ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 424, № 4, с. 439–441

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2009 г. О. А. Афиногенова, Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков

Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 13.11.2007 г.

Поступило 23.09.2008 г.

В работах [2, 7] доказаны однозначная разрешимость "в целом" и стабилизация решения задачи идентификации функции источника параболического уравнения при стремлении к бесконечности временной переменной в случае данных Коши и при условии достаточно быстрого стремления к нулю входных данных задачи по выделенной пространственной переменной.

В данной работе найдены достаточные условия разрешимости "в целом" и стабилизации решения указанной выше задачи идентификации в классах гладких ограниченных функций. Исследованы задача Коши, первая и вторая краевые задачи.

Рассмотрим в области $\Pi_{(0,T)} = \{(t, x)|\ 0 < t < T, x \in E_1\}$ задачу Коши

$$u_t(t, x) = b(t)u_{xx}(t, x) + a(t)u(t, x) + f(t)g(t, x), \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in E_1. \quad (2)$$

Функции $a(t)$, $b(t)$, $u_0(x)$, $g(t, x)$ действительнозначные и заданы в $[0, T]$, E_1 и $\Pi_{[0,T]}$ соответственно. Относительно коэффициента $b(t)$ везде и далее предполагается, что $b(t) > 0$ при всех t в рассматриваемой области.

Функция $f(t)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t, x)$ задачи (1), (2), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

в предположении выполнения условия согласования

$$u_0(0) = \varphi(0). \quad (4)$$

Пусть функция $g(t, x)$ такова, что при $t \in [0, T]$ выполняется условие

$$|g(t, 0)| \geq \delta > 0, \quad (5)$$

где δ – некоторая фиксированная постоянная.

Относительно входных данных также предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение, и при $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ удовлетворяют ему:

$$|a(t)| + |b(t)| + |\varphi(t)| + |\varphi'(t)| + \\ + \left|\frac{d^k}{dx^x}u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^x}g_0(t, x)\right| \leq C, \quad (6)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

С учетом условия переопределения (3) выражение для неизвестного коэффициента имеет вид

$$f(t) = \frac{\gamma(t) - b(t)u_{xx}(t, 0)}{g(t, 0)}, \quad (7)$$

где $\gamma(t) = \varphi'(t) - a(t)\varphi(t)$ – известная гладкая функция.

Для доказательства разрешимости используется метод слабой аппроксимации [1, 4].

Справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия* (4)–(6). *Тогда существует и единственно решение* $u(t, x)$, $f(t)$ *задачи* (1)–(3) *в классе*

$$Z_{[0,T]} = \{u(t, x), f(t)|\ u(t, x) \in C^{1,2}_{t,x}(\Pi_{[0,T]}), \\ f(t) \in C[0, T]\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$|f(t)| + \sum_{k=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t, x)\right| \leq C, \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad (8)$$

где

$$C^{1,2}_{t,x}(\Pi_{[0,T]}) = \{u(t, x)|\ u, u_t, u_x, u_{xx} \in C(\Pi_{[0,T]})\}.$$

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Исследовано поведение решения задачи (1)–(3) в области $\Pi_{[0,+\infty)}$ при стремлении временной переменной к бесконечности.

Т е о р е м а 2. *Пусть в* $\Pi_{[0,+\infty)}$ *выполняются условия* (5), (6) *и соотношения*

$$a(t) \le -\tilde{A}, \ \text{где} \ \tilde{A} > \sup_{\eta \in [0,+\infty)} \sup_{x \in E_1} \left| \frac{b(\eta) g_{xx}(\eta, x)}{g(\eta, 0)} \right|,$$
$$\int_0^{+\infty} |b(\eta)| d\eta + \int_0^{+\infty} |\varphi'(t) - \varphi(t) a(t)| d\eta < C. \tag{9}$$

Тогда для решения задачи (1)–(3) *в* $\Pi_{[0,+\infty)}$ *справедливо неравенство*

$$|f(t)| + |u(t, x)| \le C.$$

Если дополнительно имеют место неравенства

$$|b(t)| \le \frac{Q_1}{1+t^p}, \quad p = \text{const} > 1, \quad Q_1 = \text{const} > 0, \tag{10}$$

$$|\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)| \le \frac{Q_2}{1+t^q}, \quad q = \text{const} > 1,$$
$$Q_2 = \text{const} > 0, \tag{11}$$

то для решения задачи (1)–(3) *в* $\Pi_{[0,+\infty)}$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\sup_{x \in E_1} |u(t, x)| + |f(t)| \right) = 0.$$

Аналогичные результаты справедливы в случае краевых задач первого и второго рода с однородными граничными условиями.

Рассмотрим в области $\Omega_{[0,T]} = \{(t, x)|\ 0 \le t \le T, 0 \le x \le \pi\}$ первую краевую задачу для уравнения (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \tag{12}$$

Функция $f(t)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t, x)$ задачи (1), (2), (12), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t, \gamma) = \varphi(t) \tag{13}$$

для некоторой фиксированной точки $0 < \gamma < \pi$.

Считаем выполненным условие согласования

$$u_0(\gamma) = \varphi(0) \tag{14}$$

и при $0 \le t < \infty$ условие

$$|g(t, \gamma)| \ge \delta > 0, \quad \delta = \text{const}. \tag{15}$$

Пусть функция $u_0(x)$ и $g(t, x)$ допускают нечетное продолжение по переменной x на E_1 (обозначение не меняем):

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin kx, \quad g(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx, \tag{16}$$

$\alpha_k = \text{const}$, $\beta_k(t) \in C[0, T]$, и обладают достаточной гладкостью (имеют все непрерывные производные, входящие в соотношение (6)) и при $(t, x) \in \Pi_{[0,T]} = \{(t, x)|\ 0 \le t \le T, x \in E_1\}$ выполняется условие (6).

Имеют место следующие теоремы.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия* (6), (14)–(16). *Тогда при любом* $T > 0$ *в классе*

$$\hat{Z}(T) = \{u(t, x), f(t)|\ u \in C^{1,2}_{t,x}(\Omega_{[0,T]}),$$
$$f(t) \in C[0, T]\}$$

существует единственое решение $u(t, x), f(t)$ *задачи* (1), (2), (12), (13), *удовлетворяющее соотношению*

$$|f(t)| + \sum_{k=0}^{2} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^x} u(t, x) \right| \le C, \quad (t, x) \in \Omega_{[0,T]}. \tag{17}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть в* $\Omega_{[0,+\infty)}$ *выполняются условия* (6), (15) *и соотношение*

$$a(t) \le -\tilde{A},$$
$$\text{где} \ \tilde{A} > \sup_{\eta \in [0,+\infty)} \sup_{x \in [0,\pi]} \left| \frac{b(\eta) g_{xx}(\eta, x)}{g(\eta, 0)} \right|, \tag{18}$$

$$\int_0^{+\infty} |b(\eta)| d\eta + \int_0^{+\infty} |\varphi'(t) - \varphi(t) a(t)| d\eta \le C. \tag{19}$$

Тогда для решения задачи (1), (2), (12), (13) *в* $\Omega_{[0,+\infty)}$ *справедливо неравенство*

$$|f(t)| + |u(t, x)| \le C. \tag{20}$$

Если дополнительно имеют место неравенства (10), (11), *то для решения* $u(t, x), f(t)$ *задачи* (1), (2), (12), (13) *справедливо*

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\sup_{x \in [0,\pi]} |u(t, x)| + |f(t)| \right) = 0. \tag{21}$$

В случае второй краевой задачи при условии, что функции $u_0(x)$ и $g(t, x)$ допускают четное продолжение по x на E_1, справедливы аналогичные теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белов Ю.Я., Кантор С.А.* Метод слабой аппроксимации. Краснояр. гос. ун-т, 1999. 236 с.
2. *Сорокин Р.В.* // Вестн. Краснояр. гос. университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2005. № 1. С. 167–178.
3. *Белов Ю.Я., Фроленко И.В.* // Вычислительные технологии. Спец. вып., посвященный 85-летию акад. Н.Н. Яненко. 2006. Т. 11. Ч. 1. С. 46–54.
4. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967. 195 с.
5. *Anikonov Yu.E.* // J. Inv. Ill-Posed Prob. 1999. V. 7. № 5. P. 435–452.
6. *Belov Yu.Ya.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Utrecht: VSP, 2002. 211 p.
7. *Belov Yu.Ya., Shipina T.N.* // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6. № 4.