Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2010, 3(4), 556–564

УДК 517.9

О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении

Игорь В. Фроленков*
Екатерина Н. Кригер†
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.07.2010, окончательный вариант 25.08.2010, принята к печати 10.09.2010

В работе доказаны существование, единственность и устойчивость по входным данным решения задачи идентификации функции источника специального вида в параболическом уравнении в случае данных Коши.

Ключевые слова: задачи идентификации коэффициентов, обратные задачи, уравнения в частных производных, метод слабой аппроксимации, устойчивость решения.

В работе рассмотрена задача идентификации функции источника специального вида в параболическом уравнении в случае данных Коши. Существование и единственность решения задачи доказаны в классах гладких ограниченных функций. Для исследования задачи применяется метод, позволяющий, используя условия переопределения, привести исходную обратную задачу к прямой задаче для нагруженного уравнения [1, 2]. Существование решения прямой задачи доказано методом слабой аппроксимации [3, 4].

Задача идентификации функции источника, зависящей от (t, x), рассмотрена в работе [5]. В [2] изучен случай, когда условия переопределения задаются на гладкой кривой, а неизвестная функция источника зависит лишь от временной переменной. Краевые задачи идентификации функции источника исследованы в работах [6, 7].

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \,|\, 0 \leqslant t \leqslant T,\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t, x, z) \cdot \lambda(t, x, z),\ t \in (0, T),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0, x, z) = u_0(x, z), \tag{2}$$

где наряду с функцией $u(t, x, z)$ нужно определить также функцию $\lambda(t, x, z)$, причем

$$\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z). \tag{3}$$

Пусть заданы условия переопределения:

$$u(t, x, \alpha) = \varphi(t, x), \tag{4}$$

*kspk_job@mail.ru
†e_katherina@mail.ru

$$u(t,\beta,z)=\psi(t,z), \tag{5}$$

где α,β — некоторые фиксированные постоянные.

Считаем выполненными условия согласования:

$$u_0(x,\alpha)=\varphi(0,x), \tag{6}$$

$$u_0(\beta,z)=\psi(0,z), \tag{7}$$

$$\varphi(t,\beta)=\psi(t,\alpha), \tag{8}$$

и условия на функцию $f(t,x,z)$:

$$\big|f(t,\beta,z)\big|\geqslant\delta_1>0,\ \big|f(t,x,\alpha)\big|\geqslant\delta_2>0,\quad \forall\, t\in[0,T],\ \forall\,(x,z)\in\mathbb{R}^2, \tag{9}$$

где δ_1,δ_2 — некоторые постоянные.

Приведем данную обратную задачу к вспомогательной прямой. Для этого в уравнении (1) сначала положим $x=\beta$ и выразим из получившегося равенства $\lambda_1(t,\beta)$, затем положим $z=\alpha$ и выразим $\lambda_2(t,\alpha)$, далее возьмём $x=\beta$ и $z=\alpha$. В полученное соотношение подставим выражения на функции $\lambda_1(t,\beta)$ и $\lambda_2(t,\alpha)$ и выразим $\lambda(t,x,z)$.

$$\lambda(t,x,z)=\frac{u_t(t,\beta,z)-u_{zz}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}+\frac{u_t(t,x,\alpha)-u_{xx}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}-\\ -\frac{u_t(t,\beta,\alpha)-u_{xx}(t,\beta,\alpha)-u_{zz}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}-\frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}-\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}.$$

Затем, используя условия переопределения (4),(5), получим выражение на неизвестный коэффициент при функции $f(t,x,z)$ в следующем виде:

$$\lambda(t,x,z)=g(t,x,z)-\frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}-\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}, \tag{10}$$

где

$$g(t,x,z)=\frac{\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)}{f(t,\beta,z)}+\frac{\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)}{f(t,x,\alpha)}-\\ -\frac{\psi_t(t,\alpha)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}- \tag{11}$$

— известная функция.

Теперь подставим выражение (10) в уравнение (1) и перейдем к прямой задаче для уравнения

$$u_t=u_{xx}+u_{zz}+f(t,x,z)\cdot\left[-\frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}-\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}\right]+G(t,x,z),\\ t\in(0,T),\ (x,z)\in\mathbb{R}^2, \tag{12}$$

с начальным условием (2).

Здесь $G(t,x,z)=f(t,x,z)\cdot g(t,x,z)$ — известная функция.

Пусть

$$\Phi_1(t,x,z)=\frac{f(t,x,z)}{f(t,\beta,z)},\ \Phi_2(t,x,z)=\frac{f(t,x,z)}{f(t,x,\alpha)}.$$

Относительно входных данных предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (13), и удовлетворяют ему.

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \leqslant C,$$
$$k_1, k_2 = 0,1,\ldots,6. \quad (13)$$

Докажем разрешимость прямой задачи.

Для доказательства существования решения прямой задачи будем использовать метод слабой аппроксимации [3]. Расщепим уравнение (12) на четыре дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{4}$ в следах неизвестных функций

$$u_t^\tau = 4\cdot\left(u_{xx}^\tau + u_{zz}^\tau\right),\ n\tau < t \leqslant \left(n+\tfrac{1}{4}\right)\tau; \quad (14)$$
$$u_t^\tau = 4\cdot u_{xx}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{4},\beta,z\right)\cdot\Phi_1(t,x,z),\ \left(n+\tfrac{1}{4}\right)\tau < t \leqslant \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau; \quad (15)$$
$$u_t^\tau = 4\cdot u_{zz}^\tau\left(t-\tfrac{\tau}{4},x,\alpha\right)\cdot\Phi_2(t,x,z),\ \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau < t \leqslant \left(n+\tfrac{3}{4}\right)\tau; \quad (16)$$
$$u_t^\tau = 4\cdot G(t,x,z),\ \left(n+\tfrac{3}{4}\right)\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \quad (17)$$
$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \quad (18)$$
$$n = 0,1,2,\ldots,(N-1),\ N\tau = T.$$

Для решения u^τ расщепленной задачи (14)–(18) доказаны равномерные по τ оценки:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k_1,k_2 = 0,1,\ldots,6, (t,x,z)\in G_{[0,T]}. \quad (19)$$

Из оценок (19) следует, что правые части уравнений (14)–(17) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, а значит, и левые части уравнений будут равномерно ограничены по τ.

$$\left|u_t^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,T]}.$$

Дифференцируя уравнения (14)–(17) по x и z, в силу (19) получим оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_t^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k_1,k_2 = 0,1,\ldots,4. \quad (20)$$

Оценки (19), (20) гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (14)–(18) сходится вместе с производными по x и по z до четвертого порядка включительно к функции $u(t,x,z)\in C^{0,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации [3] является решением задачи (12), (2), причем $u(t,x,z)\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$, где

$$C^{l,l_1,l_2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right) = \left\{u(t,x,z)\ \middle|\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}u, \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u \in C\left(G_{[0,T]}\right),\right.$$
$$\left. k=0,1,\ldots,l, k_1=0,1,\ldots,l_1, k_2=0,1,\ldots,l_2\right\}.$$

При этом справедливы следующие оценки при $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|\leqslant C,\ \ k_1,k_2=0,1,\dots,4. \tag{21}$$

Теперь докажем, что пара функций $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)$, где $\lambda(t,x,z)$ определяется соотношением (10) и удовлетворяет условию (3), является решением обратной задачи. Так как $u(t,x,z)$ — решение прямой задачи, то при подстановке $u(t,x,z)$ в (1) и (2) получим тождества.

Из (10) и (12), с учетом условий (9), (13), (21), следует, что $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\leqslant C. \tag{22}$$

Докажем выполнение условия переопределения (4).

Для этого положим в (12) $z=\alpha$. Имеем:

$$u_t(t,x,\alpha)=u_{xx}(t,x,\alpha)+u_{zz}(t,x,\alpha)+f(t,x,\alpha)\cdot\left[g(t,x,\alpha)-\frac{u_{xx}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}-\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}\right],$$

где функция $g(t,x,\alpha)$ известна и задана соотношением (11).

Преобразуем выражение следующим образом:

$$u_t(t,x,\alpha)=u_{xx}(t,x,\alpha)+\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)+\big(\varphi_{xx}(t,\beta)-u_{xx}(t,\beta,\alpha)\big)\cdot\frac{f(t,x,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}.$$

Введём обозначение:

$$v^1(t,x)=u(t,x,\alpha)-\varphi(t,x). \tag{23}$$

В силу (6) справедливо следующее равенство:

$$v^1(0,x)=u(0,x,\alpha)-\varphi(0,x)=0.$$

Используя обозначения (23), получим

$$\begin{cases} v^1_t(t,x)=v^1_{xx}(t,x)-\dfrac{f(t,x,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}\cdot v^1_{xx}(t,\beta),\\ v^1(0,x)=u(0,x,\alpha)-\varphi(0,x)=0.\end{cases} \tag{24}$$

Рассмотрим в области $\Pi_{[0,T]}=\{(t,y)\,|\,0\leqslant t\leqslant T, y\in\mathbb{R}\}$ задачу Коши для уравнения

$$v_t(t,y)=v_{yy}(t,y)-s(t,y)\cdot v_{yy}(t,\eta) \tag{25}$$

с начальным условием

$$v(0,y)=r(y). \tag{26}$$

Предполагаем, что функции $s(t,y)$, $r(y)$ и все их производные непрерывны и ограничены в $\Pi_{[0,T]}$, η — фиксированная вещественная постоянная. Доказана

Лемма 1. *Если решение* $v(t,y) \in C^{1,4}\left(\Pi_{[0,T]}\right)$ *задачи* (25), (26) *существует и удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{4}\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}v(t,y)\right| \leqslant C,$$

то оно единственно.

Здесь

$$C^{1,4}\left(\Pi_{[0,T]}\right) = \left\{ v(t,y) \;\middle|\; v_t(t,y), \frac{\partial^k}{\partial y^k}v(t,y) \in C\left(\Pi_{[0,T]}\right),\ k=0,1,\dots,4 \right\}.$$

В силу леммы 1 решение задачи (24) единственно. Очевидно, что решением является функция $v^1(t,x) \equiv 0$.

Таким образом, из (23) следует выполнение условия (4).

Теперь докажем условие переопределения (5). Положим в (12) $x=\beta$. Получим:

$$u_t(t,\beta,z) \;=\; u_{xx}(t,\beta,z) + u_{zz}(t,\beta,z) + f(t,\beta,z)\cdot\left[g(t,\beta,z) - \frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} - \frac{u_{zz}(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}\right],$$

где функция $g(t,\beta,z)$ известна и задана соотношением (11).

Используя условия согласования, получим уравнение

$$u_t(t,\beta,z) = u_{zz}(t,\beta,z) + \psi_t(t,z) - \psi_{zz}(t,z) - \left(u_{zz}(t,\beta,\alpha) - \psi_{zz}(t,\alpha)\right)\cdot\frac{f(t,\beta,z)}{f(t,\beta,\alpha)}.$$

Обозначим

$$v^2(t,z) = u(t,\beta,z) - \psi(t,z). \tag{27}$$

Тогда из (7) следует равенство

$$v^2(0,x) = u(0,\beta,z) - \psi(0,z) = 0.$$

Используя обозначения (27), получим задачу

$$\begin{cases} v^2_t(t,z) = v^2_{zz}(t,z) - \dfrac{f(t,\beta,z)}{f(t,\beta,\alpha)}\cdot v^2_{zz}(t,\alpha), \\ v^2(0,x) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Решение задачи (28) единственно (в силу леммы 1). И таким решением является функция $v^2(t,z) \equiv 0$.

Отсюда, учитывая (27), следует выполнение условия (5).

Итак, условия переопределения выполнены. Следовательно, пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ является решением исходной задачи (1)–(5).

Доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (3), (9), (13). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ *обратной задачи* (1)–(8) *в классе*

$$Z(T) = \left\{ u(t,x,z), \lambda(t,x,z) \;\middle|\; u \in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right), \lambda(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right) \right\},$$

удовлетворяющее соотношению (22).

Докажем единственность решения задачи (1)–(5) при выполнении условий (9), (13), (22).

Пусть $\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\}$ и $\{\tilde{u}(t,x,z),\tilde{\lambda}(t,x,z)\}$ — два классических решения задачи (1)–(5). Пара функций $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ — решение, определяемое соотношением (10) и удовлетворяющее условию (3), а пара функций $\tilde{u}(t,x,z),\tilde{\lambda}(t,x,z)=\widetilde{\lambda_1}(t,x)+\widetilde{\lambda_2}(t,z)$ — некоторое другое решение задачи (1)–(5), удовлетворяющее условию (22). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$u_t(t,x,z)=u_{xx}(t,x,z)+u_{zz}(t,x,z)+f(t,x,z)\cdot\lambda(t,x,z), \tag{29}$$

$$\tilde{u}_t(t,x,z)=\tilde{u}_{xx}(t,x,z)+\tilde{u}_{zz}(t,x,z)+f(t,x,z)\cdot\tilde{\lambda}(t,x,z), \tag{30}$$

$$\begin{cases} u(0,x,z)=u_0(x,z),\;\; \tilde{u}(0,x,z)=u_0(x,z),\\ u(t,x,\alpha)=\varphi(t,x),\;\; \tilde{u}(t,x,\alpha)=\varphi(t,x),\\ u(t,\beta,z)=\psi(t,z),\;\; \tilde{u}(t,\beta,z)=\psi(t,z). \end{cases} \tag{31}$$

Пусть

$$u(t,x,z)-\tilde{u}(t,x,z)=w(t,x,z),$$
$$\lambda(t,x,z)-\tilde{\lambda}(t,x,z)=\gamma(t,x,z)=\gamma_1(t,x)+\gamma_2(t,z).$$

Пара функций $w(t,x,z),\gamma(t,x,z)$ является решением задачи Коши:

$$w_t(t,x,z)=w_{xx}(t,x,z)+w_{zz}(t,x,z)+f(t,x,z)\cdot\gamma(t,x,z), \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &w(0,x,z)=0,\\ &w(t,x,\alpha)=0,\\ &w(t,\beta,z)=0. \end{aligned} \tag{33}$$

Полагаем в уравнении (32) $x=\beta$, $z=\alpha$. Используя (33), выражаем коэффициент при функции $f(t,x,z)$. Подставляя его выражение в (32), получим

$$w_t(t,x,z)=w_{xx}(t,x,z)+w_{zz}(t,x,z)-f(t,x,z)\cdot\left(\frac{w_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}+\frac{w_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}\right), \tag{34}$$

$$w(0,x,z)=0. \tag{35}$$

Доказано, что $w(t,x,z)\equiv 0$ в $G_{[0,T]}$, то есть $u(t,x,z)=\tilde{u}(t,x,z)$ в $G_{[0,T]}$. Из (32) и (33) для $\gamma(t,x,z)$ следует выполнение соотношения

$$f(t,x,z)\cdot\gamma(t,x,z)=0. \tag{36}$$

Рассматривая (36) в точках $x=\beta$ и $z=\alpha$, в $G_{[0,T]}$ получаем справедливость равенств:

$$f(t,\beta,z)\cdot\big(\gamma_1(t,\beta)+\gamma_2(t,z)\big)=0,$$
$$f(t,x,\alpha)\cdot\big(\gamma_1(t,x)+\gamma_2(t,\alpha)\big)=0,$$
$$f(t,\beta,\alpha)\cdot\big(\gamma_1(t,\beta)+\gamma_2(t,\alpha)\big)=0.$$

В силу (9)

$$\gamma_1(t,\beta)+\gamma_2(t,z)=0, \tag{37}$$

$$\gamma_1(t,x)+\gamma_2(t,\alpha)=0, \tag{38}$$

$$\gamma_1(t,\beta)+\gamma_2(t,\alpha)=0. \tag{39}$$

Сложим уравнения (37) и (38).

$$\gamma_1(t,x) + \gamma_2(t,z) + \gamma_1(t,\beta) + \gamma_2(t,\alpha) = 0.$$

Из (39) следует, что

$$\gamma(t,x,z) = \gamma_1(t,x) + \gamma_2(t,z) = 0,$$

то есть

$$\lambda(t,x,z) - \tilde{\lambda}(t,x,z) = 0,\ t \in [0,T],$$

а следовательно,

$$\lambda(t,x,z) = \tilde{\lambda}(t,x,z),\ t \in [0,T].$$

Доказана

Теорема 2. *Решение* $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ *задачи* (1)–(9), *удовлетворяющее* (22), *единственно в классе* $Z(T)$.

Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (6)–(9), (13). *Тогда в классе* $Z(T)$ *существует единственное решение* $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$ *задачи* (1)–(5), *удовлетворяющее соотношению* (22).

Докажем непрерывную зависимость решения задачи (1)–(5) от входных данных.

Рассмотрим в $G_{[0,T]}$ две задачи Коши:

$$\begin{aligned}
&u^i_t = u^i_{xx} + u^i_{zz} + f^i(t,x,z)\cdot\lambda^i(t,x,z),\ \ i = 1,2,\\
&\lambda^i(t,x,z) = \lambda^i_1(t,x) + \lambda^i_2(t,z),\\
&u^i(0,x,z) = u^i_0(x,z),\\
&u^i(t,x,\alpha) = \varphi^i(t,x),\\
&u^i(t,\beta,z) = \psi^i(t,z),
\end{aligned}$$

где α, β — некоторые фиксированные постоянные.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&U = u^1 - u^2, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \lambda^1_1 - \lambda^2_1 + \lambda^1_2 - \lambda^2_2,\\
&F = f^1 - f^2, \quad U_0 = u^1_0 - u^2_0, \quad \Phi = \varphi^1 - \varphi^2, \quad \Psi = \psi^1 - \psi^2.
\end{aligned} \tag{40}$$

Вычтем из задачи при $i = 1$ задачу при $i = 2$. Согласно обозначениям (40) получим задачу:

$$U_t = U_{xx} + U_{zz} + F\cdot\lambda^1 + f^2\cdot\Lambda, \tag{41}$$

$$U(0,x,z) = U_0(x,z), \tag{42}$$

$$U(t,x,\alpha) = \Phi(t,x), \tag{43}$$

$$U(t,\beta,z) = \Psi(t,z), \tag{44}$$

Полагая в уравнении (41) $x = \beta, z = \alpha$ и используя (43) и (44), получаем выражение для неизвестного коэффициента

$$\begin{aligned}\Lambda(t,x,z) = &-\frac{U_{xx}(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} - \frac{U_{zz}(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} + \\ &+ \frac{\Psi_t(t,z) - \Psi_{zz}(t,z) - F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} + \\ &+ \frac{\Phi_t(t,x) - \Phi_{xx}(t,x) - F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} - \\ &- \frac{\Psi_t(t,\alpha) - \Phi_{xx}(t,\beta) - \Psi_{zz}(t,\alpha) + F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)}{f^2(t,\beta,\alpha)}. \end{aligned} \tag{45}$$

Подставляя выражение (45) в уравнение (41), получаем задачу Коши для уравнения

$$\begin{aligned}U_t(t,x,z) = &U_{xx}(t,x,z) + U_{zz}(t,x,z) + F(t,x,z)\cdot\lambda^1(t,x,z) + \\ &+ f^2(t,x,z)\cdot\Bigg(-\frac{U_{xx}(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} - \frac{U_{zz}(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} + \\ &+ \frac{\Psi_t(t,z) - \Psi_{zz}(t,z) - F(t,\beta,z)\cdot\lambda^1(t,\beta,z)}{f^2(t,\beta,z)} + \\ &+ \frac{\Phi_t(t,x) - \Phi_{xx}(t,x) - F(t,x,\alpha)\cdot\lambda^1(t,x,\alpha)}{f^2(t,x,\alpha)} - \\ &- \frac{\Psi_t(t,\alpha) - \Phi_{xx}(t,\beta) - \Psi_{zz}(t,\alpha) + F(t,\beta,\alpha)\cdot\lambda^1(t,\beta,\alpha)}{f^2(t,\beta,\alpha)}\Bigg) \end{aligned} \tag{46}$$

с начальным условием (42).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} ||D_1(t,x,z)||_1 &= \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_1(\xi,x,z)\right|, \\ ||D_2(x,z)||_2 &= \sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}\sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}D_2(x,z)\right|, \\ ||D_3(t,z)||_3 &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6}\sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i\partial z^j}D_3(\xi,z)\right|, \\ ||D_4(t,x)||_4 &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{6}\sup_{0<\xi\leqslant T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i\partial x^j}D_4(\xi,x)\right|. \end{aligned} \tag{47}$$

Функции $D_i, i = 1,2,\ldots,4$, из (47) и их производные, входящие в (47), ограничены и непрерывны в $G_{[0,T]}$.

Для всех $t \in (0;T]$ согласно обозначениям (47) доказана равномерная по τ оценка

$$||U||_1 \leqslant C\cdot\Big(||U_0||_2 + ||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4\Big).$$

Из (13) и (45) следует оценка

$$||U||_1 + ||\Lambda||_1 \leqslant C\cdot\Big(||U_0||_2 + ||F||_1 + ||\Psi||_3 + ||\Phi||_4\Big),$$

то есть

$$||u^1 - u^2||_1 + ||\lambda^1 - \lambda^2||_1 \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot \Big(||u_0^1 - u_0^2||_2 + ||f^1 - f^2||_1 + ||\psi^1 - \psi^2||_3 + ||\varphi^1 - \varphi^2||_4\Big). \quad (48)$$

Теорема 4. *При выполнении условий* (6)–(9), (13) *для решения* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)$ *задачи* (1)–(5) *выполняется оценка* (48) *устойчивости по входным данным.*

Список литературы

[1] Ю.Я.Белов, И.В.Фроленков, Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений, *Докл. РАН*, **404**(2005), №5, 583–585.

[2] Ю.Я.Белов, И.В.Фроленков, О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой, *Вычислительные технологии*, **11**(2006), №1, 46–54.

[3] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, КрасГУ, 1999.

[4] Н.Н.Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967.

[5] О.А.Афиногенова, Ю.Я.Белов, И.В.Фроленков, О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения, *Докл. РАН*, **424**(2009), №4, 439–441.

[6] A.I.Prilepko, D.G.Orlovsky, I.A.Vasin, Methods for solving inverse problems in mathematical physics, New York: Marcel Dekker, 2000.

[7] О.Н.Черепанова, Т.Н.Шипина, Об одной задаче идентификации функции источника в параболическом уравнении, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **2**(2009), №3, 370–375.

An Identification Problem of the Source Function of the Special Form in Two-Dimensional Parabolic Equation

Igor V. Frolenkov
Ekaterina N. Kriger

The existence, uniqueness and stability of solution by input data of the identification problem for parabolic equation with source function of the special form in the case of Cauchy's data has been proved in this article.

Keywords: problem of the identification of source function, inverse problem, equations in partial derivatives, method of weak approximation, solution stability.