Big]\,d\theta.$$

Поскольку данное неравенство выполняется при всех x, z, заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$, получим

$$|v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \Big|v^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\Big| + \frac{2C}{\delta}\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 1 + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|v^\tau_z(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\Big| +$$

$$+\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|v^\tau_{zz}(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\Big|\,d\theta,\quad t\in\big(\frac{\tau}{2},\tau\big].$$

Заменим функцию $|v^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} |v^\tau|$, получим

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}|v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\Big|v^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\Big| +$$

$$+\frac{2C}{\delta}\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 1 + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|v^\tau_z(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\Big| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|v^\tau_{zz}(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\Big|\,d\theta.$$

Используя обозначение (2.23) и (2.24), получим

$$V^\tau_0(t) \leqslant V_0(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + V_1(\theta-\frac{\tau}{2}) + V_2(\theta-\frac{\tau}{2})\,d\theta.$$

Продифференцировав неравенство k раз и проделав аналогичные рассуждения, получим

$$V_k^\tau(t) \leqslant V_k(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + V_1(\theta - \frac{\tau}{2}) + V_2(\theta - \frac{\tau}{2})\, d\theta, \quad k = \overline{1,4}$$

$$V^\tau(t) \leqslant V(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + V^\tau(\theta - \frac{\tau}{2})\, d\theta,$$

в силу оценки (2.28) получаем

$$V^\tau(t) \leqslant V(0) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + V^\tau\Big(\theta - \frac{\tau}{2}\Big)\, d\theta. \qquad (2.29)$$

$$V^\tau\big(\theta - \frac{\tau}{2}\big) \leqslant V(0), \quad \text{при} \quad \theta \in \Big(\frac{\tau}{2}, t\Big], \quad t \in \big(\frac{\tau}{2}, \tau\big],$$

подставим в (2.29), возьмем интеграл и получим

$$V^\tau(t) \leqslant V(0) + C\tau[V(0) + 1].$$

Преобразуем его

$$V^\tau(t) \leqslant V(0) + C\tau[V(0) + 1] + 1 - 1.$$

$$V^\tau(t) \leqslant [V(0) + 1](1 + C\tau) - 1 \leqslant [V(0) + 1]e^{C\tau} - 1.$$

Проделывая аналогичные рассуждения на следующем временном шаге $t \in (\tau, 2\tau]$, получим

$$V^\tau(t) \leqslant [V(0) + 1]e^{2C\tau} - 1.$$

Через конечное число шагов на временном шаге $t \in ((N - 1)\tau, N\tau], \quad (N\tau = T)$ получим оценку

$$V^\tau(t) \leqslant [V(0) + 1]e^{CT} - 1,$$

отсюда следует неравенство по τ

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}v^\tau\right| \leqslant C - \text{равномерно по } \tau, \quad k=\overline{0,4}. \tag{2.30}$$

Продифференцируем задачу (2.20)–(2.22) по переменной x_j, и заменим $w^\tau(t,x,z) =$
$= v^\tau_{x_i}(t,x,z) = u^\tau_{x_ix_j}(t,x,z)$, $w_0(x,z) = \frac{\partial}{\partial x_j}v_0(x,z) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_0(x,z)$. Получим на $w^\tau(t,x,z)$ задачу

$$w^\tau_t(t,x,z) = 2\Delta w^\tau(t,x,z) + 2w^\tau_{zz}(t,x,z),$$
$$t \in \left(j\tau, \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau\right], \tag{2.31}$$

$$w^\tau_t(t,x,z) =$$
$$= 2\frac{\psi_{x_ix_j}(t,x) - w^\tau_z(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))\gamma'(t) - w^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))}\cdot$$
$$\cdot f(t,x,z) + 2F^\tau_{1x_j}(t,x)G_1(t,x,z) + 2F^\tau_1(t,x)G_{1x_j}(t,x,z) +$$
$$+ 2F^\tau_2(t,x)G_2(t,x,z), \quad t \in \left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, (j+1)\tau\right], \tag{2.32}$$

$$w^\tau(0,x,z) = w_0(x,z), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad z\in\mathbb{R}, \tag{2.33}$$

где

$$F^\tau_2(t,x) = \frac{\psi_{x_i}(t,x) - v^\tau_z(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))\gamma'(t) - v^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))},$$

$$G_2(t,x,z) = f_{x_j}(t,x,z) - \frac{f(t,x,z)f_{x_j}(t,x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))}.$$

Введем следующие обозначения

$$W^\tau(t) = \sum_{k=0}^{4} W^\tau_k(t), \tag{2.34}$$

$$W_k^\tau(t) = \sup_{n\tau<\xi\leqslant t\leqslant(n+1)\tau} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} w^\tau(\xi,x,z)\right|,$$

$$W_k(0) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} w_0(x,z)\right|. \quad (2.35)$$

Функции $W^\tau(t)$ и $W_k^\tau(t)$ являются неотрицательными и неубывающими на каждом полуинтервале $(j\tau,(j+1)\tau]$, $j = 0,1,\ldots,N-1$.

В силу уравнений (2.14) и (2.30), следующие величины ограничены равномерно по τ в $G_{[0,T]}$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha G_2(t,x,z)\right| + \left|F_2^\tau(t,x)\right| \leqslant C, \quad |\alpha| \leqslant 2, \quad k=\overline{0,4} \quad (2.36)$$

Рассмотрим целый нулевой шаг ($j = 0$). На первом дробном шаге для решения w^τ задачи

$$w_t^\tau = 2\Delta w^\tau(t,x,z) + 2w_{zz}^\tau(t,x,z), \qquad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}$$

$$w^\tau(0,x,z) = w_0(x,z),$$

в силу принципа максимума получаем

$$|w^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} |w_0(x,z)|, \qquad 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{2}. \quad (2.37)$$

Аналогично дифференцируя уравнения (2.31), (2.33) по z, k раз, где $k=\overline{1,4}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k} w^\tau(t,x,z)\right) = 2\frac{\partial^k}{\partial z^k}\Delta w^\tau(t,x,z) + 2\left(\frac{\partial^{k+2}}{\partial z^{k+2}} w^\tau(t,x,z)\right),$$

в силу принципа максимума получим оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} w^\tau(\xi, x, z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} w_0(x, z)\right|,$$

$$\text{где} \quad k = \overline{1,4}, \quad 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{2} \quad (2.38)$$

Возьмем от левых частей неравенств (2.37), (2.38) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}$, а затем $\sup\limits_{n\tau<\xi\leqslant t\leqslant(n+1)\tau}$, и сложим полученные неравенства. Используя обозначения (2.34), (2.35), получим

$$W^\tau(t) \leqslant W(0), \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}. \qquad (2.39)$$

На втором дробном шаге, интегрируя по временной переменной в пределах от $\frac{\tau}{2}$ до t уравнение

$$\begin{aligned} w_t^\tau(t, x, z) =& \\ = 2&\frac{\psi_{x_ix_j}(t, x) - w_z^\tau(t-\frac{\tau}{2}, x, \gamma(t))\gamma'(t) - w_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, x, \gamma(t))}{f(t, x, \gamma(t))}\cdot \\ &\cdot f(t, x, z) + 2F_{1x_j}^\tau(t, x)G_1(t, x, z) + 2F_1^\tau(t, x)G_{1x_j}(t, x, z) + \\ &+ 2F_2^\tau(t, x)G_2(t, x, z), \quad \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau, \end{aligned}$$

получим равенство

$$\begin{aligned} &w^\tau(t, x, z) = w^\tau(\frac{\tau}{2}, x, z) + \\ &+ 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \Bigg[\frac{\psi_{x_ix_j}(\theta, x) - w_z^\tau(\theta-\frac{\tau}{2}, x, \gamma(\theta))\gamma'(\theta) - w_{zz}^\tau(\theta-\frac{\tau}{2}, x, \gamma(\theta))}{f(\theta, x, \gamma(\theta))}\cdot \\ &\quad\cdot f(\theta, x, z) + F_{1x_j}^\tau(\theta, x)G_1(\theta, x, z) + F_1^\tau(\theta, x)G_{1x_j}(\theta, x, z) + \\ &\quad+ F_2^\tau(\theta, x)G_2(\theta, x, z)\Bigg]\, d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$|w^\tau(t,x,z)| \leqslant |w^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)| + 2\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Bigg[\frac{|\psi_{x_ix_j}(\theta,x)| + |w^\tau_z(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))|\,|\gamma'(\theta)| + |w^\tau_{zz}(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))|}{|f(\theta,x,\gamma(\theta))|}\cdot$$

$$\cdot\,|f(\theta,x,z)| + \left|F^\tau_{1x_j}(\theta,x)\right|\left|G_1(\theta,x,z)\right| + \left|F^\tau_1(\theta,x)\right|\left|G_{1x_j}(\theta,x,z)\right| +$$

$$+\left|F^\tau_2(\theta,x)\right|\left|G_2(\theta,x,z)\right|\Bigg]\,d\theta.$$

Поскольку данное неравенство выполняется при всех x, z, заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, получим

$$|w^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \left|w^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\right| +$$

$$+\frac{2C}{\delta}\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 1 + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|w^\tau_z(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\right| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|w^\tau_{zz}(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\right|d\theta.$$

Заменим функцию $|w^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}|w^\tau|$, получим

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}|w^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ z\in\mathbb{R}}}\left|w^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)\right| +$$

$$+\frac{2C}{\delta}\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 1 + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|w^\tau_z(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\right| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|w^\tau_{zz}(\theta-\frac{\tau}{2},x,\gamma(\theta))\right|d\theta.$$

Используя обозначение (2.34) и (2.35), получим

$$W^\tau(t) \leqslant W(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + W_1(\theta - \frac{\tau}{2}) + W_2(\theta - \frac{\tau}{2})\,d\theta.$$

Продифференцировав неравенство k раз по z и проделав аналогичные рассуждения, получим

$$W_k^\tau(t) \leqslant W_k(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + W_1(\theta - \frac{\tau}{2}) + W_2(\theta - \frac{\tau}{2})\,d\theta, \quad k = \overline{1,4},$$

$$W^\tau(t) \leqslant W(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + W^\tau\Big(\theta - \frac{\tau}{2}\Big)\,d\theta, \tag{2.40}$$

в силу оценки (2.39) получаем

$$W^\tau(t) \leqslant W(0) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 1 + W^\tau\Big(\theta - \frac{\tau}{2}\Big)\,d\theta. \tag{2.41}$$

$$W^\tau\big(\theta - \frac{\tau}{2}\big) \leqslant W(0), \quad \text{при} \quad \theta \in \Big(\frac{\tau}{2}, t\Big], \quad t \in \big(\frac{\tau}{2}, \tau\big],$$

подставим в (2.41), возьмем интеграл и получим

$$W^\tau(t) \leqslant W(0) + C\tau[W(0) + 1].$$

Преобразуем его

$$W^\tau(t) \leqslant W(0) + C\tau[W(0) + 1] + 1 - 1,$$

$$W^\tau(t) \leqslant [W(0) + 1](1 + C\tau) - 1 \leqslant [W(0) + 1]e^{C\tau} - 1.$$

Проделывая аналогичные рассуждения на следующем временном шаге $t \in (\tau, 2\tau]$, получим

$$W^\tau(t) \leqslant [W(0) + 1]e^{2C\tau} - 1.$$

Через конечное число шагов на временном шаге $t \in ((N-1)\tau, N\tau]$, $\quad (N\tau = T)$ получим оценку

$$W^\tau(t) \leqslant [W(0)+1]e^{CT} - 1,$$

отсюда следует

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} w^\tau\right| \leqslant C - \text{равномерно по } \tau, \quad k = \overline{0,4}. \tag{2.42}$$

Продифференцируем задачу (2.31)–(2.33) по переменной x_m, и заменим $h^\tau(t,x,z) = w^\tau_{x_m}(t,x,z) = u^\tau_{x_i x_j x_m}(t,x,z)$, $h_0(x,z) = \frac{\partial}{\partial x_m} v_0(x,z) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j \partial x_m} u_0(x,z)$. Получим задачу

$$h^\tau_t(t,x,z) = 2\Delta h^\tau(t,x,z) + 2h^\tau_{zz}(t,x,z),$$
$$t \in \left(j\tau, \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau\right] \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} h^\tau_t(t,x,z) &= \\ &= 2\frac{\psi_{x_i x_j x_m}(t,x) - h^\tau_z(t-\frac{\tau}{2}, x, \gamma(t))\gamma'(t) - h^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2}, x, \gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))} \cdot \\ &\cdot f(t,x,z) + 2F^\tau_{1x_j x_m}(t,x)G_1(t,x,z) + 2F^\tau_{1x_j}(t,x)G_{1x_m}(t,x,z) + \\ &+ 2F^\tau_{1x_m}(t,x)G_{1x_j}(t,x,z) + 2F^\tau_1(t,x)G_{1x_j x_m}(t,x,z) + \\ &+ 2F^\tau_{2x_m}(t,x)G_2(t,x,z) + 2F^\tau_2(t,x)G_{2x_m}(t,x,z) + \\ &+ 2F^\tau_3(t,x)G_3(t,x,z), \quad t \in \left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, (j+1)\tau\right] \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$h^\tau(0,x,z) = h_0(x,z), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.45}$$

где

$$F^\tau_3(t,x) = \frac{\psi_{x_i x_j}(t,x) - w^\tau_z(t-\frac{\tau}{2}, x, \gamma(t))\gamma'(t) - w^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2}, x, \gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))},$$

$$G_3(t,x,z)=f_{x_m}(t,x,z)-\frac{f(t,x,z)f_{x_m}(t,x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))}$$

В силу уравнений (2.14) и (2.42), следующие величины ограничены равномерно по τ в $G_{[0,T]}$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha G_3(t,x,z)\right|+\left|F_3^\tau(t,x)\right|\leqslant C,\quad |\alpha|\leqslant 1,\quad k=\overline{0,4}\quad (2.46)$$

Повторяя для данной задачи рассуждения, аналогичные проделанным при оценке производных меньшего порядка по пространственным переменным, получим равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau_{x_ix_jx_m}(t,x,z)\right|\leqslant C,\quad k=\overline{0,4}$$

Аналогично, при помощи дифференцирования задачи (2.43)–(2.45) по x_l, можно доказать равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u^\tau\right|\leqslant C,\quad \text{при}\quad |\alpha|=4,\quad k=\overline{0,4},\quad (t,x,z)\in G_{[0,T]}.$$

Таким образом справедливы следующие оценки равномерно по τ при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial z^{k_1}}u^\tau\right|+\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u^\tau\right|\leqslant C,\quad \text{при}\quad 1\leqslant|\alpha|\leqslant 4,$$
$$k=\overline{0,4}, k_1=\overline{0,6}\quad (t,x,z)\in G_{[0,T]}.\quad (2.47)$$

Используем оценку (2.47) и уравнения (2.8), (2.9), получим равномерно по τ

$$|u_t^\tau(t,x,z)|\leqslant C,\quad (t,x,z)\in G_{[0,T]}.$$

Продифференцируем уравнения (2.8), (2.9) один раз по z. В силу оценки (2.47) правая часть получившихся уравнений будет ограничена равномерно по τ, а значит и левая часть будет также ограничена равномерно по τ

$$|u^{\tau}_{tz}(t,x,z)| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,T]}.$$

По аналогии получим равномерно по τ следующие оценки при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$:

$$|u^{\tau}_{tzz}(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$|u^{\tau}_{tzzz}(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$|u^{\tau}_{tzzzz}(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$|u^{\tau}_{tx_i}(t,x,z)| + |u^{\tau}_{tx_iz}(t,x,z)| + |u^{\tau}_{tx_izz}(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$|u^{\tau}_{tx_ix_j}(t,x,z)| + |u^{\tau}_{tx_ix_jz}(t,x,z)| + |u^{\tau}_{tx_ix_jzz}(t,x,z)| \leqslant C.$$

Таким образом, справедливы следующие оценки равномерно по τ при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u^{\tau}(t,x,z)\Big| + \Big|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}D^{\alpha}_x u^{\tau}(t,x,z)\Big| \leqslant C,$$
$$1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2, \quad m=\overline{0,4} \quad k=\overline{0,2},$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u^{\tau}(t,x,z)\Big| + \Big|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^k}{\partial z^k}D^{\alpha}_x u^{\tau}(t,x,z)\Big| \leqslant C,$$
$$1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2, \quad k=\overline{0,2},$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u^{\tau}(t,x,z)\Big| + \Big|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}D^{\alpha}_x u^{\tau}(t,x,z)\Big| \leqslant C,$$
$$1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2, \quad k=\overline{0,2},$$

что вместе с (2.47) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности u^τ решений задачи (2.8)–(2.10) сходится вместе с производными по x и z до второго порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)$. Доказано на основании теоремы сходимости МСА, что $u(t,x,z)$ есть решение задачи (2.7), (2.2), причем $u(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z} \cap C^{0,0,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)$, где

$$C^{1,k_1,k_2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big) = \Big\{ u(t,x,z) \,\big|\, u_t, \frac{\partial^k}{\partial z_k} D^\alpha_x u \in C(G_{[0,T]}), \\ k = 0,1,...,k_2; |\alpha| \leqslant k_1 \Big\}$$

При этом

$$\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial z^{k_1}} u(t,x,z) \right| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u(t,x,z) \right| \leqslant C, \quad k = 0,1,2, \\ k_1 = \overline{0,4}, \quad 1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2. \quad (2.48)$$

Таким образом, мы доказали существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (2.7), (2.2) в классе $C^{1,k_1,k_2}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)$.

2.4 Существование классического решения обратной задачи

Докажем, что пара функций $u(t,x,z), \lambda(t,x)$, где $\lambda(t,x)$ определяется соотношением (2.6), является решением обратной задачи (2.1)–(2.3).

Поскольку $u(t,x,z)$ — это решение прямой задачи (2.7), (2.2), то подставляя $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ в (2.1), (2.2), мы получаем верное тождество.

Используя (2.5), (2.13), (2.14), (2.47) из (2.6), (2.7) очевидно, что пара функций $u(t,x,z), \lambda(t,x)$ принадлежит классу

$$Z_{[0,T]} = \Big\{u(t,x,z), \lambda(t,x) \,|\, u \in C^{1,2,2}_{t,x,z} \cap C^{0,0,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big),$$
$$\lambda(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}\big(\textstyle\prod_{[0,T]}\big)\Big\},$$

и удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u(t,x,z)\right| + \sum_{|\alpha|\leqslant 2}\big|D^\alpha_x \lambda(t,x)\big| \leqslant C,$$
$$(t,x,z) \in G_{[0,T]}, \quad (2.49)$$

где

$$C^{0,k_1}_{t,x}\big(\textstyle\prod_{[0,T]}\big) = \{\lambda(t,x) \in C\big(\textstyle\prod_{[0,T]}\big),\ |\alpha| \leqslant k_1\},$$
$$\textstyle\prod_{[0,T]} = \{(t,x) \,|\, 0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Осталось доказать, что для функции $u(t,x,z)$ выполняется условие переопределения (2.3). Положим в уравнении (2.7) $z = \gamma(t)$, получим

$$u_t(t,x,\gamma(t)) = \Delta u(t,x,\gamma(t)) + u_{zz}(t,x,\gamma(t)) +$$
$$+ \frac{\psi(t,x) - u_z(t,x,\gamma(t))\gamma'(t) - u_{zz}(t,x,\gamma(t))}{f(t,x,\gamma(t))} f(t,x,\gamma(t)),$$

$$u_t(t,x,\gamma(t)) = \Delta u(t,x,\gamma(t)) + u_{zz}(t,x,\gamma(t)) + \psi(t,x) -$$
$$- u_z(t,x,\gamma(t))\gamma'(t) - u_{zz}(t,x,\gamma(t)),$$

$$u_t(t,x,\gamma(t)) = \Delta u(t,x,\gamma(t)) - u_z(t,x,\gamma(t))\gamma'(t) + \psi(t,x),$$

$u_t(t,x,\gamma(t)) - \varphi'_t(t,x) + u_z(t,x,\gamma(t))\gamma'(t) = \Delta u(t,x,\gamma(t)) - \Delta\varphi(t,x),$

Обозначим $k(t,x) = u(t,x,\gamma(t)) - \varphi(t,x)$, $k(0,x) = 0$. Получим задачу Коши для однородного параболического уравнения с нулевым начальным условием

$$k_t(t,x) = \Delta k(t,x),$$

$$k(0,x) = 0,$$

которая, очевидно, обладает единственным решением $k(t,x) = 0$, $(t,x) \in \prod_{[0,T]}$, и следовательно $u(t,x,\gamma(t)) = \varphi(t,x)$, т.е. условие (2.3) выполнено.

Таким образом, доказано существование решения $u(t,x,z)$, $\varphi(t,x)$ задачи (2.1) – (2.3) в классе $Z_{[0,T]}$. Данный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.4.1 *Пусть выполняются условия* (2.5), (2.13), (2.14). *Тогда существует решение*
$u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (2.1) – (2.4) *в классе* $Z_{[0,T]}$, *удовлетворяющее соотношению* (2.49).

2.5 Единственность классического решения обратной задачи

Докажем единственность решения задачи (2.1)–(2.3) при условии выполнения (2.13), (2.14), (2.49).

Пусть $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$ и $u_2(t,x,z)$, $\lambda_2(t,x)$ — два классических решения задачи (2.1)–(2.3), причем пара функций $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$ — решение определяемое соотношением (2.6), а пара $u_2(t,x,z)$, $\lambda_2(t,x)$ — некоторое другое решение задачи

(2.1)–(2.3), удовлетворяющее условиям (2.49). Тогда справедливы соотношения

$$u_{1t}(t,x,z) = \Delta u_1(t,x,z) + u_{1zz}(t,x,z) + \lambda_1(t,x)f(t,x,z),$$

$$u_{2t}(t,x,z) = \Delta u_2(t,x,z) + u_{2zz}(t,x,z) + \lambda_2(t,x)f(t,x,z),$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z),\ u_2(0,x,z) = u_0(x,z), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R},$$

$$u_1(t,x,\gamma(t)) = \varphi(t,x), \quad u_2(t,x,\gamma(t)) = \varphi(t,x).$$

Разность $u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z) = u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x) - \lambda_2(t,x) = \lambda(t,x)$ является решением задачи

$$u_t(t,x,z) = \Delta u(t,x,z) + u_{zz}(t,x,z) + \lambda(t,x)f(t,x,z), \tag{2.50}$$

$$u(0,x,z) = 0, \tag{2.51}$$

$$u(t,x,\gamma(t)) = 0.$$

Рассмотри неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,T]$ функции

$$g_k(t) = \sup_{G_{[0,t]}} \Big| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(\xi,x,z) \Big|, \quad k = 0,1,2.$$

Учитывая оценки (2.13), (2.49), в силу принципа максимума для уравнения (2.50) получим

$$|u(\xi,x,z)| \leqslant Ce^{C\xi}\big(g_2(t) + g_1(t)\big)\xi, \quad (\xi,x,z) \in G_{[0,t]}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

откуда в силу неотрицательности $g_k(t)$ следует неравенство

$$g_0(t) \leqslant C\big(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t)\big)t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.52}$$

Дифференцируя (2.50), (2.51) один или два раза по z, учитывая оценки (2.13), (2.14), (2.49), в силу принципа максимума для уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right)=\Delta\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right)+ \\ +\lambda(t,x)\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,x,z),\ k=1,2,$$

имеем аналогичные оценки

$$g_k(t)\leqslant C\big(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t)\big)t,\quad k=1,2,\ 0\leqslant t\leqslant T. \quad (2.53)$$

Сложим неравенства (2.52), (2.53), получим

$$\big(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t)\big)\leqslant C\big(g_2(t)+g_1(t)+g_0(t)\big)t,\quad k=1,2,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Отсюда получим, что при $t\in[0,\zeta]$, где $\zeta<1/C$ выполняется $g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)+g_3(t)=0$ и,следовательно,

$$u(t,x,z)=0,\quad \text{при}\quad (t,x,z)\in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя наши рассуждения для $t\in[\zeta,2\zeta]$, получим, что

$$u(t,x,z)=0,\quad \text{при}\quad (t,x,z)\in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов докажем, что $u(t,x,z)\equiv 0$ в $G_{[0,T]}$.

Учитывая, что $u_1\equiv u_2$ в $G_{[0,T]}$, из (2.50), получим, что для $\lambda(t,x)=\lambda_1(t,x)-\lambda_2(t,x)$ выполняется соотношение

$$\lambda(t,x)f(t,x,z)=0,$$

где $f(t,x,z)$ не обращается в 0 за счет выполнения условия (2.5), откуда получаем

$$\lambda(t,x) = \lambda_1(t,x) - \lambda_2(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \prod\nolimits_{[0,T]}.$$

Справедлива

Теорема 2.5.1 *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (2.1) – (2.4), *удовлетворяющее соотношению* (2.49), *единственно в классе* $Z(T)$.

Из теорем 2.4.1, 2.5.1 следует

Теорема 2.5.2 *Пусть выполняются условия* (2.4), (2.5), (2.13), (2.14). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$ *задачи* (2.1) – (2.3) *в классе* $Z(T)$, *удовлетворяющее соотношению* (2.49).

Заключение

В бакалаврской работе решена актуальная задача одновременной идентификации нескольких коэффициентов многомерного параболического уравнения с условием переопределения заданном на параметрической гиперповерхности.

В результате исследования доказаны теоремы существования и единственности классического решения в классе гладких ограниченных функций.

Список литературы

[1] Белов Ю.Я. Метод слабой аппроксимации / Кантор С.А. — КрасГУ, 1999.

[2] Белов Ю.Я. О задачах идентификации двух коэффициентов одномерного полулинейного параболического уравнения / Фроленков И.В. // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова / под ред. А.И. Кожанова. - Новосибирск: Изд-во Инст-та математики, 2005. — С. 44-50

[3] Белов Ю.Я. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Фроленков И.В. // Доклады Академии Наук, 2005. — Т. 404, №5. — С. 583-585

[4] Белов Ю.Я. О некоторых задачах идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Фроленков И.В. // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. Институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005. — С. 19-23

[5] Белов Ю.Я. О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой / Фроленков

И.В. // Специальный выпуск журнала "Вычислительные технологии посвященный 85-летию академика Яненко Н.Н., 2006. — Т. 11, Ч.1. — С. 46-54

[6] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров — М.: Наука. 1981.

[7] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин — М.: Наука. 1982.

[8] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко — Новосибирск, 1967. – 195с.

[9] Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. / Yu.Ya. Belov — Utrecht: VSP, 2002. — 211p.