Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
___________ / Ю. Я. Белов
(подпись)
«____» _____________ 2011 г.

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Специальность 010501.65 «Прикладная математика и информатика»

«ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ДВУМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ»

Выпускник _____________ / Е. Н. Кригер
(подпись, дата)

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры МАиДУ _____________ / И. В. Фроленков
(подпись, дата)

Красноярск 2011

РЕФЕРАТ

Дипломная работа по теме «Задача идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении» содержит 78 страниц текста и 28 использованных источников.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА, ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА, МЕТОД СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ, УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, УСЛОВИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ, НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ, УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ.

Цель работы — исследовать корректность задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении с данными Коши. В работе исследованы два класса задач. В первом случае неизвестный коэффициент при функции источника представим в виде суммы двух функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменной. Для этого случая доказаны теоремы существования, единственности и получена оценка устойчивости решения задачи по входным данным. Во втором случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменной, доказана разрешимость задачи в малом временном интервале. Указанная обратная задача приводится к неклассической прямой задаче, содержащей следы неизвестной функции и ее производных. Исследование проводится с использованием метода слабой аппроксимации, который был впервые предложен в работах Н.Н. Яненко и А.А. Самарского и получил развитие в работах их учеников и последователей. Все полученные в работе результаты являются новыми, имеют теоретическое значение и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении работы некоторого объекта или природного явления проводятся различные эксперименты, целью которых является выявление главных закономерностей явления и формирование некоторой математической модели. Зачастую на практике встречаются ситуации, когда объект исследования либо недоступен для наблюдения, либо проведение эксперимента требует больших материальных затрат. Однако, в ходе исследования объекта можно получить некоторые косвенные данные. По этим данным исследователь должен сделать заключение о свойствах рассматриваемого объекта. То есть исследователь должен определить причины, если известны полученные в результате экспериментов или наблюдений следствия. Такие задачи относятся к классу обратных задач математической физики.

Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: геофизика, астрономия, медицинская визуализация, компьютерная томография, дистанционное зондирование Земли, спектральный анализ и задачи по неразрушающему контролю.

Приведём некоторые примеры обратных задач (см. [1, 2]).

Пример 1. *На поверхности исследуемого объекта имеются источник колебаний и их приемник, который регистрирует волны как непосредственно пришедшие от источника, так и отраженные от дефекта (полость, включение из другого материала, трещина). Обратная задача состоит в определении по известным амплитуде и фазе регистрируемого сигнала геометрической границы дефекта и выявлении его структуры.*

Пример 2. *Пусть в пространстве расположено некоторое тело, которое по тем или иным причинам нам недоступно. Однако, можно освещать тело с разных сторон и регистрировать получаемую при этом* *тень тела. При определенных допущениях мы приходим к следующей математической постановке обратной задачи. Требуется определить форму тела, если известны его ортогональные проекции на различные плоскости.*

Пример 3. *Движение материальной точки по прямой в соответствии с законом Ньютона описывается дифференциальным уравнением*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F,$$

где m *— масса точки,* $x(t)$ *— её положение в момент времени* t, F *— сила, действующая на точку. Начальное положение точки и её скорость известны:* $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$. *Требуется определить силу* F, *которая зависит от положения точки* $F = F(x)$, *если для различных значений массы задано положение, которое занимает точка в определенный момент времени* $t = t_1$. *Таким образом, величина массы точки* m *является параметром, и обратная задача состоит в определении функции* $F(\xi)$ *по решению дифференциального уравнения* $x(t, m)$, *заданному при* $t = t_1$ *и* $m \in [m_1, m_2]$.

Пример 4. *Один из классов обратных задач образуют задачи, в которых требуется определить неизвестную функцию по семейству интегралов от этой функции. Примером задачи такого типа служит возникающая в компьютерной томографии задача определения функции двух переменных* $f(x, y)$ *по семейству интегралов*

$$\int\limits_{L(\rho,\varphi)} f(x, y)\, dl,$$

взятых вдоль различных прямых $L(\rho, \varphi)$ *(*ρ *и* φ *— параметры, определяющие прямую) в плоскости* x, y.

Особый, достаточно широкий класс представляют обратные задачи для уравнений в частных производных ([3, 4]), поскольку именно такие уравнения наиболее часто употребляются для построения математических моделей самых разнообразных процессов. Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, границы области, граничных или начальных условий. Неизвестные элементы начально-краевых задач определяются по некоторой дополнительной информации. Такой информацией являются различного рода условия переопределения.

Первые исследования в теории обратных задач были проведены М. М. Лаврентьевым, А. Д. Искендеровым, М. В. Клибановым, А. И. Прилепко, Н. Я. Безнощенко, В. Г. Романовым и др.

В настоящее время теория обратных задач математической физики активно развивается представителями ряда отечественных математических школ, в том числе Московской (основанной А. Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым), такими как Ю. Е. Аниконов, Ю. Я. Белов, А. О. Ватульян, С. В. Полынцева, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков, О. Н. Черепанова, Т. Н. Шипина и др.

Большой вклад в теорию корректности обратных задач сделан выдающимися математиками А. Н. Тихоновым, М. М. Лаврентьевым, А. М. Денисовым и др.

Корректность обратных задач для одномерных параболических уравнений, когда функция источника имеет вид $f(t)g(x)$ или $f(t)+g(x)$, исследовалась в работах [5, 6, 7].

Задача идентификации функции источника, зависящей от (t, x), рассмотрена в работе [8]. В [9] исследована задача определения источника в параболическом уравнении с переопределением на верхней крышке. В работе [10] изучен случай, когда условия переопределения задаются на гладкой кривой, а неизвестная функция источника зависит лишь от временной переменной. Задача идентификации функции источника для многомерного параболического уравнения с условием переопределения, заданным на параметрической гиперповерхности рассмотрена в [11]. Краевые задачи идентификации функции источника исследованы в работах [12, 13].

Целью настоящей дипломной работы было исследование задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении в случае данных Коши. Рассматриваемый неизвестный коэффициент при функции источника представим в виде суммы или произведения двух функций, каждая из которых зависит от двух переменных: временной и пространственной. В этом и заключается новизна и интерес изученной мной задачи.

Передо мной были поставлены следующие задачи.

1. Изучение метода слабой аппроксимации, его применения для исследования задач идентификации коэффициентов параболических уравнений ([8, 10, 13, 14, 15, 16]).

2. Доказательство существования, единственности и получение оценки устойчивости решения задачи по входным данным в случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде суммы двух функций.

3. Доказательство существования решения задачи в случае, когда неизвестный коэффициент представим в виде произведения двух функций.

4. Построение модельных примеров входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем, и соответствующих им решений.

Дипломная работа состоит из трех частей. В первой приведены некоторые обозначения, вспомогательные утверждения и теоремы, которые необходимы для дальнейшей работы.

Во второй главе исследована задача идентификации функции источника в двумерном параболическом уравнении, когда неизвестный коэффициент зависит от всех переменных, входящих в уравнение, и представим в виде $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)$. С помощью условий переопределения обратная задача приводится к прямой для нагруженного уравнения, содержащего следы неизвестной функции. Доказательство существования решения прямой задачи проводится методом слабой аппроксимации, в предположении достаточной гладкости входных данных, в классах гладких ограниченных функций. Единственность решения задачи следует из доказательства тождественного равенства нулю разности двух предполагаемых решений. Доказана оценка устойчивости решения по входным данным.

В третьей главе доказывается разрешимость задачи идентификации функции источника в двумерном параболическом уравнении в случае, когда неизвестный коэффициент имеет вид $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) \cdot \lambda_2(t,z)$. Доказательство проводится с использованием аналогичных методов.

Для рассмотренных задач построены примеры решений, удовлетворяющих условиям доказанных теорем. Примеры показывают, что исследованный класс задач не пуст.

1 Вспомогательные предложения

1.1 Основные определения и теоремы

Пусть Ω — ограниченная область в E_n. E_n — действительное n-мерное евклидово пространство, $n \geq 1$, n — целое. Точка в E_n обозначается через $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим ограниченное в E_n множество Ω и пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $f(x)$ с нормой $||f||_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$.

Пусть M — некоторое бесконечное множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $\big(M \subset C(\overline{\Omega})\big)$.

Определение 1.1. *Говорят, что функции множества M равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$, если существует постоянная k такая, что неравенство*

$$||f||_{C(\overline{\Omega})} \leq k$$

выполняется для всех функций из M.

Определение 1.2. *Говорят, что функции множества M равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такая, что для любых x' и x'' из $\overline{\Omega}$, удовлетворяющих неравенству*

$$|x' - x''| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

причем для всех функций из M.

Определение 1.3. *Множество M метрического пространства $\mathbb{X}$ называется компактным, если из каждой бесконечной последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу $x \in M$.*

Теорема 1.1 (Арцела). *Для того, чтобы множество* $M \subset C(\overline{\Omega})$ *было компактно в* $C(\overline{\Omega})$, *необходимо и достаточно, чтобы функции из* M *были равномерно ограничены в* $C(\overline{\Omega})$ *и равностепенно непрерывны в* $\overline{\Omega}$.

Доказательство теоремы 1.1 можно найти, например, в [17, 18].

Теорема 1.2 (Принцип максимума). *Пусть* T *— положительная постоянная,* $S_T = [0,T] \times \partial\Omega$, $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $u(t,x)$ *— классическое решение задачи Коши*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f,$$

где

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall\,(t,x) \in \overline{Q_T} \backslash \Gamma_T,\ \forall\,\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

и выполняются соотношения

$$|\varphi(x)| \le q,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad |f(t,x)| \le f_0, \quad c(t,x) \le m, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \le e^{mt}(f_0 t + q).$$

Доказательство см. в [19].

Лемма 1.1 (Неравенство Гронуолла). *Пусть неотрицательная, измеримая и ограниченная на отрезке* $[0,t^*]$ *функция* $\chi(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\chi(t) \le C + \int\limits_0^t [A + B\chi(\theta)]\ d\theta,$$

где постоянные $A, B, C \ge 0$. *Тогда, если* $B > 0$, *при* $0 \le t \le t^*$ *имеет место оценка*

$$\chi(t) \le Ce^{Bt} + \frac{A}{B}\left(e^{Bt} - 1\right). \tag{1.1}$$

Если $B = 0$, *то*

$$\chi(t) \le C + At.$$

Доказательство неравенства (1.1) в основном повторяет доказательство леммы 1 гл. I в [20].

1.2 Теорема сходимости метода слабой аппроксимации

Рассмотрим в $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x) | t_0 \le t \le t_1, x \in E_n\}$ систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t, x, \bar{u}). \tag{1.2}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_l(t,x))$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ — вектор-функции размерности l ($l \ge 0$). Через $\bar{u} = (v_0, v_1, \ldots, v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом: $v_0 = u = (u_1, \ldots, u_l)$; v_1 — вектор, составленный из всех производных от u первого порядка по x; v_2 — вектор, составленный из всех производных от u второго порядка по x и так далее; v_r — вектор, составленный из производных порядка r по x от u. Таким образом,

$$\bar{u} = \left(u_1, \ldots, u_l, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_l}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r}, \ldots, \frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r}\right),$$

и система уравнений (1.2) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно ($r \ge 0$).

Мы предполагаем, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi^i, \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^{m} \varphi_j^i, \quad j = 1, \ldots, l,$$

где φ^i — вектор-функции размерности l; φ_j, φ_j^i — j-е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t) \varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau), \tag{1.3}$$

где функции $\alpha_{i,\tau}$ определены соотношением

$$\alpha_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & t_0 + \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \le t_0 + \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$.

Система (1.3) слабо аппроксимирует систему (1.2).

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau), \tag{1.4}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau)$, зависящие от τ.

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.2), (1.3), (1.4). Под классическими решениями уравнений (1.3) ((1.4)) мы понимаем функцию u^τ, непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.3), в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]}$, обладающую кусочно-непрерывной производной u^τ_t в $\Pi_{[t_0,t_1]}$ (u_t может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$) и удовлетворяющую уравнению (1.3) ((1.4)).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ на классических решениях $\bar{u}^\tau$ системы уравнений (1.4) непрерывны по переменным $(t, x) \in \Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \tau \le \tau_0)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$.

Через $u_{\tau_k}(t, x)$ обозначим решение системы (1.4) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u^{τ_k} системы (1.4) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в

$$\Pi^N_{[t_0,t_1]} = \{(t,x) | t_0 \le t \le t_1, |x| \le N\},$$

последовательность u^{τ_k} сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящими в (1.2), причем

$$\max_{\Pi^N_{[t_0,t_1]}} |\varphi_i(t,x,\bar{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t,x,\bar{u}^{\tau_k})| \to 0,$$
$$\tau_k \to 0,\ i = 1, \dots, m. \tag{1.5}$$

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда вектор-функция* $u(t,x)$ *есть решение системы* (1.2) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в [14].

Замечание. *Рассмотрим систему уравнений* (1.2) *с вектор-функцией* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. *Из доказательства теоремы* (1.3) *легко видеть, что если* $u^{\tau_k}(t,x)$ *— решение системы*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} &= \frac{2p}{p-1}\varphi_1, \quad t_0 + n\tau_k < t \le t_0 + \left(n + \frac{p-1}{2p}\right)\tau_k,\\
\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} &= \frac{2p}{p-1}\varphi_2, \quad t_0 + \left(n + \frac{p-1}{2p}\right) < t \le t_0 + \left(n + \frac{p-1}{p}\right)\tau_k,\\
\frac{\partial u^{\tau_k}}{\partial t} &= p\varphi_3, \quad t_0 + \left(n + \frac{p-1}{p}\right) < t \le t_0 + (n+1)\,\tau_k,
\end{aligned}$$

где $p > 1$ *— некоторое фиксированное число, и выполняются условия* 1, 2, *то* $u(t,x)$ *является решением системы* (1.2) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

1.3 Единственность решения одной задачи Коши для нагруженного параболического уравнения

Рассмотрим в области $\mathrm{P}_{[0,T]} = \{(t,y)\,|\,0 \le t \le T, y \in \mathbb{R}\}$ задачу Коши для уравнения

$$v_t(t,y) = v_{yy}(t,y) - s(t,y)\cdot v_{yy}(t,\eta), \tag{1.6}$$

с начальным условием

$$v(0, y) = r(y). \tag{1.7}$$

Предполагаем, что функции $s(t, y)$, $r(y)$ и все их производные непрерывны и ограничены в $\mathrm{P}_{[0,T]}$, η — фиксированная вещественная постоянная.

Лемма 1.2. *Если решение* $v(t, y) \in C^{1,4}_{t,y}\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right)$ *задачи* (1.6), (1.7) *существует и удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{4} \left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} v(t, y) \right| \leq C,$$

то оно единственно. Здесь

$$C^{1,4}_{t,y}\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right) = \left\{ v(t, y) \;\middle|\; v_t(t, y), \frac{\partial^k}{\partial y^k} v(t, y) \in C\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right),\ k = 0, 1, \ldots, 4 \right\}.$$

Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что решение не единственно, то есть существуют два различных решения задачи (1.6), (1.7): $v_1(t, y) \in C^{1,4}_{t,y}\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right)$ и $v_2(t, y) \in C^{1,4}_{t,y}\left(\mathrm{P}_{[0,T]}\right)$. Тогда, справедливы соотношения

$$v_{1t}(t, y) = v_{1yy}(t, y) - s(t, y) \cdot v_{1yy}(t, \eta),$$

$$v_{2t}(t, y) = v_{2yy}(t, y) - s(t, y) \cdot v_{2yy}(t, \eta),$$

$$v_1(0, y) = r(y),$$

$$v_2(0, y) = r(y).$$

Разность

$$\omega(t, y) = v_1(t, y) - v_2(t, y) \tag{1.8}$$

является решением задачи:

$$\omega_t(t, y) = \omega_{yy}(t, y) - s(t, y) \cdot \omega_{yy}(t, \eta), \tag{1.9}$$

$$\omega(0, y) = 0. \tag{1.10}$$

Введём неотрицательные, неубывающие на $[0, T]$ функции

$$g_k(t) = \sup_{\mathrm{P}_{[0,t]}} \left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} \omega(\xi, y) \right|,\ k = 0, 1, 2.$$

В силу теоремы 1.2 принципа максимума, для уравнения (1.9) получим

$$\bigl|\omega(\xi,y)\bigr| \le C\cdot g_2(t)\cdot \xi,\quad (\xi,y)\in \mathrm{P}_{[0,t]},\ 0\le t\le T.$$

Справедливо

$$\bigl|\omega(\xi,y)\bigr| \le C\cdot g_2(t)\cdot t,\quad (\xi,y)\in \mathrm{P}_{[0,t]},\ 0\le t\le T.$$

Возьмем от обеих частей этого неравенства $\sup\limits_{\mathrm{P}_{[0,t]}}$, в силу неотрицательности функций $g_k(t),\ k=0,1,2$, получим:

$$g_0(t)\le C\cdot\bigl(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)\bigr)\cdot t,\ 0\le t\le T. \tag{1.11}$$

Дифференцируя (1.9), (1.10) один, а затем два раза по y, в силу принципа максимума, для уравнений

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial t\partial y^k}\omega(t,y)=\frac{\partial^{k+2}}{\partial y^{k+2}}\omega(t,y)-\frac{\partial^k}{\partial y^k}s(t,y)\cdot\omega_{yy}(t,\eta),\ k=1,2,$$

получим аналогичные оценки:

$$g_k(t)\le C\cdot\bigl(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)\bigr)\cdot t,\ k=1,2,\ 0\le t\le T. \tag{1.12}$$

Сложим неравенства (1.11) и (1.12).

$$g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)\le C\cdot\bigl(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)\bigr)\cdot t,\ 0\le t\le T.$$

Отсюда следует, что при $t\in[0,\theta]$, где $\theta<\frac{1}{C}$, выполняется

$$g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)=0.$$

Так как $g_k(t)\ge 0$, то при $(t,y)\in \mathrm{P}_{[0,\theta]}$:

$$\omega(t,y)=0.$$

Рассуждая аналогично, для $t\in[\theta,2\theta]$ получим, что

$$\omega(t,y)=0,\ (t,y)\in \mathrm{P}_{[\theta,2\theta]}\,.$$

Продолжая рассуждения, через конечное число шагов получим

$$\omega(t,y) \equiv 0 \text{ в } \mathrm{P}_{[0,T]}\,. \tag{1.13}$$

Из (1.8) и (1.13) следует:

$$v_1(t,y) - v_2(t,y) \equiv 0 \text{ в } \mathrm{P}_{[0,T]},$$

то есть

$$v_1(t,y) = v_2(t,y) \text{ в } \mathrm{P}_{[0,T]}\,.$$

Таким образом, решения совпадают во всей области $\mathrm{P}_{[0,T]}$. Следовательно, решение задачи (1.6), (1.7) единственно.

Лемма доказана.

1.4 Некоторые обозначения

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
||D_1(t,x,z)||_1 &= \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\le T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)\right|,\\
||D_2(x,z)||_2 &= \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_2(x,z)\right|,\\
||D_3(t,z)||_3 &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6} \sup_{0<\xi\le T}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^{i}\partial z^{j}}D_3(\xi,z)\right|,\\
||D_4(t,x)||_4 &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6} \sup_{0<\xi\le T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^{i}\partial x^{j}}D_4(\xi,x)\right|.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Функции $D_i, i=1,\ldots,4$, из (1.14) и их производные, входящие в (1.14), ограничены и непрерывны в $G_{[0,T]}$.

Докажем, что обозначения (1.14) являются нормами в соответствующих пространствах гладких ограниченных функций. Для этого нужно проверить выполнение следующих свойств нормы:

1. $||x|| \ge 0$, $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2. $||Cx|| = |C| \cdot ||x||$, $C = const$;

3. $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$.

Доказательство приведём для $||D_1(t, x, z)||_1$. Для остальных доказательство проводится аналогичным образом.

1. По свойству модуля имеем
$$\left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(t, x, z) \right| \ge 0.$$
Следовательно
$$\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(t, x, z) \right| \ge 0 \text{ и } \sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(\xi, x, z) \right| \ge 0.$$
Значит выполняется
$$||D_1(t, x, z)||_1 = \sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(\xi, x, z) \right| \ge 0.$$
Пусть $D_1(t, x, z) = 0$. Тогда
$$\left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(t, x, z) \right| = 0 \Longrightarrow$$
$$\sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(\xi, x, z) \right| = 0 \Longrightarrow$$
$$\sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(\xi, x, z) \right| = 0,$$
то есть $||D_1(t, x, z)||_1 = 0$.

Пусть теперь
$$||D_1(t, x, z)||_1 = \sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(\xi, x, z) \right| = 0.$$
Равенство нулю суммы неотрицательных величин означает, что все эти величины равны нулю, то есть
$$\sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} D_1(\xi, x, z) \right| = 0.$$

Так как
$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)\right|\geq 0,$$
то
$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)=0.$$
Следовательно, для $||D_1(t,x,z)||_1$ первое свойство выполняется.

2. Пусть C — некоторая константа.
$$||C\cdot D_1(t,x,z)||_1=\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leq T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}CD_1(\xi,x,z)\right|=$$
$$=\Big(\text{по свойству операции дифференцирования}\Big)=$$
$$=\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leq T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|C\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)\right|=$$
$$=\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leq T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left(\big|C\big|\cdot\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)\right|\right)=$$
$$=\Big(\text{по свойствам суммы и }\sup\Big)=$$
$$=\big|C\big|\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leq T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)\right|=\big|C\big|\cdot||D_1(t,x,z)||_1.$$
Второе свойство выполняется.

3. Пусть функции $D_1(t,x,z),J(t,x,z)\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big)$.
$$||(D_1+J)(t,x,z)||_1=$$
$$=\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leq T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\Big(D_1(\xi,x,z)+J(\xi,x,z)\Big)\right|=$$
$$=\Big(\text{по свойству операции дифференцирования}\Big)=$$
$$=\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leq T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)+\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}J(\xi,x,z)\right|\leq$$
$$\leq\Big(\text{по свойству модуля}\Big)\leq$$

$$\le \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left(\left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} D_1(\xi,x,z) \right| + \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} J(\xi,x,z) \right| \right) \le$$

$$\le \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} D_1(\xi,x,z) \right| +$$

$$+ \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{0<\xi\le T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} J(\xi,x,z) \right| = ||D_1(t,x,z)||_1 + ||J(t,x,z)||_1.$$

Третье свойство выполняется.

Следовательно, $||D_1(t,x,z)||_1$ и остальные функции из (1.14) являются нормами в соответствующих пространствах гладких ограниченных функций.

2 Задача идентификации функции источника специального вида с неизвестным коэффициентом, представимым в виде суммы

2.1 Существование решения задачи

В полосе $G_{[0,T]} = \left\{(t,x,z)\,|\,0 \le t \le T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z),\ t \in (0,T),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{2.2}$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ неизвестной также является функция

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z). \tag{2.3}$$

Пусть заданы условия переопределения:

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \tag{2.4}$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z), \tag{2.5}$$

где α,β—некоторые фиксированные постоянные.

Считаем выполнеными условия согласования:

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x), \tag{2.6}$$

$$u_0(\beta,z) = \psi(0,z), \tag{2.7}$$

$$\varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha), \tag{2.8}$$

и условия на функцию $f(t,x,z)$:

$$\left|f(t,\beta,z)\right| \ge \delta_1 > 0,\ \left|f(t,x,\alpha)\right| \ge \delta_2 > 0,\quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.9}$$

здесь δ_1,δ_2 — некоторые постоянные.

2.1.1 Приведение к прямой задаче

Приведем данную обратную задачу (2.1)–(2.5) к вспомогательной прямой. Для этого сначала в уравнении (2.1) положим $x = \beta$ и выразим из получившегося равенства $\lambda(t, \beta, z)$.

$$\lambda_1(t,\beta) + \lambda_2(t,z) = \frac{u_t(t,\beta,z) - u_{xx}(t,\beta,z) - u_{zz}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}. \tag{2.10}$$

Затем в (2.1) положим $z = \alpha$ и выразим $\lambda(t, x, \alpha)$.

$$\lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,\alpha) = \frac{u_t(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,x,\alpha) - u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}. \tag{2.11}$$

Далее в уравнении (2.1) возьмём $x = \beta$ и $z = \alpha$, выразим $\lambda(t, \beta, \alpha)$.

$$\lambda_1(t,\beta) + \lambda_2(t,\alpha) = \frac{u_t(t,\beta,\alpha) - u_{xx}(t,\beta,\alpha) - u_{zz}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}. \tag{2.12}$$

Сложим равенства (2.10) и (2.11), и в полученное выражение подставим (2.12). Получим

$$\lambda(t,x,z) = \frac{u_t(t,\beta,z) - u_{zz}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} + \frac{u_t(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)} - \\ - \frac{u_t(t,\beta,\alpha) - u_{xx}(t,\beta,\alpha) - u_{zz}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)} - \frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} - \frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}.$$

Затем, используя условия переопределения (2.4), (2.5), получим выражение на неизвестный коэффициент при функции $f(t, x, z)$ в следующем виде

$$\lambda(t,x,z) = g(t,x,z) - \frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} - \frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}, \tag{2.13}$$

где $g(t, x, z)$ — известная функция, имеющая следующий вид:

$$g(t,x,z) = \frac{\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)}{f(t,\beta,z)} + \frac{\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)}{f(t,x,\alpha)} - \\ - \frac{\psi_t(t,\alpha) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}. \tag{2.14}$$

Теперь подставим выражение (2.13) в уравнение (2.1) и перейдем к прямой задаче для уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t,x,z) \cdot \left[-\frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} - \frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)} \right] + G(t,x,z),$$
$$t \in (0,T),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.15)$$

с начальным условием (2.2).

Здесь $G(t,x,z) = f(t,x,z) \cdot g(t,x,z)$ — известная функция.

Пусть $\Phi_1(t,x,z) = \dfrac{f(t,x,z)}{f(t,\beta,z)}$, $\Phi_2(t,x,z) = \dfrac{f(t,x,z)}{f(t,x,\alpha)}$. (2.16)

Относительно входных данных предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (2.17), и удовлетворяют ему.

$$\left| \frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \varphi(t,x) \right| + \left| \frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \psi(t,z) \right| + \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x,z) \right| +$$
$$+ \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} f(t,x,z) \right| \le C, \quad l_1, l_2 = 0,1,\ k_1, k_2 = 0,1,\ldots,6. \quad (2.17)$$

2.1.2 Существование решения прямой задачи

Докажем разрешимость прямой задачи. Для этого воспользуемся методом слабой аппроксимации [14]. Расщепим уравнение (2.15) на четыре дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{4}$ в следах неизвестных функций

$$u_t^\tau = 4 \cdot (u_{xx}^\tau + u_{zz}^\tau),\ n\tau < t \le \left(n + \tfrac{1}{4}\right)\tau; \quad (2.18)$$

$$u_t^\tau = 4 \cdot u_{xx}^\tau \left(t - \tfrac{\tau}{4}, \beta, z\right) \cdot \Phi_1(t,x,z),\ \left(n + \tfrac{1}{4}\right)\tau < t \le \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tau; \quad (2.19)$$

$$u_t^\tau = 4 \cdot u_{zz}^\tau \left(t - \tfrac{\tau}{4}, x, \alpha\right) \cdot \Phi_2(t,x,z),\ \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tau < t \le \left(n + \tfrac{3}{4}\right)\tau; \quad (2.20)$$

$$u_t^\tau = 4 \cdot G(t,x,z),\ \left(n + \tfrac{3}{4}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \quad (2.21)$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \quad (2.22)$$

$$n = 0,1,2,\ldots,(N-1),\ N\tau = T.$$

Далее под n-м целым шагом будем понимать полуинтервал $\big(n\tau, (n+1)\tau\big]$, а под j-м дробным шагом n-го целого шага — полуинтервал $\Big(\left(n+\frac{j-1}{4}\right)\tau, \left(n+\frac{j}{4}\right)\tau\Big]$.

Введём следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
&U_{k_1,k_2}(0) = \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,\\
&U^\tau_{k_1,k_2}(t) = \sup_{n\tau<\xi\le t\le(n+1)\tau}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right|,\\
&k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6,\\
&U(0) = \sum_{k_1=0}^{6}\sum_{k_2=0}^{6}U_{k_1,k_2}(0), \quad U^\tau(t) = \sum_{k_1=0}^{6}\sum_{k_2=0}^{6}U^\tau_{k_1,k_2}(t).
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Справедливы следующие утверждения.

1. $\left|\dfrac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\dfrac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \le U^\tau_{k_1,k_2}(t) \le U^\tau(t),\ k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6,$

$$\xi\in(n\tau,t],\ \ t\in(n\tau,(n+1)\tau]; \tag{2.24}$$

2. функции $U^\tau_{k_1,k_2}(t), U^\tau(t)$ неотрицательные и неубывающие на каждом временном шаге $\big(n\tau,(n+1)\tau\big]$.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x,z)$ задачи (2.18)–(2.22).

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге, $t\in\big(0,\frac{\tau}{4}\big]$, рассматриваем уравнение

$$u^\tau_t = 4\cdot\left(u^\tau_{xx}+u^\tau_{zz}\right).$$

По теореме 1.2 принципа максимума для задачи Коши, имеем

$$\big|u^\tau(\xi,x,z)\big| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|u_0(x,z)\big|,\ 0<\xi\le t,\ t\in\big(0,\tfrac{\tau}{4}\big]. \tag{2.25}$$

Дифференцируя уравнение (2.18) и начальное условие (2.22) по x и по z от 1 до 6 раз, в силу принципа максимума, получим

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,$$
$$0<\xi\le t,\ t\in\left(0,\tfrac{\tau}{4}\right],\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \quad (2.26)$$

Возьмём от обеих частей неравенств (2.25) и (2.26) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\le t}$, сложим их и, согласно обозначений (2.23), получим

$$U^\tau(t)\le U(0). \quad (2.27)$$

Рассмотрим второй дробный шаг, $t\in\left(\frac{\tau}{4},\frac{\tau}{2}\right]$.

$$u_t^\tau = 4\cdot u_{xx}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{4},\beta,z\right)\cdot\Phi_1(t,x,z),$$

здесь функция $\Phi_1(t,x,z)$ задана в (2.16).

Проинтегрируем данное уравнение по временной переменной

$$\int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{\xi} u_t^\tau(\theta,x,z)\,d\theta = 4\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{\xi} u_{xx}^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{4},\beta,z\right)\cdot\Phi_1(\theta,x,z)\,d\theta,\ \tfrac{\tau}{4}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{4},\tfrac{\tau}{2}\right],$$

получим при $\frac{\tau}{4}<\xi\le t,\ t\in\left(\frac{\tau}{4},\frac{\tau}{2}\right]$:

$$u^\tau(\xi,x,z) = u^\tau\left(\tfrac{\tau}{4},x,z\right) + 4\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{\xi} u_{xx}^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{4},\beta,z\right)\cdot\Phi_1(\theta,x,z)\,d\theta.$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \le \left|u^\tau\left(\tfrac{\tau}{4},x,z\right)\right| + 4\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{t}\left|u_{xx}^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{4},\beta,z\right)\right|\cdot\left|\Phi_1(\theta,x,z)\right|d\theta. \quad (2.28)$$

Из условий (2.9), (2.16), (2.17) функция $\Phi_1(t,x,z)$ является ограниченной и имеет ограниченные производные по x и по z до 6 порядка включительно. Возьмём от обеих частей неравенства (2.28) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем

$\sup\limits_{\frac{\tau}{4}<\xi\leq t}$. Учитывая (2.23) и (2.24), получаем оценку

$$U_{0,0}^{\tau}(t) \leq U_{0,0}(0) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{t} U_{2,0}^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{4}\right)\, d\theta. \qquad (2.29)$$

Здесь и далее считаем, что $C > 1$ — некоторые постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от констант, ограничивающих входные данные, и независящие от параметра расщепления τ.

Продифференцируем (2.19) по x и z от одного до 6 раз, получим

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u_t^{\tau}(t,x,z) = 4 \cdot \sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^{i} \cdot \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}} \Phi_1(t,x,z) \cdot \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} u_{xx}^{\tau}(t - \tfrac{\tau}{4}, \beta, z),$$
$$k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6.$$

Проинтегрируем последнее уравнение по временной переменной, получим следующее равенство

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u^{\tau}(\xi,x,z) = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u^{\tau}(\tfrac{\tau}{4},x,z) +$$
$$+ 4 \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{\xi} \sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^{i} \cdot \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}} \Phi_1(\theta,x,z) \cdot \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} u_{xx}^{\tau}(\theta - \tfrac{\tau}{4}, \beta, z)\, d\theta,$$
$$k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6,\ \tfrac{\tau}{4} < \xi \leq t,\ t \in \left(\tfrac{\tau}{4}, \tfrac{\tau}{2}\right].$$

Таким образом, учитывая (2.23) и (2.24), получим оценки на $U_{k_1,k_2}^{\tau}(t)$, $k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6$.

$$U_{k_1,k_2}^{\tau}(t) \leq U_{k_1,k_2}(0) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{t} \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{4}\right)\, d\theta. \qquad (2.30)$$

Складывая оценки (2.29) и (2.30) и учитывая (2.27), получаем

$$U^{\tau}(t) \leq U(0) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{t} U^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{4}\right)\, d\theta.$$

Данное неравенство справедливо для всех $t \in \left(\frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{2}\right]$, поэтому справедлива оценка

$$U^{\tau}(t) \leq U(0) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{2}} U^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{4}\right) d\theta. \tag{2.31}$$

Рассмотрим третий дробный шаг, $t \in \left(\frac{\tau}{2}, \frac{3\tau}{4}\right]$.

$$u_t^{\tau} = 4 \cdot u_{zz}^{\tau}\left(t - \tfrac{\tau}{4}, x, \alpha\right) \cdot \Phi_2(t, x, z),$$

где функция $\Phi_2(t, x, z)$ задана в (2.16).

Проинтегрируем данное уравнение по временной переменной.

$$u^{\tau}(\xi, x, z) = u^{\tau}(\tfrac{\tau}{2}, x, z) + 4 \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi} u_{zz}^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{4}, x, \alpha\right) \cdot \Phi_2(\theta, x, z)\, d\theta,$$

$$\tfrac{\tau}{2} < \xi \leq t,\ t \in \left(\tfrac{\tau}{2}, \tfrac{3\tau}{4}\right].$$

Отсюда, получаем неравенство

$$\left|u^{\tau}(\xi, x, z)\right| \leq \left|u^{\tau}(\tfrac{\tau}{2}, x, z)\right| + 4 \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left|u_{zz}^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{4}, x, \alpha\right)\right| \cdot \left|\Phi_2(\theta, x, z)\right| d\theta,$$

$$\tfrac{\tau}{2} < \xi \leq t,\ t \in \left(\tfrac{\tau}{2}, \tfrac{3\tau}{4}\right]. \tag{2.32}$$

В силу условий (2.9), (2.16), (2.17), функция $\Phi_2(t, x, z)$ является ограниченной и имеет ограниченные производные по x и по z до 6 порядка включительно. Возьмём от обеих частей неравенства (2.32) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{2}<\xi\leq t}$. Учитывая (2.23) и (2.24), получим оценку

$$U_{0,0}^{\tau}(t) \leq U_{0,0}\left(\tfrac{\tau}{2}\right) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} U_{0,2}^{\tau}\left(\theta - \tfrac{\tau}{4}\right) d\theta. \tag{2.33}$$

Дифференцируя (2.20) по x и z от одного до 6 раз, получим

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u_t^{\tau}(t, x, z) = 4 \cdot \sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^{j} \cdot \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^{j}\partial z^{k_2}} \Phi_2(t, x, z) \cdot \frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}} u_{zz}^{\tau}\left(t - \tfrac{\tau}{4}, x, \alpha\right),$$

$$k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6.$$

Интегрируя данное уравнение по временной переменной, получим

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)=\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^\tau\left(\tfrac{\tau}{2},x,z\right)+$$

$$+4\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\xi}\sum_{j=0}^{k_1}C_{k_1}^{j}\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^{j}\partial z^{k_2}}\Phi_2(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}u^\tau_{zz}\left(\theta-\tfrac{\tau}{4},x,\alpha\right)\,d\theta,$$

$$k_1,k_2=0,1,\ldots,6,\ \tfrac{\tau}{2}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{2},\tfrac{3\tau}{4}\right].$$

Учитывая (2.23) и (2.24), получим оценки

$$U^\tau_{k_1,k_2}(t)\le U_{k_1,k_2}\left(\tfrac{\tau}{2}\right)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\sum_{k_1,k_2=0}^{6}U^\tau_{k_1,k_2}\left(\theta-\tfrac{\tau}{4}\right)\,d\theta. \tag{2.34}$$

Складывая оценки (2.33) и (2.34) и учитывая (2.31), получаем

$$U^\tau(t)\le U(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{2}}U^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{4}\right)\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}U^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{4}\right)\,d\theta.$$

Данное неравенство справедливо для всех $t\in\left(\frac{\tau}{2},\frac{3\tau}{4}\right]$, поэтому справедливо следующее

$$U^\tau(t)\le U(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3\tau}{4}}U^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{4}\right)\,d\theta. \tag{2.35}$$

На четвертом дробном шаге, $t\in\left(\frac{3\tau}{4},\tau\right]$, рассмотрим уравнение

$$u^\tau_t=4\cdot G(t,x,z).$$

Интегрируя обе части уравнения по временной переменной, получим

$$u^\tau(\xi,x,z)=u^\tau\left(\tfrac{3\tau}{4},x,z\right)+4\cdot\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{\xi}G(\theta,x,z)\,d\theta,\ \tfrac{3\tau}{4}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{3\tau}{4},\tau\right].$$

Справедливо неравенство

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right|\le\left|u^\tau\left(\tfrac{3\tau}{4},x,z\right)\right|+4\cdot\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}\left|G(\theta,x,z)\right|d\theta,\ \tfrac{3\tau}{4}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{3\tau}{4},\tau\right]. \tag{2.36}$$

Берем от обеих частей неравенства (2.36) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{3\tau}{4}<\xi\le t}$. Получаем оценку на $U^\tau_{0,0}(t)$.

Дифференцируем (2.21) по x и по z от 1 до 6 раз, берем от полученного выражения сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{3\tau}{4}<\xi\le t}$. Таким образом, получаем оценки на $U^\tau_{k_1,k_2}(t)$, $k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6$. Складывая полученные оценки, с учетом (2.35), получаем

$$U^\tau(t) \le U(0) + C\cdot\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{\tau}\Big(U^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{4}\right)+1\Big)\,d\theta,\ t\in\left(\tfrac{3\tau}{4},\tau\right].$$

Следовательно, справедлива оценка

$$U^\tau(t) \le U(0) + C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{4}}^{\tau}\Big(U^\tau\left(\theta-\tfrac{\tau}{4}\right)+1\Big)\,d\theta,\ t\in(0,\tau].$$

Из свойств определенного интеграла, в силу неубывания функции $U^\tau(t)$, получим

$$U^\tau(t) \le U(0) + C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\Big(U^\tau(\theta)+1\Big)\,d\theta,\ t\in(0,\tau].$$

По лемме 1.1 Гронуолла, получим

$$U^\tau(t) \le U(0)\cdot e^{C\tau} + \frac{C}{C}\cdot\left(e^{C\tau}-1\right),$$

$$U^\tau(t) \le \Big(U(0)+1\Big)\cdot e^{C\tau}-1,\ \forall t\in(0,\tau]. \tag{2.37}$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t\in(\tau,2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$U^\tau(t) \le \Big(U(\tau)+1\Big)\cdot e^{C\tau}-1 \le \Big[\text{согласно (2.37)}\Big] \le$$
$$\le \Big(U(0)+1\Big)\cdot e^{C\tau}\cdot e^{C\tau}-1 = \Big(U(0)+1\Big)\cdot e^{2C\tau}-1,$$

то есть $U^\tau(t) \le \Big(U(0)+1\Big)\cdot e^{2C\tau}-1,\ \forall t\in(0,2\tau]$.

Проделав аналогичные рассуждения на втором целом временном шаге, $t \in (2\tau, 3\tau]$, получим оценку

$$U^\tau(t) \leq \big(U(0)+1\big) \cdot e^{3C\tau} - 1,\ \forall t \in (0, 3\tau].$$

Через конечное число шагов на интервале $\big((N-1)\tau, N\tau\big]$ получим

$$U^\tau(t) \leq \big(U(0)+1\big) \cdot e^{CN\tau} - 1 = \big(U(0)+1\big) \cdot e^{CT} - 1 \leq C,\ \forall t \in \big((N-1)\tau, N\tau\big].$$

В итоге получим

$$U^\tau(t) \leq \big(U(0)+1\big) \cdot e^{CT} - 1 \leq C,\ \forall t \in [0, T].$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(t,x,z)\right| \leq C,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6, (t,x,z) \in G_{[0,T]}. \qquad (2.38)$$

Из оценок (2.38) следует, что правые части уравнений (2.18)–(2.21) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ.

$$\left|u_t^\tau(t,x,z)\right| \leq C,\ (t,x,z) \in G_{[0,T]}.$$

Дифференцируя уравнения (2.18)–(2.21) по x и z, в силу (2.38), получим оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_t^\tau(t,x,z)\right| \leq C,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4. \qquad (2.39)$$

Оценки (2.38), (2.39) гарантируют выполнение условий теоремы 1.1 Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (2.18)–(2.22) сходится вместе с производными по x и по z до четвертого порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы 1.3 сходимости МСА является решением задачи (2.15), (2.2), причем

$u(t,x,z) \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, где

$$C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right) = \left\{ u(t,x,z) \;\middle|\; \frac{\partial^k}{\partial t^k}u, \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u \in C\left(G_{[0,T]}\right), \right.$$
$$\left. k = 0,1,\ldots,l, k_1 = 0,1,\ldots,l_1, k_2 = 0,1,\ldots,l_2 \right\}.$$

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$

$$\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u(t,x,z) \right| \leq C, \;\; k_1, k_2 = 0,1,\ldots,4. \tag{2.40}$$

2.1.3 Существование решения обратной задачи

Теперь докажем, что пара функций $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$, где $\lambda(t,x,z)$ определяется соотношением (2.13) и удовлетворяет условию (2.3), является решением обратной задачи. Так как $u(t,x,z)$ — решение прямой задачи, то при подстановке $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ в (2.1) и (2.2) получим тождества.

Из (2.13) и (2.15), с учетом условий (2.9), (2.17), (2.40), следует, что $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ принадлежат классу

$$Z(T) = \left\{ u(t,x,z), \lambda(t,x,z) \;\middle|\; u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big), \lambda(t,x,z) \in C^{0,4,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,T]}\big) \right\},$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u(t,x,z) \right| + \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \lambda(t,x,z) \right| \leq C. \tag{2.41}$$

Докажем выполнение условия переопределения (2.4). Для этого положим в (2.15) $z = \alpha$. Имеем:

$$u_t(t,x,\alpha) = u_{xx}(t,x,\alpha) + u_{zz}(t,x,\alpha) +$$
$$+ f(t,x,\alpha) \cdot \left[g(t,x,\alpha) - \frac{u_{xx}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)} - \frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)} \right],$$

где функция $g(t,x,\alpha)$ известна и задана соотношением (2.14).

Преобразуем выражение следующим образом:

$$u_t(t,x,\alpha) = u_{xx}(t,x,\alpha) + \varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x) + \\ + \big(\varphi_{xx}(t,\beta) - u_{xx}(t,\beta,\alpha)\big) \cdot \frac{f(t,x,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}.$$

Введём обозначение:

$$v^1(t,x) = u(t,x,\alpha) - \varphi(t,x). \tag{2.42}$$

В силу (2.6), справедливо следующее равенство

$$v^1(0,x) = u(0,x,\alpha) - \varphi(0,x) = 0.$$

Используя обозначения (2.42), получим

$$\begin{cases} v^1_t(t,x) = v^1_{xx}(t,x) - \dfrac{f(t,x,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)} \cdot v^1_{xx}(t,\beta), \\ v^1(0,x) = 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Задача (2.43) удовлетворяет условиям леммы 1.2, согласно которой решение задачи (2.43) единственно. Очевидно, что решением является функция $v^1(t,x) \equiv 0$. Таким образом, из (2.42) следует выполнение условия (2.4).

Теперь докажем условие переопределения (2.5). Рассмотрим (2.15) на гиперплоскости $x = \beta$. Получим:

$$u_t(t,\beta,z) = u_{xx}(t,\beta,z) + u_{zz}(t,\beta,z) + \\ + f(t,\beta,z) \cdot \left[g(t,\beta,z) - \frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} - \frac{u_{zz}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}\right],$$

где функция $g(t,\beta,z)$ известна и задана соотношением (2.14).

Используя условия согласования (2.6)–(2.8), получим уравнение

$$u_t(t,\beta,z) = u_{zz}(t,\beta,z) + \psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z) - \big(u_{zz}(t,\beta,\alpha) - \psi_{zz}(t,\alpha)\big) \cdot \frac{f(t,\beta,z)}{f(t,\beta,\alpha)}.$$

Обозначим

$$v^2(t,z) = u(t,\beta,z) - \psi(t,z). \tag{2.44}$$

Тогда из (2.7) следует равенство

$$v^2(0,x) = u(0,\beta,z) - \psi(0,z) = 0.$$

Используя обозначения (2.44), получим задачу

$$\begin{cases} v_t^2(t,z) = v_{zz}^2(t,z) - \dfrac{f(t,\beta,z)}{f(t,\beta,\alpha)} \cdot v_{zz}^2(t,\alpha), \\ v^2(0,x) = 0. \end{cases} \tag{2.45}$$

Задача (2.45) удовлетворяет условиям леммы 1.2, согласно которой решение задачи (2.45) единственно. Таким решением является функция $v^2(t,z) \equiv 0$. Отсюда, учитывая (2.44), следует выполнение условия (2.5).

Итак, условия переопределения выполнены. Следовательно, пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ является решением исходной задачи (2.1)–(2.5).

Доказана

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* (2.9), (2.17). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ *обратной задачи* (2.1)–(2.8) *в классе* $Z(T)$, *удовлетворяющее соотношению* (2.41).

2.2 Единственность решения задачи

Пусть выполняются условия (2.9), (2.17), (2.41). Доказательство единственности решения задачи (2.1)–(2.5) будем вести от противного.

Пусть $\{u(t,x,z), \lambda(t,x,z)\}$ и $\{\tilde{u}(t,x,z), \tilde{\lambda}(t,x,z)\}$ — два классических решения задачи (2.1)–(2.5). Пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ — решение, определяемое соотношением (2.13) и удовлетворяющее условию (2.3), а пара функций $\tilde{u}(t,x,z), \tilde{\lambda}(t,x,z) = \widetilde{\lambda_1}(t,x) + \widetilde{\lambda_2}(t,z)$ — некоторое другое решение задачи (2.1)–(2.5), удовлетворяющее условию (2.41). Тогда справедливы следующие соотношения.

$$u_t(t,x,z) = u_{xx}(t,x,z) + u_{zz}(t,x,z) + f(t,x,z) \cdot \lambda(t,x,z),$$

$$\tilde{u}_t(t,x,z) = \tilde{u}_{xx}(t,x,z) + \tilde{u}_{zz}(t,x,z) + f(t,x,z)\cdot\tilde{\lambda}(t,x,z),$$

$$\begin{cases} u(0,x,z) = u_0(x,z), \;\; \tilde{u}(0,x,z) = u_0(x,z), \\ u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \;\; \tilde{u}(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \\ u(t,\beta,z) = \psi(t,z), \;\; \tilde{u}(t,\beta,z) = \psi(t,z). \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$w(t,x,z) = u(t,x,z) - \tilde{u}(t,x,z),$$

$$\gamma(t,x,z) = \gamma_1(t,x) + \gamma_2(t,z) = \lambda(t,x,z) - \tilde{\lambda}(t,x,z).$$

Пара функций $w(t,x,z), \gamma(t,x,z)$ является решением задачи Коши:

$$w_t(t,x,z) = w_{xx}(t,x,z) + w_{zz}(t,x,z) + f(t,x,z)\cdot\gamma(t,x,z), \tag{2.46}$$

$$w(0,x,z) = 0,$$
$$w(t,x,\alpha) = 0, \tag{2.47}$$
$$w(t,\beta,z) = 0.$$

Полагаем в уравнении (2.46) $x = \beta$, $z = \alpha$. Используя (2.47), выражаем коэффициент при функции $f(t,x,z)$. Подставляя его выражение в (2.46), получим

$$w_t = w_{xx} + w_{zz} - f(t,x,z)\cdot\left(\frac{w_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} + \frac{w_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}\right), \tag{2.48}$$

$$w(0,x,z) = 0. \tag{2.49}$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на $[0,T]$ функции

$$p_{k_1,k_2}(t) = \sup_{G_{[0,T]}}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} w(\xi,x,z)\right|, \; k_1,k_2 = 0,1,2.$$

Учитывая (2.9), (2.41), в силу теоремы 1.2 принципа максимума, для уравнения (2.48) получим справедливость неравенства

$$\big|w(\xi,x,z)\big| \le C\cdot\big(p_{2,0} + p_{0,2}\big)\cdot\xi, \; 0 < \xi \le t, (t,x,z) \in G_{[0,T]}.$$

Откуда, в силу неотрицательности функций $p_{k_1,k_2}(t)$, следует оценка

$$p_{0,0}(t) \le C\cdot t\cdot\sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t), \; 0 \le t \le T. \tag{2.50}$$

Дифференцируя (2.48), (2.49) один, а затем два раза по x и по z, в силу принципа максимума, для уравнений

$$\frac{\partial^{1+k_1+k_2}}{\partial t \partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} w(t,x,z) = \frac{\partial^{k_1+k_2+2}}{\partial x^{k_1+2} \partial z^{k_2}} w(t,x,z) + \frac{\partial^{k_1+k_2+2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2+2}} w(t,x,z) -$$

$$- \sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i \cdot \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1} \partial z^i} \Phi_1(t,x,z) \cdot \frac{\partial^{2+k_2-i}}{\partial x^2 \partial z^{k_2-i}} w(t,\beta,z) -$$

$$- \sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j \cdot \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j \partial z^{k_2}} \Phi_2(t,x,z) \cdot \frac{\partial^{k_1-j+2}}{\partial x^{k_1-j} \partial z^2} w(t,x,\alpha), \quad k_1, k_2 = 0,1,2,$$

получим аналогичные оценки:

$$p_{k_1,k_2}(t) \le C \cdot t \cdot \sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t), \; k_1, k_2 = 0,1,2, \; 0 \le t \le T. \tag{2.51}$$

Сложим (2.50) и (2.51), получим

$$\sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t) \le C \cdot t \cdot \sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t), \; 0 \le t \le T.$$

Отсюда следует, что при $t \in [0, \xi]$, где $\xi < \frac{1}{C}$, выполняется

$$\sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} p_{k_1,k_2}(t) = 0.$$

Значит, $w(t,x,z) = 0$ при $(t,x,z) \in G_{[0,\xi]}$. Повторяя рассуждения для $t \in [\xi, 2\xi]$, получим, что $w(t,x,z) = 0$ при $(t,x,z) \in G_{[0,2\xi]}$. Через конечное число шагов докажем, что $w(t,x,z) \equiv 0$ в $G_{[0,T]}$. То есть $u(t,x,z) = \tilde{u}(t,x,z)$ в $G_{[0,T]}$.

Из (2.46) и (2.47) для $\gamma(t,x,z)$ следует выполнение соотношения

$$f(t,x,z) \cdot \gamma(t,x,z) = 0. \tag{2.52}$$

Рассматривая (2.52) на гиперплоскостях $x = \beta$ и $z = \alpha$, в $G_{[0,T]}$ получаем справедливость равенств:

$$f(t,\beta,z) \cdot \big(\gamma_1(t,\beta) + \gamma_2(t,z)\big) = 0,$$

$$f(t,x,\alpha) \cdot \big(\gamma_1(t,x) + \gamma_2(t,\alpha)\big) = 0,$$

$$f(t,\beta,\alpha) \cdot \big(\gamma_1(t,\beta) + \gamma_2(t,\alpha)\big) = 0.$$

В силу (2.9), выполняются следующие соотношения:

$$\gamma_1(t,\beta) + \gamma_2(t,z) = 0, \tag{2.53}$$

$$\gamma_1(t,x) + \gamma_2(t,\alpha) = 0, \tag{2.54}$$

$$\gamma_1(t,\beta) + \gamma_2(t,\alpha) = 0. \tag{2.55}$$

Сложим равенства (2.53) и (2.54).

$$\gamma_1(t,x) + \gamma_2(t,z) + \gamma_1(t,\beta) + \gamma_2(t,\alpha) = 0.$$

Из (2.55) следует, что

$$\gamma(t,x,z) = \gamma_1(t,x) + \gamma_2(t,z) = 0,$$

то есть

$$\lambda(t,x,z) - \tilde{\lambda}(t,x,z) = 0,\ t \in [0,T],$$

а следовательно,

$$\lambda(t,x,z) = \tilde{\lambda}(t,x,z),\ t \in [0,T].$$

Доказана

Теорема 2.2. *Решение* $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ *задачи* (2.1)–(2.9), *удовлетворяющее соотношению* (2.41), *единственно в классе* $Z(T)$.

Из теорем 2.1 и 2.2 следует

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* (2.6)–(2.9), (2.17). *Тогда в классе* $Z(T)$ *существует единственное решение* $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ *задачи* (2.1)–(2.5), *удовлетворяющее соотношению* (2.41).

2.3 Оценка устойчивости решения по входным данным

Докажем непрерывную зависимость решения задачи (2.1)–(2.5) от входных данных.

Рассмотрим в $G_{[0,T]}$ две задачи Коши, удовлетворяющие теореме 2.3:

$$u_t^i = u_{xx}^i + u_{zz}^i + f^i(t,x,z) \cdot \lambda^i(t,x,z),$$

$$\lambda^i(t,x,z) = \lambda_1^i(t,x) + \lambda_2^i(t,z),$$

$$u^i(0,x,z) = u_0^i(x,z),$$

$$u^i(t,x,\alpha) = \varphi^i(t,x),$$

$$u^i(t,\beta,z) = \psi^i(t,z),$$

где $i = 1,2;$ α, β — некоторые фиксированные постоянные.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &U = u^1 - u^2, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \lambda_1^1 - \lambda_1^2 + \lambda_2^1 - \lambda_2^2, \\ &F = f^1 - f^2, \quad U_0 = u_0^1 - u_0^2, \quad \Phi = \varphi^1 - \varphi^2, \quad \Psi = \psi^1 - \psi^2. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Вычтем из задачи при i=1 задачу при i=2. Согласно обозначений (2.56), получим задачу:

$$U_t = U_{xx} + U_{zz} + F \cdot \lambda^1 + f^2 \cdot \Lambda, \tag{2.57}$$

$$U(0,x,z) = U_0(x,z), \tag{2.58}$$

$$U(t,x,\alpha) = \Phi(t,x), \tag{2.59}$$

$$U(t,\beta,z) = \Psi(t,z). \tag{2.60}$$

Полагая в уравнении (2.57) $x = \beta, z = \alpha$ и используя (2.59) и (2.60), получаем выражение для неизвестного коэффициента в следующем виде

$$\begin{aligned} \Lambda(t,x,z) = &-\frac{U_{xx}(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} - \frac{U_{zz}(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} + \\ &+ \frac{\Psi_t(t,z) - \Psi_{zz}(t,z) - F(t,\beta,z) \cdot \lambda^1(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} + \\ &+ \frac{\Phi_t(t,x) - \Phi_{xx}(t,x) - F(t,x,\alpha) \cdot \lambda^1(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} - \\ &- \frac{\Psi_t(t,\alpha) - \Phi_{xx}(t,\beta) - \Psi_{zz}(t,\alpha) + F(t,\beta,\alpha) \cdot \lambda^1(t,\beta,\alpha)}{f^2(t,\beta,\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Подставляя выражение (2.61) в уравнение (2.57), получаем задачу Коши для уравнения

$$
\begin{aligned}
U_t(t,x,z) = U_{xx}(t,x,z) + U_{zz}(t,x,z) + F(t,x,z)\cdot\lambda^1(t,x,z) + \\
+ f^2(t,x,z)\cdot\Bigg(-\frac{U_{xx}(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} - \frac{U_{zz}(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} + \\
+ \frac{\Psi_t(t,z) - \Psi_{zz}(t,z) - F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} + \\
+ \frac{\Phi_t(t,x) - \Phi_{xx}(t,x) - F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} - \\
- \frac{\Psi_t(t,\alpha) - \Phi_{xx}(t,\beta) - \Psi_{zz}(t,\alpha) + F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)}{f^2(t,\beta,\alpha)}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

с начальным условием (2.58).

Воспользуемся методом слабой аппроксимации [14]. Расщепим уравнение (2.62) на пять дробных шагов и линеаризуем сдвигом по времени на $\frac{\tau}{5}$ в членах, содержащих следы неизвестных функций

$$U_t^\tau = 5\cdot\left(U_{xx}^\tau + U_{zz}^\tau\right),\ n\tau < t \le \left(n+\tfrac{1}{5}\right)\tau; \tag{2.63}$$

$$U_t^\tau = -5\cdot A_1(t,x,z)\cdot U_{xx}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right),\ \left(n+\tfrac{1}{5}\right)\tau < t \le \left(n+\tfrac{2}{5}\right)\tau; \tag{2.64}$$

$$U_t^\tau = -5\cdot A_2(t,x,z)\cdot U_{zz}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha\right),\ \left(n+\tfrac{2}{5}\right)\tau < t \le \left(n+\tfrac{3}{5}\right)\tau; \tag{2.65}$$

$$U_t^\tau = 5\cdot F(t,x,z)\cdot\lambda^1(t,x,z),\ \left(n+\tfrac{3}{5}\right)\tau < t \le \left(n+\tfrac{4}{5}\right)\tau; \tag{2.66}$$

$$U_t^\tau = 5\cdot K(t,x,z),\ \left(n+\tfrac{4}{5}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \tag{2.67}$$

$$U^\tau(0,x,z) = U_0(x,z), \tag{2.68}$$

$$n = 0,1,2,\dots,(N-1),\ N\tau = T,$$

здесь функции $K(t,x,z), A_i(t,x,z), i = 1,2,3,$ известны и заданы следующими соотношениями:

$$A_1(t,x,z) = \frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,\beta,z)},\ A_2(t,x,z) = \frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,x,\alpha)},\ A_3(t,x,z) = \frac{f^2(t,x,z)}{f^2(t,\beta,\alpha)},$$

$$K(t,x,z) = A_1(t,x,z)\cdot\Big(\Psi_t(t,z) - \Psi_{zz}(t,z) - F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)\Big) +$$
$$+ A_2(t,x,z)\cdot\Big(\Phi_t(t,x) - \Phi_{xx}(t,x) - F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)\Big) -$$
$$- A_3(t,x,z)\cdot\Big(\Psi_t(t,\alpha) - \Phi_{xx}(t,\beta) - \Psi_{zz}(t,\alpha) + F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)\Big).$$

Далее под n-м целым шагом будем понимать полуинтервал $\big(n\tau,(n+1)\tau\big]$, а под j-м дробным шагом n-го целого шага — полуинтервал $\Big(\big(n+\frac{j-1}{5}\big)\tau, \big(n+\frac{j}{5}\big)\tau\Big]$.

Рассмотрим нулевой целый шаг, $n = 0$. На первом дробном шаге, $t \in \big(0, \frac{\tau}{5}\big]$, рассматриваем уравнение

$$U^\tau_t(t,x,z) = 5\cdot\big(U^\tau_{xx}(t,x,z) + U^\tau_{zz}(t,x,z)\big),$$

с начальным условием (2.56).

По теореме 1.2 принципа максимума для задачи Коши, для уравнения (2.63) получаем оценку:

$$\big|U^\tau(\xi,x,z)\big| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\big|U_0(x,z)\big|,\ 0<\xi\le t, t\in\big(0,\tfrac{\tau}{5}\big]. \tag{2.69}$$

Дифференцируя уравнение (2.63) по x и по z от одного до четырех раз, получаем

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|,\ 0<\xi\le t,\ t\in\big(0,\tfrac{\tau}{5}\big],$$
$$k_1,k_2 = 0,1,\ldots,4. \tag{2.70}$$

Берем от неравенств (2.69), (2.70) $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{0<\xi\le t}$. Суммируя, приходим к неравенству

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right| \le$$
$$\le \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|,\ t\in\big(0,\tfrac{\tau}{5}\big]. \tag{2.71}$$

На втором дробном шаге, $t \in \left(\frac{\tau}{5}, \frac{2\tau}{5}\right]$, рассмотрим уравнение

$$U_t^\tau(t,x,z) = -5 \cdot A_1(t,x,z) \cdot U_{xx}^\tau\left(t - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right).$$

Интегрируя уравнение (2.64), приходим к следующему соотношению

$$U^\tau(\xi,x,z) = U^\tau\left(\tfrac{\tau}{5}, x, z\right) - 5 \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\xi} A_1(\theta,x,z) \cdot U_{xx}^\tau\left(\theta - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right) d\theta,$$
$$0 < \xi \le t, t \in \left(\tfrac{\tau}{5}, \tfrac{2\tau}{5}\right].$$

Функция $A_1(t,x,z)$ ограничена. Следовательно, справедливо следующее неравенство

$$\left|U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|U^\tau\left(\tfrac{\tau}{5}, x, z\right)\right| + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{t} \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|U_{xx}^\tau\left(\theta - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right)\right| d\theta,$$
$$0 < \xi \le t, t \in \left(\tfrac{\tau}{5}, \tfrac{2\tau}{5}\right]. \quad (2.72)$$

Дифференцируя уравнение (2.64) по x и по z от одного до четырех раз, приходим к соотношению

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_t^\tau(t,x,z) = -5 \cdot \sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i} A_1(t,x,z) \cdot \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} U_{xx}^\tau(t - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z),$$
$$k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4. \quad (2.73)$$

Проинтегрируем уравнение (2.73) по временной переменной.

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\xi,x,z) = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^\tau(\tfrac{\tau}{5}, x, z) -$$
$$- 5 \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\xi} \sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i \cdot \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i} A_1(\theta,x,z) \cdot \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} U_{xx}^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z)\, d\theta,$$
$$0 < \xi \le t, t \in \left(\tfrac{\tau}{5}, \tfrac{2\tau}{5}\right], k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4.$$

В силу ограниченности всех производных по x и по z до четвертого порядка включительно от функции $A_1(t,x,z)$, справедливо следующее неравенство

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau\left(\tfrac{\tau}{5},x,z\right)\right| +$$

$$+ C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^\tau_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta,\ 0<\xi\le t,$$

$$t\in\left(\tfrac{\tau}{5},\tfrac{2\tau}{5}\right],k_1,k_2=0,1,\ldots,4. \quad (2.74)$$

Берем от неравенств (2.72), (2.74) $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{5}<\xi\le t}$. Суммируя, приходим к соотношению

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right| \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau\left(\tfrac{\tau}{5},x,z\right)\right| +$$

$$+ C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^\tau_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta \le (2.71) \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right| +$$

$$+ C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^\tau_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{5},\tfrac{2\tau}{5}\right].$$

Так как данное неравенство справедливо для всех $t\in\left(\frac{\tau}{5},\frac{2\tau}{5}\right]$, то справедлива оценка:

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right| +$$

$$+ C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^\tau_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta. \quad (2.75)$$

Рассмотрим третий дробный шаг, $t\in\left(\frac{2\tau}{5},\frac{3\tau}{5}\right]$.

$$U^\tau_t(t,x,z) = -5\cdot A_2(t,x,z)\cdot U^\tau_{zz}\left(t-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha\right).$$

Функция $A_2(t,x,z)$ и её производные по x и по z до четвертого порядка включительно ограничены.

Интегрируя уравнение (2.65) по временной переменной, приходим к следующему соотношению:

$$U^\tau(\xi,x,z) = U^\tau\left(\tfrac{2\tau}{5},x,z\right) - 5\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\xi} A_2(\theta,x,z)\cdot U^\tau_{zz}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha\right)\,d\theta,$$

$$0<\xi\le t, t\in\left(\tfrac{2\tau}{5},\tfrac{3\tau}{5}\right].$$

Справедливо неравенство

$$\left|U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|U^\tau\left(\tfrac{2\tau}{5},x,z\right)\right| + C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|U^\tau_{zz}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha\right)\right|d\theta,$$

$$0<\xi\le t, t\in\left(\tfrac{2\tau}{5},\tfrac{3\tau}{5}\right]. \quad (2.76)$$

Дифференцируя уравнение (2.65) по x и по z от одного до четырех раз, получаем

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau_t(t,x,z) = -5\cdot\sum_{j=0}^{k_1}C^j_{k_1}\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}A_2(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^\tau_{zz}(t-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha),$$

$$t\in\left(\tfrac{2\tau}{5},\tfrac{3\tau}{5}\right],\ k_1,k_2=0,1,\ldots,4. \quad (2.77)$$

Проинтегрируем уравнение (2.77) по временной переменной.

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z) = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\tfrac{2\tau}{5},x,z) -$$

$$-5\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\xi}\sum_{j=0}^{k_1}C^j_{k_1}\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}A_2(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^\tau_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\,d\theta,$$

$$0<\xi\le t, t\in\left(\tfrac{2\tau}{5},\tfrac{3\tau}{5}\right], k_1,k_2=0,1,\ldots,4.$$

Справедливо следующее неравенство

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau\left(\tfrac{2\tau}{5},x,z\right)\right| +$$

$$+ C \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{t} \sum_{j=0}^{k_1} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}} U^{\tau}_{zz}(\theta - \tfrac{\tau}{5}, x, \alpha) \right| d\theta,\ 0 < \xi \le t,$$

$$t \in \left(\tfrac{2\tau}{5}, \tfrac{3\tau}{5}\right],\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4. \quad (2.78)$$

Берем от неравенств (2.76), (2.78) $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{\frac{2\tau}{5}<\xi\le t}$. Суммируя, приходим к соотношению

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^{\tau}(\xi, x, z) \right| \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^{\tau}\left(\tfrac{2\tau}{5}, x, z\right) \right| +$$

$$+ C \cdot \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1} \int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{t} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}} U^{\tau}_{zz}(\theta - \tfrac{\tau}{5}, x, \alpha) \right| d\theta \le (2.75) \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x, z) \right| +$$

$$+ C \cdot \sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2} \int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} U^{\tau}_{xx}\left(\theta - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right) \right| d\theta +$$

$$+ C \cdot \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1} \int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{t} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}} U^{\tau}_{zz}(\theta - \tfrac{\tau}{5}, x, \alpha) \right| d\theta,\ t \in \left(\tfrac{2\tau}{5}, \tfrac{3\tau}{5}\right].$$

Так как данное неравенство справедливо для всех $t \in \left(\frac{2\tau}{5}, \frac{3\tau}{5}\right]$, то справедлива следующая оценка:

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U^{\tau}(\xi, x, z) \right| \le \sum_{k_1,k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} U_0(x, z) \right| +$$

$$+ C \cdot \sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2} \int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} U^{\tau}_{xx}\left(\theta - \tfrac{\tau}{5}, \beta, z\right) \right| d\theta +$$

$$+ C \cdot \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1} \int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}} \sup_{\frac{2\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}} U^{\tau}_{zz}(\theta - \tfrac{\tau}{5}, x, \alpha) \right| d\theta. \quad (2.79)$$

Рассмотрим на четвертом дробном шаге, $t \in \left(\frac{3\tau}{5}, \frac{4\tau}{5}\right]$, уравнение

$$U_t^\tau = 5 \cdot F(t,x,z) \cdot \lambda^1(t,x,z).$$

Проинтегрируем по временной переменной уравнение (2.66).

$$U^\tau(\xi,x,z) = U^\tau\left(\tfrac{3\tau}{5},x,z\right) + 5 \cdot \int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\xi} F(\theta,x,z)\cdot\lambda^1(\theta,x,z)\,d\theta,$$

$$0 < \xi \le t, t \in \left(\tfrac{3\tau}{5}, \tfrac{4\tau}{5}\right].$$

В силу теоремы 2.3, функция $\lambda^1(t,x,z)$ и ее производные по x и по z до четвертого порядка включительно непрерывны и ограничены в $G_{[0,T]}$. Значит, верно неравенство

$$\left|U^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|U^\tau\left(\tfrac{3\tau}{5},x,z\right)\right| + C\cdot\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|F(\theta,x,z)\right|d\theta,$$

$$0 < \xi \le t, t \in \left(\tfrac{3\tau}{5}, \tfrac{4\tau}{5}\right]. \quad (2.80)$$

Дифференцируя уравнение (2.66) по x и по z от одного до четырех раз, получаем следующее соотношение

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_t^\tau(t,x,z) = 5\cdot\sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j \cdot \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j \partial z^{k_2}}F(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\lambda_1^1(t,x) +$$

$$+ 5\cdot\sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i \cdot \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i}F(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\lambda_2^1(t,z),$$

$$t \in \left(\tfrac{3\tau}{5}, \tfrac{4\tau}{5}\right], k_1, k_2 = 0,1,\ldots,4. \quad (2.81)$$

Интегрируем уравнение (2.81) по временной переменной.

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z) = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\tfrac{3\tau}{5},x,z) +$$

$$+ 5\cdot\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\xi}\sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j \cdot \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}F(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\lambda_1^1(\theta,x)\,d\theta +$$

$$+ 5 \cdot \int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\xi} \sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i \cdot \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1} \partial z^i} F(\theta, x, z) \cdot \frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}} \lambda_2^1(\theta, z)\, d\theta,$$

$$0 < \xi \le t, t \in \left(\tfrac{3\tau}{5}, \tfrac{4\tau}{5}\right], k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4.$$

Справедливо

$$\left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} U^\tau(\xi, x, z) \right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} U^\tau\left(\tfrac{3\tau}{5}, x, z\right) \right| +$$

$$+ C \cdot \int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{t} \sum_{j=0}^{k_1} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j \partial z^{k_2}} F(\theta, x, z) \right| d\theta +$$

$$+ C \cdot \int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{t} \sum_{i=0}^{k_2} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1} \partial z^i} F(\theta, x, z) \right| d\theta,$$

$$0 < \xi \le t, t \in \left(\tfrac{3\tau}{5}, \tfrac{4\tau}{5}\right], k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4. \quad (2.82)$$

Берем от обеих частей неравенств (2.80) и (2.82) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}$. Просуммируем получившиеся выражения.

$$\sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{4} \sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} U^\tau(\xi, x, z) \right| \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} U^\tau\left(\tfrac{3\tau}{5}, x, z\right) \right| +$$

$$+ C \cdot \sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{4} \sum_{j=0}^{k_1} \int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{t} \sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j \partial z^{k_2}} F(\theta, x, z) \right| d\theta +$$

$$+ C \cdot \sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{4} \sum_{i=0}^{k_2} \int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{t} \sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1} \partial z^i} F(\theta, x, z) \right| d\theta \le (2.79) \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{4} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} U_0(x, z) \right| +$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^{j}\partial z^{k_2}}F(\theta,x,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}}F(\theta,x,z)\right|d\theta,\ \ t\in\left(\tfrac{3\tau}{5},\tfrac{4\tau}{5}\right].$$

Данное неравенство справедливо для всех $t\in\left(\frac{3\tau}{5},\frac{4\tau}{5}\right]$, поэтому из него следует

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\le$$

$$\le\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\frac{4\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^{j}\partial z^{k_2}}F(\theta,x,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\frac{4\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}}F(\theta,x,z)\right|d\theta.\quad(2.83)$$

Согласно обозначений (1.14), из неравенства (2.83) следует оценка

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right|\le$$

$$\le\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^\tau_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\frac{4\tau}{5}}||F||_1\,d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}}\sup_{\frac{3\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^\tau_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\right|d\theta. \quad (2.84)$$

Рассмотрим пятый дробный шаг, $t\in\left(\frac{4\tau}{5},\tau\right]$. Уравнение (2.67) перепишем в следующем виде

$$U^\tau_t(t,x,z)=5A_1(t,x,z)\cdot\Big(\Psi_t(t,z)-\Psi_{zz}(t,z)-F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)\Big)+$$

$$+5A_2(t,x,z)\cdot\Big(\Phi_t(t,x)-\Phi_{xx}(t,x)-F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)\Big)-5A_3(t,x,z)\times$$

$$\times\Big(\Psi_t(t,\alpha)-\Phi_{xx}(t,\beta)-\Psi_{zz}(t,\alpha)+F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)\Big). \quad (2.85)$$

Проинтегрируем уравнение (2.85) по временной переменной в пределах от $\frac{4\tau}{5}$ до ξ, $0<\xi\le t$, $t\in\left(\frac{4\tau}{5},\tau\right]$.

$$U^\tau(\xi,x,z)=U^\tau\left(\tfrac{4\tau}{5},x,z\right)+5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}A_1(\theta,x,z)\cdot\Psi_t(\theta,z)\,d\theta-$$

$$-5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}A_1(\theta,x,z)\cdot\Psi_{zz}(\theta,z)\,d\theta-5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}A_1(\theta,x,z)\cdot F(\theta,\beta,z)\cdot\lambda^1(\theta,\beta,z)\,d\theta+$$

$$+5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}A_2(\theta,x,z)\cdot\Phi_t(\theta,x)\,d\theta-5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}A_2(\theta,x,z)\cdot\Phi_{xx}(\theta,x)\,d\theta-$$

$$-5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}A_2(\theta,x,z)\cdot F(\theta,x,\alpha)\cdot\lambda^1(\theta,x,\alpha)\,d\theta-5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}A_3(\theta,x,z)\cdot\Psi_t(\theta,\alpha)\,d\theta+$$

$$+5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi} A_3(\theta,x,z)\cdot\Phi_{xx}(\theta,\beta)\,d\theta+5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi} A_3(\theta,x,z)\cdot\Psi_{zz}(\theta,\alpha)\,d\theta+$$
$$+5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi} A_3(\theta,x,z)\cdot F(\theta,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(\theta,\beta,\alpha)\,d\theta,\ 0<\xi\le t, t\in\left(\tfrac{4\tau}{5},\tau\right].$$

Справедлива следующая оценка.

$$\Big|U^\tau(\xi,x,z)\Big|\le\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\Big|U^\tau\left(\tfrac{4\tau}{5},x,z\right)\Big|+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\Psi_t(\theta,z)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\Psi_{zz}(\theta,z)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|F(\theta,\beta,z)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\Phi_t(\theta,x)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\Phi_{xx}(\theta,x)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|F(\theta,x,\alpha)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\Big|\Psi_t(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\Big|\Phi_{xx}(\theta,\beta)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\Big|\Psi_{zz}(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\Big|F(\theta,\beta,\alpha)\Big|\,d\theta,\ t\in\left(\tfrac{4\tau}{5},\tau\right],0<\xi\le t. \quad (2.86)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} B_1(t,x,z)&=A_1(t,x,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z),\\ B_2(t,x,z)&=A_2(t,x,z)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha).\end{aligned}\quad (2.87)$$

Функции B_1, B_2 и их производные нужных порядков непрерывны и ограничены как композиции непрерывно ограниченных функций.

Продифференцируем уравнение (2.85) по x и по z от одного до четырех раз. Учитывая обозначения (2.87), получим

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_t^{\tau}(t,x,z) = 5\cdot\sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i}A_1(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_t(t,z)-$$

$$-5\cdot\sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i}A_1(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_{zz}(t,z)-$$

$$-5\cdot\sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i}B_1(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}F(t,\beta,z)+$$

$$+5\cdot\sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}A_2(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_t(t,x)-$$

$$-5\cdot\sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}A_2(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_{xx}(t,x)-$$

$$-5\cdot\sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}B_2(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}F(t,x,\alpha)-$$

$$-5\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}A_3(t,x,z)\cdot\Big(\Psi_t(t,\alpha)-\Phi_{xx}(t,\beta)-\Psi_{zz}(t,\alpha)+F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)\Big),$$

$$k_1,k_2=0,1,\ldots,4. \quad (2.88)$$

Проинтегрируем выражение (2.88) по временной переменной.

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z) = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\tfrac{4\tau}{5},x,z)+$$

$$+5\cdot\int_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i}A_1(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_t(\theta,z)\,d\theta-$$

$$-5\cdot\int_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i}A_1(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_{zz}(\theta,z)\,d\theta-$$

$$-5\cdot\int_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\sum_{i=0}^{k_2} C_{k_2}^i\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^i}B_1(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}F(\theta,\beta,z)\,d\theta+$$

$$-5\cdot\int_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}A_2(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_{xx}(\theta,x)\,d\theta-$$

$$
-5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\sum_{j=0}^{k_1}C_{k_1}^{j}\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^j\partial z^{k_2}}B_2(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}F(\theta,x,\alpha)\,d\theta-
$$

$$
-5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}A_3(\theta,x,z)\cdot\Psi_t(\theta,\alpha)\,d\theta+
$$

$$
+5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}A_3(\theta,x,z)\cdot\Phi_{xx}(\theta,\beta)\,d\theta+
$$

$$
+5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}A_3(\theta,x,z)\cdot\Psi_{zz}(\theta,\alpha)\,d\theta-
$$

$$
-5\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\xi}\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}A_3(\theta,x,z)\cdot F(\theta,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(\theta,\beta,\alpha)\,d\theta,
$$

$$
k_1,k_2=0,1,\ldots,4, 0<\xi\le t, t\in\left(\tfrac{4\tau}{5},\tau\right].
$$

Справедливы следующие оценки.

$$
\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\le\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\tfrac{4\tau}{5},x,z)\right|+
$$

$$
+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_t(\theta,z)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_{zz}(\theta,z)\right|d\theta+
$$

$$
+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}F(\theta,\beta,z)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sum_{j=0}^{k_1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_t(\theta,x)\right|d\theta+
$$

$$
+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sum_{j=0}^{k_1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_{xx}(\theta,x)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sum_{j=0}^{k_1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}F(\theta,x,\alpha)\right|d\theta+
$$

$$
+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\left|\Psi_t(\theta,\alpha)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\left|\Phi_{xx}(\theta,\beta)\right|d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\left|\Psi_{zz}(\theta,\alpha)\right|d\theta+
$$

$$
+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\left|F(\theta,\beta,\alpha)\right|d\theta,\ \ k_1,k_2=0,1,\ldots,4, 0<\xi\le t, t\in\left(\tfrac{4\tau}{5},\tau\right]. \qquad (2.89)
$$

В неравенствах (2.86) и (2.89) возьмём от обеих частей сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, а затем $\sup\limits_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}$. Сложив полученные оценки, получим

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\le$$

$$\le\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}\left(\tfrac{4\tau}{5},x,z\right)\right|+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_t(\theta,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}\Psi_{zz}(\theta,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}F(\theta,\beta,z)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_t(\theta,x)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}\Phi_{xx}(\theta,x)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}F(\theta,x,\alpha)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\Big|\Psi_t(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\Big|\Phi_{xx}(\theta,\beta)\Big|\,d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\Big|\Psi_{zz}(\theta,\alpha)\Big|\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{t}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\Big|F(\theta,\beta,\alpha)\Big|\,d\theta,\ \ t\in\left(\tfrac{4\tau}{5},\tau\right].$$

Учитывая оценку (2.84) на предыдущем шаге и обозначения (1.14), для всех $t \in \left(\frac{4\tau}{5}, \tau\right]$ получим оценку

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right| \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+C\cdot\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{i=0}^{k_2}\int\limits_{\frac{\tau}{5}}^{\frac{2\tau}{5}}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}U^{\tau}_{xx}\left(\theta-\tfrac{\tau}{5},\beta,z\right)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{j=0}^{k_1}\int\limits_{\frac{2\tau}{5}}^{\frac{3\tau}{5}}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}U^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{5},x,\alpha)\right|d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{\frac{3\tau}{5}}^{\tau}||F||_1\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\tau}||\Psi||_3\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{4\tau}{5}}^{\tau}||\Phi||_4\,d\theta.$$

Из свойств определенного интеграла следует оценка

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right| \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\left(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\right)d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\left(\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\frac{4\tau}{5}<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\right)d\theta, t\in(\tfrac{4\tau}{5};\tau]. \quad (2.90)$$

Из оценок (2.71), (2.75), (2.79), (2.84), (2.90) следует

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right| \le$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\left(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\right)d\theta+$$

$$+C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\left(\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\le t}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^{\tau}(\xi,x,z)\right|\right)d\theta,\ t\in(0;\tau].$$

Применим лемму Гронуолла (л. 1.1).

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\le t\le\tau}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right|\le$$

$$\le e^{C\tau}\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\cdot\Big(e^{C\tau}-1\Big). \quad (2.91)$$

На первом целом шаге, $t\in(\tau;2\tau]$, получаем

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{\tau<\xi\le t\le 2\tau}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right|\le$$

$$\le e^{C\tau}\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\le t\le\tau}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right|+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\cdot\Big(e^{C\tau}-1\Big)\le\Big[\text{учитывая (2.91)}\Big]\le$$

$$\le e^{C\tau}\cdot e^{C\tau}\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\cdot\Big(e^{2C\tau}-e^{C\tau}\Big)+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\cdot\Big(e^{C\tau}-1\Big)=$$

$$=e^{2C\tau}\cdot\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\cdot\Big(e^{2C\tau}-1\Big).$$

Повторяя рассуждения конечное число раз, при $t\in\big((N-1)\tau;N\tau\big]$ получим

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(N-1)\tau<\xi\le t\le T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U^\tau(\xi,x,z)\right|\le$$

$$\le e^{NC\tau}\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\cdot\Big(e^{NC\tau}-1\Big)=e^{CT}\cdot\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+$$

$$+\Big(||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big)\cdot\Big(e^{CT}-1\Big)\le$$

$$\le C\cdot\left(\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}U_0(x,z)\right|+||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\right).$$

Таким образом, согласно обозначений (1.14), доказаны равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}U^\tau(t,x,z)\right|\le C\cdot\Big(||U_0||_2+||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big),$$

$$k_1,k_2=0,1,\ldots,4,(t,x,z)\in G_{[0,T]}. \quad (2.92)$$

Из оценок (2.92) следует, что правые части уравнений (2.63)–(2.67) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ.

$$\big|U_t^\tau(t,x,z)\big|\le C\cdot\Big(||U_0||_2+||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big),\ (t,x,z)\in G_{[0,T]}.$$

Дифференцируя уравнения (2.63)–(2.67) по x и z, в силу (2.92), получим оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}U_t^\tau(t,x,z)\right|\le C\cdot\Big(||U_0||_2+||F||_1+||\Psi||_3+||\Phi||_4\Big),\ k_1,k_2=0,1,2. \quad (2.93)$$

Оценки (2.92), (2.93) гарантируют выполнение условий теоремы 1.1 Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $U^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $U^\tau(t,x,z)$ решений задачи (2.63)–(2.68) сходится вместе с производными по x и по z до второго порядка включительно к функции $U(t,x,z)\in C^{0,2,2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы 1.3 сходимости МСА является решением задачи (2.62), (2.58), причем $U(t,x,z)\in C^{1,2,2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, где

$$C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)=\left\{U(t,x,z)\ \middle|\ \frac{\partial^k U}{\partial t^k},\frac{\partial^{k_1+k_2}U}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\in C\left(G_{[0,T]}\right),\right.$$

$$\left.k=0,1,\ldots,l,k_1=0,1,\ldots,l_1,k_2=0,1,\ldots,l_2\right\}.$$

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$

$$\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} U(t,x,z) \right| \le C \cdot \Big(||U_0||_2 + ||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4 \Big), \;\; k_1, k_2 = 0,1,2. \tag{2.94}$$

В силу (2.56), для решения $U(t,x,z)$ выполняются условия переопределения (2.59), (2.60). Следовательно, пара функций $\Big\{ U(t,x,z), \Lambda(t,x,z) \Big\}$ является решением задачи (2.57)–(2.60).

Для всех $t \in (0,T]$ справедливо следующее соотношение

$$||U||_1 \le C \cdot \Big(||U_0||_2 + ||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4 \Big).$$

Из (2.17) и (2.61) следует оценка

$$||U||_1 + ||\Lambda||_1 \le C \cdot \Big(||U_0||_2 + ||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4 \Big),$$

то есть, в силу (2.56),

$$\begin{aligned} &||u^1 - u^2||_1 + ||\lambda^1 - \lambda^2||_1 \le \\ &\quad \le C \cdot \Big(||u_0^1 - u_0^2||_2 + ||f^1 - f^2||_1 + ||\psi^1 - \psi^2||_3 + ||\varphi^1 - \varphi^2||_4 \Big). \end{aligned} \tag{2.95}$$

Теорема 2.4. *При выполнении условий* (2.6)–(2.9), (2.17) *для решения* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ *задачи* (2.1)–(2.5) *выполняется оценка* (2.95) *устойчивости по входным данным.*

Замечание 2.1. *Из теорем 2.3 и 2.4 следует, что задача* (2.1)–(2.9) *является корректной по Адамару (см. [4, 21]).*

2.4 Примеры

Пример 2.1. В полосе $G_{[0,T]} = \Big\{ (t,x,z) \,|\, 0 \le t \le T, \;\; (x,z) \in \mathbb{R}^2 \Big\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + (\cos t + 3) \cdot \lambda(t,x,z), \; t \in (0,T), \; (x,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.96}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z) = \sin x - \sin z,$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ нужно определить также функцию

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z).$$

Пусть заданы условия переопределения:

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x) = \sin(t+x) - \sin(t+\alpha),$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z) = \sin(t+\beta) - \sin(t+z),$$

где α, β—некоторые фиксированные постоянные.

Выполняются условия согласования:

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x) = \sin x - \sin\alpha,$$

$$u_0(\beta,z) = \psi(0,z) = \sin\beta - \sin z,$$

$$\varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha) = \sin(t+\beta) - \sin(t+\alpha),$$

и условия на входные данные:

$$\big|f(t,\beta,z)\big| \geq \delta_1 > 0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big| \geq \delta_2 > 0,\ \forall\, t \in [0,T],\ \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.97)$$

где δ_1, δ_2 — некоторые постоянные.

Проверим выполнение условия (2.97).

$$\big|f(t,\beta,z)\big| = \big|f(t,x,\alpha)\big| = \big|\cos t + 3\big| \geq 2 > 0, \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2.$$

Условие выполнено при $\delta_1 = \delta_2 = 2$.

Функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$ удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности входных данных (2.17).

Тогда могут быть найдены функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$:

$$u(t,x,z) = \sin(t+x) - \sin(t+z),$$

$$\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)=\frac{\sin x}{\cos t+3}-\frac{\sin z}{\cos t+3}.$$

Проверим, что найденное решение удовлетворяет уравнению (2.96):

$$0=-\sin x+\sin z+(\cos t+3)\cdot\frac{\sin x-\sin z}{\cos t+3},$$

$$0=-\sin x+\sin z+\sin x-\sin z.$$

Получили верное тождество.

Пример 2.2. В полосе $G_{[0,T]}=\{(t,x,z)\,|\,0\le t\le T,\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t=u_{xx}+u_{zz}+ae^t\cdot\lambda(t,x,z),\ t\in(0,T),\ (x,z)\in\mathbb{R}^2, \tag{2.98}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z)=u_0(x,z)=b+c\cos x+d\cos z,$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ нужно определить также функцию

$$\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z).$$

Здесь $a\neq 0, b, c, d$ — некоторые постоянные.

Пусть заданы условия переопределения:

$$u(t,x,\alpha)=\varphi(t,x)=b\cos t+c\cos x+d\cos\alpha,$$

$$u(t,\beta,z)=\psi(t,z)=b\cos t+c\cos\beta+d\cos z,$$

где α,β—некоторые фиксированные постоянные.

Выполняются условия согласования:

$$u_0(x,\alpha)=\varphi(0,x)=b+c\cos x+d\cos\alpha,$$

$$u_0(\beta,z)=\psi(0,z)=b+c\cos\beta+d\cos z,$$

$$\varphi(t,\beta)=\psi(t,\alpha)=b\cos t+c\cos\beta+d\cos\alpha,$$

и условия на входные данные:

$$\big|f(t,\beta,z)\big| \geq \delta_1 > 0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big| \geq \delta_2 > 0,\ \forall\, t \in [0,T],\, \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.99)$$

где δ_1, δ_2 — некоторые постоянные.

Проверим выполнение условия (2.99).

$$\big|f(t,\beta,z)\big| = \big|f(t,x,\alpha)\big| = \big|ae^t\big| \geq |a| > 0, \quad \forall\, t \in [0,T],\, \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2.$$

Условие выполнено при $\delta_1 = \delta_2 = |a|$.

Функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$ удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности входных данных (2.17).

Тогда могут быть найдены функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$:

$$u(t,x,z) = b\cos t + c\cos x + d\cos z,$$

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z) = \frac{-b\sin t + c\cos x}{ae^t} + \frac{d\cos z}{ae^t}.$$

Проверим, что найденное решение удовлетворяет уравнению (2.98):

$$-b\sin t = -c\cos x - d\cos z + ae^t \cdot \frac{-b\sin t + c\cos x + d\cos z}{ae^t},$$

$$-b\sin t = -c\cos x - d\cos z - b\sin t + c\cos x + d\cos z.$$

Получили верное тождество.

Приведенные примеры 2.1, 2.2 показывают, что множество решений задачи (2.1)–(2.9) не пусто.

3 Задача идентификации функции источника специального вида с неизвестным коэффициентом, представимым в виде произведения

3.1 Существование решения задачи

В полосе $G_{[0,T]} = \Big\{(t, x, z)\,|\,0 \le t \le T,\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\Big\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t, x, z) \cdot \lambda(t, x, z),\ t \in (0, T),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$u(0, x, z) = u_0(x, z), \tag{3.2}$$

где наряду с функцией $u(t, x, z)$ неизвестной также является функция

$$\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) \cdot \lambda_2(t, z). \tag{3.3}$$

Пусть заданы условия переопределения:

$$u(t, x, \alpha) = \varphi(t, x), \tag{3.4}$$

$$u(t, \beta, z) = \psi(t, z), \tag{3.5}$$

где α, β—некоторые фиксированные постоянные.

Считаем выполнеными условия согласования:

$$u_0(x, \alpha) = \varphi(0, x), \tag{3.6}$$

$$u_0(\beta, z) = \psi(0, z), \tag{3.7}$$

$$\varphi(t, \beta) = \psi(t, \alpha), \tag{3.8}$$

и условия на входные данные:

$$\varphi_t(t, \beta) - \varphi_{xx}(t, \beta) - \psi_{zz}(t, \alpha) \ne 0, \tag{3.9}$$

$$\big|f(t, \beta, z)\big| \ge \delta_1 > 0,\ \big|f(t, x, \alpha)\big| \ge \delta_2 > 0, \quad \forall\, t \in [0, T],\ \forall\,(x, z) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.10}$$

здесь δ_1, δ_2 — некоторые постоянные.

3.1.1 Приведение к прямой задаче

Приведем данную обратную задачу (3.1)–(3.5) к вспомогательной прямой. Для этого сначала в уравнении (3.1) положим $x = \beta$, получим

$$\lambda_1(t,\beta)\cdot\lambda_2(t,z) = \frac{u_t(t,\beta,z) - u_{xx}(t,\beta,z) - u_{zz}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}.$$

Затем в (3.1) положим $z = \alpha$.

$$\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,\alpha) = \frac{u_t(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,x,\alpha) - u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}.$$

Перемножим последние два равенства, получим

$$\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z)\cdot\lambda_1(t,\beta)\cdot\lambda_2(t,\alpha) = \frac{u_t(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,x,\alpha) - u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}\times$$
$$\times\frac{u_t(t,\beta,z) - u_{xx}(t,\beta,z) - u_{zz}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}. \quad (3.11)$$

Далее в уравнении (3.1) возьмём $x = \beta$ и $z = \alpha$.

$$\lambda_1(t,\beta)\cdot\lambda_2(t,\alpha) = \frac{u_t(t,\beta,\alpha) - u_{xx}(t,\beta,\alpha) - u_{zz}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}. \quad (3.12)$$

Теперь подставим выражение на $\lambda_1(t,\beta)\cdot\lambda_2(t,\alpha)$ из (3.12) в (3.11).

$$\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z) = \frac{f(t,\beta,\alpha)\cdot\big(u_t(t,\beta,z) - u_{xx}(t,\beta,z) - u_{zz}(t,\beta,z)\big)}{f(t,\beta,z)\cdot f(t,x,\alpha)}\times$$
$$\times\frac{u_t(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,x,\alpha) - u_{zz}(t,x,\alpha)}{u_t(t,\beta,\alpha) - u_{xx}(t,\beta,\alpha) - u_{zz}(t,\beta,\alpha)}.$$

Затем, используя условия переопределения (3.4),(3.5), получим выражение на неизвестный коэффициент при функции $f(t,x,z)$ в следующем виде

$$\lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z) = \frac{f(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,z)\cdot f(t,x,\alpha)\cdot\big[\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)\big]}\times$$
$$\times\Big([\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)]\cdot[\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)] - u_{zz}(t,x,\alpha)\cdot[\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)] -$$
$$- u_{xx}(t,\beta,z)\cdot[\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)] + u_{xx}(t,\beta,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)\Big). \quad (3.13)$$

Теперь подставим выражение (3.13) в уравнение (3.1) и перейдем к прямой задаче для уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + M(t,x,z) \cdot u_{xx}(t,\beta,z) \cdot u_{zz}(t,x,\alpha) - M_1(t,x,z) \cdot u_{xx}(t,\beta,z) -$$
$$- M_2(t,x,z) \cdot u_{zz}(t,x,\alpha) + M_3(t,x,z), \quad t \in (0,T),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.14)$$

с начальным условием (3.2).

Здесь следуюшие функции известны:

$$\begin{aligned}
&M(t,x,z) = \frac{f(t,x,z) \cdot f(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,z) \cdot f(t,x,\alpha) \cdot \big[\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)\big]},\\
&M_1(t,x,z) = M(t,x,z) \cdot [\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)],\\
&M_2(t,x,z) = M(t,x,z) \cdot [\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)],\\
&M_3(t,x,z) = M(t,x,z) \cdot [\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)] \cdot [\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)].
\end{aligned} \quad (3.15)$$

Относительно входных данных предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (3.16), и удовлетворяют ему.

$$\left|\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{l_2}}{\partial t^{l_2}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| +$$
$$+ \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \le C, \quad l_1, l_2 = 0,1,\ k_1,k_2 = 0,1,\dots,6. \quad (3.16)$$

3.1.2 Существование решения прямой задачи

Для доказательства разрешимости прямой задачи будем использовать метод слабой аппроксимации [14]. Расщепим уравнение (3.14) на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{3}$ в следах неизвестных функций

$$u^\tau_t = 3 \cdot \big(u^\tau_{xx}(t,x,z) + u^\tau_{zz}(t,x,z)\big),\ n\tau < t \le \left(n + \tfrac{1}{3}\right)\tau; \quad (3.17)$$

$$u^\tau_t = 3 \cdot M(t,x,z) \cdot u^\tau_{xx}(t - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z) \cdot u^\tau_{zz}(t - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha),$$
$$\left(n + \tfrac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n + \tfrac{2}{3}\right)\tau; \quad (3.18)$$

$$u_t^\tau = -3\cdot\Big(M_1(t,x,z)\cdot u_{xx}^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z) + M_2(t,x,z)\cdot u_{zz}^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)-$$
$$- M_3(t,x,z)\Big),\ \left(n+\tfrac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau, \tag{3.19}$$
$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{3.20}$$
$$n = 0,1,2,\dots,(N-1),\ N\tau = T.$$

Далее под n-м целым шагом будем понимать полуинтервал $\big(n\tau,(n+1)\tau\big]$, а под j-м дробным шагом n-го целого шага — полуинтервал $\Big(\left(n+\frac{j-1}{3}\right)\tau,\left(n+\frac{j}{3}\right)\tau\Big]$.

Введём следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&U_{k_1,k_2}(0) = \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,\\
&U_{k_1,k_2}^\tau(t) = \sup_{n\tau<\xi\le t\le(n+1)\tau}\ \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right|,\\
&k_1,k_2 = 0,1,\dots,6,\\
&U(0) = \sum_{k_1=0}^{6}\sum_{k_2=0}^{6}U_{k_1,k_2}(0),\quad U^\tau(t) = \sum_{k_1=0}^{6}\sum_{k_2=0}^{6}U_{k_1,k_2}^\tau(t).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Справедливы следующие свойства.

1. $\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \le U_{k_1,k_2}^\tau(t) \le U^\tau(t),\ k_1,k_2 = 0,1,\dots,6,$

$$\xi\in(n\tau,t],\ t\in(n\tau,(n+1)\tau]; \tag{3.22}$$

2. функции $U_{k_1,k_2}^\tau(t), U^\tau(t)$ неотрицательные и неубывающие на каждом временном шаге $(n\tau,(n+1)\tau]$.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^\tau(t,x,z)$ задачи (3.17)–(3.20).

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге, $t\in\left(0,\frac{\tau}{3}\right]$, рассматриваем уравнение

$$u_t^\tau = 3\cdot\big(u_{xx}^\tau(t,x,z) + u_{zz}^\tau(t,x,z)\big).$$

По теореме 1.2 принципа максимума для задачи Коши, имеем

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|u_0(x,z)\right|,\ 0<\xi\le t,\ t\in\left(0,\tfrac{\tau}{3}\right]. \tag{3.23}$$

Дифференцируя уравнение (3.17) и начальное условие (3.20) по x и по z от 1 до 6 раз, в силу принципа максимума, получим

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^\tau(\xi,x,z)\right| \le \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right|,$$

$$0<\xi\le t,\ t\in\left(0,\frac{\tau}{3}\right],\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6. \tag{3.24}$$

Возьмём от обеих частей неравенств (3.23) и (3.24) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{0<\xi\le t}$, сложим их и, согласно обозначений (3.21), получим

$$U^\tau(t)\le U(0). \tag{3.25}$$

Рассмотрим второй дробный шаг, $t\in\left(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}\right]$.

$$u_t^\tau = 4\cdot M(t,x,z)\cdot u_{xx}^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\cdot u_{zz}^\tau(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha).$$

Проинтегрируем данное уравнение по временной переменной

$$\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\xi} u_t^\tau(\theta,x,z)\,d\theta = 3\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\xi} M(\theta,x,z)\cdot u_{xx}^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\cdot u_{zz}^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\,d\theta,$$

$$\tfrac{\tau}{3}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right],$$

получим

$$u^\tau(\xi,x,z) = u^\tau\left(\tfrac{\tau}{3},x,z\right) + 3\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\xi} M(\theta,x,z)\cdot u_{xx}^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\cdot u_{zz}^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\,d\theta,$$

$$\tfrac{\tau}{3}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right].$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|u^\tau(\xi,x,z)\right| \le \left|u^\tau\left(\tfrac{\tau}{3},x,z\right)\right| +$$

$$+3\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\left|M(\theta,x,z)\right|\cdot\left|u_{xx}^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\right|\cdot\left|u_{zz}^\tau(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\right|d\theta. \tag{3.26}$$

Из условий (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) функция $M(t,x,z)$ является ограниченной и имеет ограниченные производные по x и по z до 6 порядка включительно. Возьмём от обеих частей неравенства (3.26) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{3}<\xi\le t}$. Учитывая (3.21) и (3.22), получаем оценку

$$U^{\tau}_{0,0}(t) \le U_{0,0}(0) + C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} U^{\tau}_{2,0}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\cdot U^{\tau}_{0,2}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\,d\theta. \tag{3.27}$$

Продифференцируем (3.18) по x и z от одного до 6 раз, получим

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}_t(t,x,z) = 3\cdot\sum_{i=0}^{k_2}\sum_{j=0}^{k_1} C^i_{k_2}\cdot C^j_{k_1}\cdot\frac{\partial^{j+i}}{\partial x^j\partial z^i}M(t,x,z)\times$$
$$\times\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}u^{\tau}_{xx}(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}u^{\tau}_{zz}(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha), k_1,k_2=0,1,\ldots,6.$$

Проинтегрируем последнее уравнение по временной переменной, получим следующее равенство

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\xi,x,z) = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{3},x,z)+$$
$$+3\cdot\sum_{i=0}^{k_2}\sum_{j=0}^{k_1} C^i_{k_2}\cdot C^j_{k_1}\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\xi}\frac{\partial^{j+i}}{\partial x^j\partial z^i}M(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}u^{\tau}_{xx}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\times$$
$$\times\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}u^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\,d\theta,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6,\ \tfrac{\tau}{3}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{\tau}{3},\tfrac{2\tau}{3}\right].$$

Следовательно, выполняется следующее неравенство

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\xi,x,z)\right| \le \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{3},x,z)\right|+$$
$$+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sum_{i=0}^{k_2}\left|\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial z^{k_2-i}}u^{\tau}_{xx}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\right|\cdot\sum_{j=0}^{k_1}\left|\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}u^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\right|d\theta \le$$
$$\le\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{3},x,z)\right| + C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sum_{k_1,k_2=0}^{6}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\right|\times$$

$$\times \sum_{k_1,k_2=0}^{6} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} u^\tau(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha) \right| d\theta,\ t \in \left(\tfrac{\tau}{3}, \tfrac{2\tau}{3} \right].$$

В последнем соотношении берем сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{\tau}{3}<\xi\le t}$ и, учитывая (3.21) и (3.22), получаем оценки на $U^\tau_{k_1,k_2}(t)$, $k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6$.

$$U^\tau_{k_1,k_2}(t) \le U_{k_1,k_2}(0) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U^\tau_{k_1,k_2}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right) \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{6} U^\tau_{k_1,k_2}\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right) d\theta. \tag{3.28}$$

Складывая оценки (3.27) и (3.28) и учитывая (3.25), получаем

$$U^\tau(t) \le U(0) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} \left(U^\tau\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right)\right)^2 d\theta.$$

Данное неравенство справедливо для всех $t \in \left(\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}\right]$, поэтому справедлива оценка

$$U^\tau(t) \le U(0) + C \cdot \int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}} \left(U^\tau\left(\theta - \tfrac{\tau}{3}\right)\right)^2 d\theta. \tag{3.29}$$

Рассмотрим третий дробный шаг, $t \in \left(\frac{2\tau}{3}, \tau\right]$.

$$u^\tau_t = -3 \cdot \Big(M_1(t,x,z) \cdot u^\tau_{xx}(t - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z) + M_2(t,x,z) \cdot u^\tau_{zz}(t - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha) - M_3(t,x,z) \Big).$$

Проинтегрируем данное уравнение по временной переменной.

$$u^\tau(\xi,x,z) = u^\tau(\tfrac{2\tau}{3},x,z) - 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} \Big(M_1(\theta,x,z) \cdot u^\tau_{xx}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z) +$$
$$+ M_2(\theta,x,z) \cdot u^\tau_{zz}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, x, \alpha) - M_3(\theta,x,z) \Big) d\theta, \quad \tfrac{2\tau}{3} < \xi \le t,\ t \in \left(\tfrac{2\tau}{3}, \tau\right].$$

Отсюда, справедливо неравенство

$$\left| u^\tau(\xi,x,z) \right| \le \left| u^\tau(\tfrac{2\tau}{3},x,z) \right| + 3 \cdot \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left| M_1(\theta,x,z) \right| \cdot \left| u^\tau_{xx}(\theta - \tfrac{\tau}{3}, \beta, z) \right| d\theta +$$

$$+3\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|M_2(\theta,x,z)\Big|\cdot\Big|u^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\Big|\,d\theta+3\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big|M_3(\theta,x,z)\Big|\,d\theta,$$

$$\tfrac{2\tau}{3}<\xi\le t,\ t\in\Big(\tfrac{2\tau}{3},\tau\Big]. \quad (3.30)$$

Из условий (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) следует, что функции $M_1(t,x,z)$, $M_2(t,x,z)$ и $M_3(t,x,z)$ являются ограниченными и имеют ограниченные производные по x и по z до 6 порядка включительно. Возьмём от обеих частей неравенства (3.30) сначала $\sup\limits_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}$, затем $\sup\limits_{\frac{2\tau}{3}<\xi\le t}$. Учитывая (3.21) и (3.22), получим оценку

$$U^{\tau}_{0,0}(t)\le U^{\tau}_{0,0}\left(\tfrac{2\tau}{3}\right)+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}U^{\tau}_{2,0}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}U^{\tau}_{0,2}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}d\theta. \quad (3.31)$$

Дифференцируя (3.19) по x и z от одного до 6 раз, получим

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}_t(t,x,z)=-3\cdot\sum_{i=0}^{k_2}C^i_{k_2}\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}}M_1(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial x^{k_2-i}}u^{\tau}_{xx}(t-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)-$$
$$-3\cdot\sum_{j=0}^{k_1}C^j_{k_1}\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^{j}\partial z^{k_2}}M_2(t,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}u^{\tau}_{zz}(t-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)+3\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}M_3(t,x,z),$$
$$k_1,k_2=0,1,\ldots,6.$$

Интегрируя данное уравнение по временной переменной в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до ξ, $\frac{2\tau}{3}<\xi\le t$, $t\in\Big(\frac{2\tau}{3},\tau\Big]$, получим

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\xi,x,z)=\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u^{\tau}(\tfrac{\tau}{3},x,z)-$$
$$-3\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\sum_{i=0}^{k_2}C^i_{k_2}\cdot\frac{\partial^{k_1+i}}{\partial x^{k_1}\partial z^{i}}M_1(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_2-i}}{\partial x^{k_2-i}}u^{\tau}_{xx}(\theta-\tfrac{\tau}{3},\beta,z)\,d\theta-$$
$$-3\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\sum_{j=0}^{k_1}C^j_{k_1}\cdot\frac{\partial^{j+k_2}}{\partial x^{j}\partial z^{k_2}}M_2(\theta,x,z)\cdot\frac{\partial^{k_1-j}}{\partial x^{k_1-j}}u^{\tau}_{zz}(\theta-\tfrac{\tau}{3},x,\alpha)\,d\theta+$$

$$+3\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi}\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}M_3(\theta,x,z)\,d\theta,\ k_1,k_2=0,1,\ldots,6,\ \tfrac{2\tau}{3}<\xi\le t,\ t\in\left(\tfrac{2\tau}{3},\tau\right].$$

Учитывая (3.21) и (3.22), получим оценки

$$U^{\tau}_{k_1,k_2}(t)\le U^{\tau}_{k_1,k_2}\big(\tfrac{2\tau}{3}\big)+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\sum_{k_1,k_2=0}^{6}U^{\tau}_{k_1,k_2}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\,d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}d\theta. \tag{3.32}$$

Складывая оценки (3.31) и (3.32) и учитывая (3.29), получаем

$$U^{\tau}(t)\le U(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}}\Big(U^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\Big)^2d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big(U^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)+1\Big)\,d\theta.$$

Последнее неравенство справедливо для всех $t\in\left(\frac{2\tau}{3},\tau\right]$, поэтому справедливо следующее неравенство

$$U^{\tau}(t)\le U(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}}\Big(U^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)\Big)^2d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\tau}\Big(U^{\tau}\left(\theta-\tfrac{\tau}{3}\right)+1\Big)\,d\theta.$$

В силу неубывания функции $U^{\tau}(t)$, получим

$$U^{\tau}(t)\le U(0)+C\cdot\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{\frac{2\tau}{3}}\Big(U^{\tau}\left(\theta\right)\Big)^2d\theta+C\cdot\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{\tau}\Big(U^{\tau}\left(\theta\right)+1\Big)\,d\theta.$$

Из свойств определенного интеграла следует

$$U^{\tau}(t)\le U(0)+C\cdot\int\limits_{0}^{\tau}\mathcal{P}_2\Big(U^{\tau}(\theta)\Big)\,d\theta,\ t\in(0,\tau], \tag{3.33}$$

где $\mathcal{P}_2(\chi)=C\cdot\left(\chi^2+\chi+1\right)$ — полином второй степени с ненулевыми независящими от τ коэффициентами.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt}=\mathcal{P}_2\big(\omega(t)\big),\qquad \omega(0)=U(0). \tag{3.34}$$

По теореме Коши [22] решение $\omega(t)$ задачи (3.34) существует на некотором интервале $[0, t_*]$, где $0 < t_* \leq T$ зависит от C и начальных данных $U(0)$. Функция $\omega(t)$ является монотонно возрастающей на интервале $[0, t_*]$ и $\omega(t) \in C^1\big([0, t_*]\big)$.

Из (3.33), (3.34) следует, что если для некоторого $t_0 \leq t$ справедливо $U^\tau(t_0) \leq \omega(t_0)$, то $U^\tau(t) \leq \omega(t),\ t \in [t_0, t_1]$.

Так как $U^\tau(0) \leq \omega(0)$, то из монотонности функции $\omega(t)$ следует

$$U^\tau(t) \leq \omega(\tau),\ t \in [0, \tau].$$

Рассмотрим первый целый временной шаг, $t \in (\tau, 2\tau]$. Рассуждая аналогично нулевому целому шагу, получим

$$U^\tau(t) \leq \omega(2\tau),\ t \in [0, 2\tau].$$

Через конечное число шагов получим

$$U^\tau(t) \leq \omega(t_*) \leq C,\ t \in [0, t_*].$$

Таким образом, доказаны равномерные по τ оценки

$$\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(t, x, z) \right| \leq C,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 6, (t, x, z) \in G_{[0, t_*]}. \tag{3.35}$$

Из оценок (3.35) следует, что правые части уравнений (3.17)–(3.19) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут ограничены равномерно по τ.

$$\big| u_t^\tau(t, x, z) \big| \leq C,\ (t, x, z) \in G_{[0, t_*]}.$$

Дифференцируя уравнения (3.17)–(3.19) по x и z, в силу (3.35), получим оценки

$$\left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_t^\tau(t, x, z) \right| \leq C,\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, 4,\ (t, x, z) \in G_{[0, t_*]}. \tag{3.36}$$

Оценки (3.35), (3.36) гарантируют выполнение условий теоремы 1.1 Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^{\tau}(t,x,z)$ решений задачи (3.17)–(3.20) сходится вместе с производными по x и по z до четвертого порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right)$, которая в силу теоремы 1.3 сходимости МСА является решением задачи (3.14), (3.2), причем $u(t,x,z) \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right)$, где

$$C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right) = \left\{ u(t,x,z) \;\middle|\; \frac{\partial^k}{\partial t^k}u, \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u \in C\left(G_{[0,t_*]}\right), \right.$$
$$\left. k=0,1,\ldots,l, k_1=0,1,\ldots,l_1, k_2=0,1,\ldots,l_2 \right\}.$$

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z) \in G_{[0,t_*]}$

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| \leq C, \;\; k_1,k_2 = 0,1,\ldots,4. \qquad (3.37)$$

3.1.3 Существование решения обратной задачи

Теперь докажем, что пара функций $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$, где $\lambda(t,x,z)$ определяется соотношением (3.13) и удовлетворяет условию (3.3), является решением обратной задачи. Так как $u(t,x,z)$ — решение прямой задачи, то при подстановке $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ в (3.1) и (3.2), получим тождества.

Из (3.13) и (3.14), с учетом условий (3.9), (3.10), (3.16), (3.37), следует, что $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ принадлежат классу

$$Z(t_*) = \left\{ u(t,x,z), \lambda(t,x,z) \;\middle|\; u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right), \lambda(t,x,z) \in C^{0,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,t_*]}\right) \right\},$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right| + \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right| \leq C. \qquad (3.38)$$

Докажем выполнение условия переопределения (3.4). Для этого положим в (3.14) $z = \alpha$. Имеем:

$$u_t(t,x,\alpha) = u_{xx}(t,x,\alpha) + u_{zz}(t,x,\alpha) + \frac{1}{\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)} \times$$
$$\times \Big(u_{xx}(t,\beta,\alpha) \cdot u_{zz}(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,\beta,\alpha) \cdot [\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)] -$$
$$- u_{zz}(t,x,\alpha) \cdot [\psi_t(t,\alpha) - \psi_{zz}(t,\alpha)] + [\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)] \cdot [\psi_t(t,\alpha) - \psi_{zz}(t,\alpha)] \Big).$$

Преобразуем данное выражение к виду:

$$u_{zz}(t,x,\alpha) \cdot \Big[u_{xx}(t,\beta,\alpha) - \varphi_{xx}(t,\beta) \Big] + \Big[\psi_{zz}(t,\alpha) - \psi_t(t,\alpha) \Big] \times$$
$$\times \Big[u_t(t,x,\alpha) - \varphi_t(t,x) - u_{xx}(t,x,\alpha) + \varphi_{xx}(t,x) \Big] +$$
$$+ \varphi_{xx}(t,\beta) \cdot \Big[u_t(t,x,\alpha) - u_{xx}(t,x,\alpha) \Big] - u_{xx}(t,\beta,\alpha) \cdot \Big[\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x) \Big] = 0.$$

Введём обозначение:

$$Q^1(t,x) = u(t,x,\alpha) - \varphi(t,x). \tag{3.39}$$

В силу (3.6), справедливо следующее равенство

$$Q^1(0,x) = u(0,x,\alpha) - \varphi(0,x) = 0.$$

Используя обозначения (3.39), получим

$$\begin{cases} (\varphi_{xx}(t,\beta) + \psi_{zz}(t,\alpha) - \psi_t(t,\alpha)) \cdot Q^1_t(t,x) = \\ = (\varphi_{xx}(t,\beta) + \psi_{zz}(t,\alpha) - \psi_t(t,\alpha)) \cdot Q^1_{xx}(t,x) + \\ + (-u_{zz}(t,x,\alpha) + \varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x)) \cdot Q^1_{xx}(t,\beta), \\ Q^1(0,x) = 0. \end{cases}$$

В силу условия (3.9),

$$\begin{cases} Q^1_t(t,x) = Q^1_{xx}(t,x) - \dfrac{u_{zz}(t,x,\alpha) - \varphi_t(t,x) + \varphi_{xx}(t,x)}{\varphi_{xx}(t,\beta) + \psi_{zz}(t,\alpha) - \psi_t(t,\alpha)} \cdot Q^1_{xx}(t,\beta), \\ Q^1(0,x) = 0. \end{cases} \tag{3.40}$$

В силу (3.9), (3.16), (3.37), функция

$$S(t,x) = \frac{u_{zz}(t,x,\alpha) - \varphi_t(t,x) + \varphi_{xx}(t,x)}{\varphi_{xx}(t,\beta) + \psi_{zz}(t,\alpha) - \psi_t(t,\alpha)}$$

и ее производные непрерывны и ограничены. А значит задача (3.40) удовлетворяет условиям леммы 1.2, согласно которой решение задачи (3.40) единственно. Очевидно, что решением является функция $Q^1(t,x) \equiv 0$. Таким образом, из (3.39) следует выполнение условия (3.4).

Теперь докажем условие переопределения (3.5). Рассмотрим (3.14) на гиперплоскости $x = \beta$. Получим:

$$u_t(t,\beta,z) = u_{xx}(t,\beta,z) + u_{zz}(t,\beta,z) + \frac{1}{\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha)} \times$$
$$\times \Big(u_{xx}(t,\beta,z)\cdot u_{zz}(t,\beta,\alpha) - u_{xx}(t,\beta,z)\cdot[\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta)] -$$
$$- u_{zz}(t,\beta,\alpha)\cdot[\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)] + [\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta)]\cdot[\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)]\Big).$$

Преобразуем последнее выражение к виду:

$$u_{xx}(t,\beta,z)\cdot\Big[u_{zz}(t,\beta,\alpha) - \psi_{zz}(t,\alpha)\Big] + \Big[\varphi_{xx}(t,\beta) - \varphi_t(t,\beta)\Big]\times$$
$$\times\Big[u_t(t,\beta,z) - \psi_t(t,z) - u_{zz}(t,\beta,z) + \psi_{zz}(t,z)\Big] +$$
$$+ \psi_{zz}(t,\alpha)\cdot\Big[u_t(t,\beta,z) - u_{zz}(t,\beta,z)\Big] - u_{zz}(t,\beta,\alpha)\cdot\Big[\psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z)\Big] = 0.$$

Обозначим:

$$Q^2(t,z) = u(t,\beta,z) - \psi(t,z). \tag{3.41}$$

В силу (3.7), справедливо следующее равенство

$$Q^2(0,z) = u(0,\beta,z) - \psi(0,z) = 0.$$

Используя обозначения (3.41), получим

$$\begin{cases} (\varphi_{xx}(t,\beta) + \psi_{zz}(t,\alpha) - \varphi_t(t,\beta))\cdot Q^2_t(t,z) = \\ = (\varphi_{xx}(t,\beta) + \psi_{zz}(t,\alpha) - \varphi_t(t,\beta))\cdot Q^2_{zz}(t,z) - \\ - (u_{xx}(t,\beta,z) - \psi_t(t,z) + \psi_{zz}(t,z))\cdot Q^2_{zz}(t,\alpha), \\ Q^2(0,z) = 0. \end{cases}$$

В силу условий (3.8) и (3.9), имеем:

$$\begin{cases} Q^2_t(t,z) = Q^2_{zz}(t,z) - \dfrac{u_{xx}(t,\beta,z) - \psi_t(t,z) + \psi_{zz}(t,z)}{\varphi_{xx}(t,\beta) + \psi_{zz}(t,\alpha) - \psi_t(t,\alpha)}\cdot Q^2_{zz}(t,\alpha), \\ Q^2(0,z) = 0. \end{cases} \tag{3.42}$$

В силу (3.9), (3.16), (3.37), функция

$$\widetilde{S}(t,z) = \frac{u_{xx}(t,\beta,z) - \psi_t(t,z) + \psi_{zz}(t,z)}{\varphi_{xx}(t,\beta) + \psi_{zz}(t,\alpha) - \psi_t(t,\alpha)} \cdot Q^2_{zz}(t,\alpha)$$

и ее производные непрерывны и ограничены. А значит задача (3.42) удовлетворяет условиям леммы 1.2, согласно которой решение задачи (3.42) единственно. Таким решением является функция $Q^2(t,z) \equiv 0$. Отсюда, учитывая (3.41), следует выполнение условия (3.5).

Итак, условия переопределения выполнены. Из этого следует, что пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ является решением исходной обратной задачи (3.1)–(3.5).

Доказана

Теорема 3.1. *При выполнении условий* (3.6)–(3.10), (3.16) *на входные данные, существует константа* t_*, $0 < t_* \leq T$, *зависящая от констант* δ_1, δ_2 *из* (3.10) *и константы* C *из* (3.16), *такая, что существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) \cdot \lambda_2(t,z)$ *обратной задачи* (3.1)–(3.5) *в классе* $Z(t_*)$, *удовлетворяющее соотношению* (3.38).

3.2 Примеры

Пример 3.1. В полосе $G_{[0,T]} = \big\{(t,x,z)\,|\,0 \leq t \leq T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + (\sin x + 2) \cdot \lambda(t,x,z),\ t \in (0,T),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.43}$$

с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z) = \sin x \cdot \sin z,$$

где наряду с функцией $u(t,x,z)$ нужно определить также функцию

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) \cdot \lambda_2(t,z).$$

Пусть заданы условия переопределения:

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x) = e^t \cdot \sin x \cdot \sin\alpha,$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z) = e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin z,$$

где α, β—некоторые фиксированные постоянные.

Выполняются условия согласования:

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x) = \sin x \cdot \sin\alpha,$$

$$u_0(\beta,z) = \psi(0,z) = \sin\beta \cdot \sin z,$$

$$\varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha) = e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha,$$

и условия на входные данные:

$$\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha) \neq 0, \tag{3.44}$$

$$\big|f(t,\beta,z)\big| \geq \delta_1 > 0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big| \geq \delta_2 > 0,\ \forall\, t \in [0,T],\ \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.45}$$

где δ_1, δ_2 — некоторые постоянные.

Проверим выполнение условия (3.44). Для этого подставим в него заданные функции $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$:

$$e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha + e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha + e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \neq 0,$$

$$3 \cdot e^t \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \neq 0.$$

Полученное соотношение равносильно совокупности следующих соотношений:

1. $e^t \neq 0,\ \forall t \in [0,T]$;

2. $\sin\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \pi k((-1)^k + 1), k = 0,1,2,\ldots \Rightarrow$

$$\alpha \neq \begin{cases} 2\pi k, & k = 0,2,4,6,\ldots, \\ 0, & k = 1,3,5,7,\ldots; \end{cases}$$

3. $\sin\beta \neq 0 \Rightarrow \beta \neq \pi k((-1)^k+1), k=0,1,2,\ldots \Rightarrow$

$$\beta \neq \begin{cases} 2\pi k, & k=0,2,4,6,\ldots, \\ 0, & k=1,3,5,7,\ldots. \end{cases}$$

Следовательно, условие (3.44) выполняется для всех $t \in [0,T]$, $(x,z) \in \mathbb{R}^2$ при

$$\alpha,\beta \neq \begin{cases} 2\pi k, & k=0,2,4,6,\ldots, \\ 0, & k=1,3,5,7,\ldots. \end{cases}$$

Проверим выполнение условия (3.45).

$$\big|f(t,\beta,z)\big| = \big|\sin\beta+2\big| \geq 1 > 0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big| = \big|\sin x+2\big| \geq 1 > 0,$$
$$\forall\, t \in [0,T],\ \forall (x,z) \in \mathbb{R}^2.$$

Условие выполнено при $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

Функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$ удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности входных данных (3.16).

Тогда могут быть найдены функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$:

$$u(t,x,z) = e^t \cdot \sin x \cdot \sin z,$$

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x)\cdot\lambda_2(t,z) = \frac{3\cdot e^t\cdot\sin x}{\sin x+2}\cdot\sin z.$$

Проверим, что найденное решение удовлетворяет уравнению (3.43):

$$e^t\cdot\sin x\cdot\sin z = -e^t\cdot\sin x\cdot\sin z - e^t\cdot\sin x\cdot\sin z + (\sin x+2)\cdot\frac{3\cdot e^t\cdot\sin x\cdot\sin z}{\sin x+2},$$

$$3\cdot e^t\cdot\sin x\cdot\sin z = (\sin x+2)\cdot\frac{3\cdot e^t\cdot\sin x\cdot\sin z}{\sin x+2}.$$

Получили верное тождество.

Функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$, $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,z)$ и их производные ограничены в $G_{[0,T]}$.

Пример 3.1 показывает, что множество решений задачи (3.1)–(3.10) не пусто.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе получены следующие результаты:

1. доказана однозначная глобальная разрешимость задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении с данными Коши, когда неизвестный коэффициент имеет вид суммы двух функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменной;

2. в случае, когда неизвестный коэффициент при функции источника представим в виде суммы функций, доказана оценка устойчивости решения обратной задачи по входным данным;

3. в малом временном интервале доказано существование решения задачи определения функции источника в двумерном параболическом уравнении в случае, когда неизвестный коэффициент имеет вид произведения двух функций, каждая из которых зависит от двух переменных: временной и одной пространственной.

Все полученные в работе результаты являются новыми и имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы для построения общей теории обратных задач.

Результаты данной работы обсуждались на научном семинаре кафедры МАиДУ ИМ СФУ (под руководством д.ф.-м.н. проф. Ю. Я. Белова), докладывались на XLII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2009, диплом III степени), VI всесибирском конгрессе женщин-математиков (г. Красноярск, 2010), XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам (г. Красноярск, 2010), XLVIII международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2010) и VII всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука» (г. Красноярск, 2011, диплом II степени).

За работу по теме дипломной работы был присужден диплом Конкурса научных студенческих и аспирантских работ по математике и механике имени академика М. А. Лаврентьева.

Результаты проделанной работы опубликованы в материалах нескольких конференций [23, 24, 25, 26, 27] и в Журнале Сибирского федерального университета [28].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Ватульян, А. О. Математические модели и обратные задачи / А.О. Ватульян // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №11. – С. 143 – 148.

[2] Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А.М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.

[3] Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

[4] Самарский, А. А. Уравнения математической физики / А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1977.

[5] Саватеев, Е. Г. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений / Е.Г. Саватеев // Доклады Академии Наук. – 1995. – Т. 340. – №5. – С. 595 – 596.

[6] Саватеев, Е. Г. О задаче определения функции источника и коэффициента параболического уравнения / Е.Г. Саватеев // Доклады Академии Наук. – 1995. – Т. 344. – №5. – С. 597 – 598.

[7] Абылкаиров, У. У. Задача идентификации функций источника для параболического уравнения / У.У. Абылкаиров, С.Е. Айтжанов // Тезисы Международной конференции «Проблемы современной математики и механики». – Алматы, 2005. – С. 52 – 53.

[8] Афиногенова, О. А. О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения / О.А. Афиногенова, Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 424. – № 4. – С. 439 – 441.

[9] Соловьев, В. В. О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения / В.В. Соловьев // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – №9. – С. 1577 – 1583.

[10] Белов, Ю. Я. О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой / Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Специальный выпуск журнала «Вычислительные технологии», посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко. – 2006. – Т. 11. – Ч. 1. – С. 46 – 54.

[11] Майнагашева, А. С. Об одной задаче идентификации функции источника многомерного параболического уравнения / А.С. Майнагашева, И.В. Фроленков // VI Всесибирский конгресс женщин-математиков (в день рождения Софьи Васильевны Ковалевской): Материалы Всероссийской конференции, 15–17 января 2010г. – Красноярск, РИЦ СибГТУ, 2010. – С. 268 – 271.

[12] Черепанова, О. Н. Об одной задаче идентификации функции источника в параболическом уравнении / О.Н. Черепанова, Т.Н. Шипина // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2009. – 2(3). – С. 370 – 375.

[13] Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New York: Marcel Dekker, 2000.

[14] Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. – Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 1999. – 236 с.

[15] Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко – Новосибирск, 1967. – 195 с.

[16] Белов, Ю. Я. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений / Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т. 404. – №5. – С. 583 – 585.

[17] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функциального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин; 6-е изд. – М.: Наука, 1989. – 624с.

[18] Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература» / И.П. Натансон; 3-е изд. – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 560 с.

[19] Ильин, А. М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17. – №3. – С. 3 – 146.

[20] Рождественский, Б. М. Системы квазилинейных уравнений / Б.М. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1978. – 668с.

[21] Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов высших учебных заведений / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

[22] Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1982.

[23] Кригер, Е. Н. Об идентификации функции источника параболического уравнения в двумерном случае / Е.Н. Кригер // Труды XLII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам. – Красноярск, ИПК СФУ, 2009. – С. 30 – 31.

[24] Кригер, Е. Н. Задача идентификации функции источника в параболическом уравнении / Е.Н. Кригер, И.В. Фроленков // VI Всесибирский конгресс женщин-математиков (в день рождения Софьи Васильевны Ковалевской): Материалы Всероссийской конференции, 15–17 января 2010г. – Красноярск, РИЦ СибГТУ, 2010. – С. 238 – 240.

[25] Кригер, Е. Н. Идентификация функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е.Н. Кригер // Труды XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам – Красноярск, ИПК СФУ, 2010. – С. 61 – 66.

[26] Кригер, Е. Н. Идентификация функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е.Н. Кригер, И.В. Фроленков // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. – С. 45.

[27] Кригер, Е. Н. Задача идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / Е.Н. Кригер, И.В. Фроленков // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2011. – С. 50.

[28] Фроленков, И. В. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / И.В. Фроленков, Е.Н. Кригер // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2010. – 3(4). – С. 556 – 564.