ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Фроленков Игорь Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Белов Ю.Я.

Красноярск 2006

Содержание

Введение

При изучении физических объектов или явлений экспериментальными методами типична ситуация, когда интересующие исследователя количественные характеристики объекта недоступны для непосредственного наблюдения. Или проведение самого эксперимента вообще невозможно, потому что, он либо запрещен (например, при изучении здоровья человека), либо слишком опасен (например, при изучении экологических явлений). Наконец, эксперимент может быть связан с очень большими финансовыми затратами. В этом случае приобретается некоторая косвенная информация об исследуемом объекте. Эта информация определяется природой изучаемого объекта и используемым при этом изучении экспериментальным комплексом. В таких ситуациях для диагностики объектов (например, их внутренней структуры) требуются математическая обработка и интерпретация результатов наблюдений.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, границы области, граничных или начальных условий. Неизвестные элементы начально-краевых задач определяются по некоторой дополнительной информации. Такой информацией служат различного рода условия переопределения. Многие важные прикладные вопросы, касающиеся упругих смещений, электромагнитных колебаний, диффузионных процессов, геофизики, сейсмологии, компьютерной томографии, геотомографии, диагности плазмы, квантовой теории рассеяния, подводной акустики, квазиоптики, дифракции, теории колебаний молекул, георадиолокации, геофизической нейтронометрии, графиметрии и др. приводят к обратным задачам.

При обработке данных натурных экспериментов по дополнительным косвенным измерениям делается вывод о внутренних связях явления или процесса. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, можно ставить проблему идентификации математической модели, например, определение коэффициентов дифференциальных уравнений. Такие задачи относятся к классу обратных задач математической физики и в настоящий момент во всем мире играют большую роль в естественных науках и их приложениях [25], [42].

В связи с тем, что ранее практически все обратные задачи являлись некорректными с точки зрения их постановки, то существенный прогресс в исследовании стал возможен лишь в последние десятилетия в связи с развитием теории некорректных задач, большой вклад в разработку которой сделан отечественными математиками А.Н. Тихоновым, М.М. Лаврентьевым, В.К. Ивановым, Морозовым В.А. и многими другими [27], [43], [48], [77], [79].

Первые исследования в теории обратных задач связаны с обратными задачами сейсмики. В одномерном случае одна из таких задач впервые была рассмотрена Герглотцем [91]. Теорема единственности решения сложной многомерной обратной задачи для уравнения Шредингера в классе кусочно-аналитических функций впервые была доказана Ю.М. Березанским [22] в начале 50-х годов. Исследования других многомерных обратных задач впоследствии были проведены М.М. Лаврентьевым [1, 6], А.Д. Искендеровым [32, 34], М.В. Клибановым [39], А.И. Прилепко [54, 55], Н.Я. Безнощенко [9, 12] и другими.

В настоящее время теория обратных задач математической физики активно развивается представителями целого ряда отечественных математических школ, в том числе Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым), такими как С.А. Аникин, Ю.Е. Аниконов, А.В. Баев, А.С. Барашков, С.П. Белинский, Ю.Я. Белов, М.И. Белишев, Е.Ы. Бидайбеков, А.С. Благовещенский, Ю.А. Бродский., А.Л. Бухгейм, Е.В. Васильева, А.О. Ватульян, В.М. Волков, Д.И. Глушкова, Н.В. Дементьев, В.И. Дмитриев, Н.Б. Ильинский, А.Д. Искендеров, С.И. Кабанихин, А.Л. Карчевский, В.С. Корнилов, М.В. Клибанов, С.В. Мартаков, Б.С. Парийский, В.И. Прийменко, А.И. Прилепко, Т.П. Пухначева, А.Г. Рамм, В.Г. Синько, Б.Ф. Тазюков, А.М. Федотов, В.А. Чеверда, В.Г. Чередниченко, М.А. Шишленин, В.Г. Яхно и др., а также их учениками. Целый ряд результатов в этом направлении получили в последние десятилетия зарубежные авторы из Италии, Голландии, Швеции, США, Франции, Японии и др.: G. Anger, H.D. Bui, Y. Chen, D. Colton, R. Durridge, H.W. Engl, J. Gottlieb, M. Grasselli, R. Kress, G. Kunetz, J.Q. Lin, A. Lorenzi, J.M. Mendel, R.D. Murch, A. Roger, M. Sondhi, S. Strom, H. Zhang, M. Yamamoto и др.

Краевые задачи определения коэффициентов или функции источника для параболического уравнения в предположении независимости искомых коэффициентов (функции источника) либо от временной переменной, либо от пространственной переменной рассматривались в работах [23], [26], [75], [87], [89], [90], [99], [101] и других. Вопросам корректности обратных задач для линейных параболических уравнений в случае краевых задач также посвящены работы [29], [35], [62], [63].

В работах [72]–[74] исследовалась корректность обратных задач для одномерных параболических уравнений, когда искомый коэффициент или функция источника зависит от переменных t, x и имеет вид $f(t)g(x)$ или $f(t)+g(x)$.

В [82] доказана однозначная разрешимость многомерной обратной задачи определения функции источника $F(t,x)$ параболического уравнения, которая зависит от всех независимых переменных, входящих в уравнение, и представима в виде $F(t,x)=f(t)g(x)$.

Обратным задачам для линейных параболических уравнений с данными Коши в случае нескольких неизвестных коэффициентов посвящены работы [8]–[20], [52], [87], [97], [98], [102]. Разрешимость в данных работах доказана при условии достаточно быстрого убывания входных данных к нулю на бесконечности по выделенной переменной.

Вопросы, рассматриваемые в диссертации, в основном связаны с задачами идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений, содержащих нелинейность достаточно общего вида.

В диссертации получены следующие результаты.

1. Доказана однозначная разрешимость "в малом" одномерной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения, содержащего неизвестные коэффициенты при производной по времени и нелинейном члене, в случае данных Коши. Условия переопределения задаются на фиксированной гиперплоскости.

2. Доказаны теоремы однозначной разрешимости "в малом" для многомерной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения, содержащего неизвестные коэффициенты при нелинейном члене и функции источника, в случае данных Коши. В случае первой и второй краевых задач доказана разрешимость "в малом" одномерной обрат-

ной задачи. Для обоих типов задач условия переопределения задаются на фиксированной гиперплоскости.

3. Доказаны теоремы однозначной разрешимости "в малом" многомерной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения, содержащего неизвестные коэффициенты, зависящие от времени, при нелинейном члене и функции источника. Здесь условия переопределения задаются на гладкой кривой, заданной в параметрическом виде. Рассмотрены задача Коши, первая и вторая краевые задачи.

В основе исследования разрешимости рассматриваемых задач лежит метод, позволяющий переходить от обратной задачи к прямой задаче для нагруженного (содержащего следы решения) уравнения. Этот метод аналогичен методу, впервые предложенному Ю.Е. Аниконовым (когда обратная задачи при помощи преобразования Фурье сводилась к прямой для интегродифференциального уравнения), и развитым в работах [4], [5], [6], [15], [16], [23], [86] и др. Отказ от использования преобразования Фурье позволил снять ограничение на убывание входных данных к нулю на бесконечности, а также позволил рассматривать краевые задачи для уравнений, содержащих нелинейности достаточно общего вида.

Основным методом, применяющимся в диссертации при доказательстве разрешимости прямых задач для нагруженных уравнений является метод слабой аппроксимации (МСА), являющийся методом расщепления на дифференциальном уровне, предложенный Н.Н. Яненко и А.А. Самарским, названный Н.Н. Яненко методом слабой аппроксимации (МСА) [17], [83]. В последствии метод получил развитие в работах их учеников и последователей. В [17], [86] приведено подробное описание МСА и систематизированы имеющиеся результаты.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 103 наименования и списка работ автора по теме диссертации, включающего 9 наименований. Восемь работ написаны и опубликованы в соавторстве. Во всех случаях вклад каждого из соавторов равноценен. Объем диссертации составляет 150 страниц.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию задачи идентификации коэффициентов одномерного полулинейного параболического уравнения, содержащего два неизвестных коэффициента, один из которых стоит при производной по времени, второй - при нелинейном члене. Условия переопределения заданы на фиксированной гиперплоскости.

В области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_1, z \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$\lambda_1(t,x)u_t(t,x,z) = a_1(t,x)u_{xx} + a_2(t,x)u_{zz} + \\ + \lambda_2(t,x)M(t,u(t,x,z)) + f(t,x,z), \quad (2.1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \quad (2.2)$$

Функции $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$ такие, что дифференциальный оператор $L(u)$ является оператором эллиптического типа при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$. Функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_2 и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,x,0) = \varphi_1(t,x), \quad (2.3)$$

$$u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x) \tag{2.4}$$

и условиям согласования

$$u_0(x,0) = \varphi_1(0,x), \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_0(x,0) = \varphi_2(0,x). \tag{2.6}$$

Относительно функции $M(t,y)$ предполагается, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение и удовлетворяет этому соотношению :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\ldots,11,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y\in E_1. \tag{2.7}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть выполняется при $(t,x) \in \Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$ соотношение

$$|\Delta(t,x)| = \left|\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x) M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) M(t,\varphi_1(t,x))\right| \geq \delta > 0, \tag{2.8}$$

где δ – некоторая фиксированная постоянная. Это условие является условием неравенства нулю определителя системы относительно $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$.

Обратная задача (2.1)–(2.4) приводится к прямой задаче Коши для нагруженного уравнения

$$[A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\, u_t = L(u) +$$
$$+ [B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\, M(t,u) +$$
$$+ f(t,x,z),$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),$$

где

$$A_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x) - \psi_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$A_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$A_3(t,x) = -\frac{a_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$B_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) - \psi_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},\ B_3(t,x) = -\frac{a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)},\ \Delta(t,x)$$

– известные функции.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им :

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\psi_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}a_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^m \partial t}\varphi_i(t,x)\right| \leqslant C, \tag{2.9}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}f(t,x,z)\right| \leqslant C, \tag{2.10}$$

Здесь $m = 0, 1, \ldots, 4$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 11 - 2m$, $(t,x,y) \in G_{[0,T]}$.

Пусть также выполняется следующее условие при $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$:

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,0) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,0) \geq \delta. \tag{2.11}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.4.1. *Пусть выполняются условия* (2.5)–(2.11). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (2.1)–(2.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{k=0}^{5}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| + \sum_{m=0}^{2}\sum_{k=0}^{3}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_1(t,x)\right| + \sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_2(t,x)\right| \leqslant C,\ \ (t,x)\in\Pi_{[0,t^*]}, \tag{2.13}$$

где

$$Z(t^*) = \Big\{u(t,x,z),\ \lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),$$
$$\lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})\Big\},$$

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \Big\{f(t,x,z) \mid f, f_t \in C(G_{[0,t^*]}),$$
$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0,t^*]}),\ m \leqslant 2,\ k = 0,1,2,3\Big\},$$

$$C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \Big\{f(t,x,z) \mid \frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0,t^*]}),\ k = 0,1,\ldots,5\Big\}.$$

Здесь t^* – некоторая постоянная, зависящая от константы M_0 из (2.7) и констант C, δ из (2.8)–(2.11), такая, что $0 < t^* \leqslant T$.

Теорема 2.5.1. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (2.1) – (2.8), *удовлетворяющее соотношениям* (2.12), (2.13), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 2.4.1 и 2.5.1 следует

Теорема 2.5.2. *Пусть выполняются условия* (2.5)–(2.11). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (2.1)–(2.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (2.12), (2.13).

В третьей главе в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_n, z \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения тройки действительнозначных функций $\big(u(t,x,z), \lambda_1(t,x), \lambda_2(t,x)\big)$, являющихся решением задачи

$$u_t(t,x,z) = L_x(u) + u_{zz} + \lambda_1(t,x)M(t,u(t,x,z)) + \lambda_2(t,x)f(t,x,z), \tag{3.1}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{3.2}$$

где

$$L_x(u) = \sum_{k,m=1}^{n} a_{km}(t)u_{x_k x_m} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)u_{x_k}, \text{ где } a_{km}(t), a_k(t) \in C\,[0,T]\,,$$

и удовлетворяющих условиям

$$u(t,x,0) = \varphi_1(t,x), \tag{3.3}$$

$$u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x). \tag{3.4}$$

Считаем, что входные данные удовлетворяют условиям согласования

$$u_0(x,0) = \varphi_1(0,x), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(x,0) = \varphi_2(0,x), \tag{3.6}$$

функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Относительно функции $M(t,y)$ также предполагаем, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение (3.7) :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\ldots,9,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in E_1. \tag{3.7}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Предположим, что при $(t,x) \in \Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n\}$ выполняется соотношение

$$\Big|M(t,\varphi_1(t,x))f_z(t,x,0) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f(t,x,0)\Big| \geq \delta > 0, \tag{3.8}$$

где δ – некоторая фиксированная постоянная.

Обратная задача (3.1)–(3.4) приводится к прямой задаче Коши для нагруженного уравнения :

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z)+$$
$$+\left[A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\right] M(t,u(t,x,z))+$$
$$+\left[B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\right] f(t,x,z),$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),$$

где

$$A_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)f_z(t,x,0) - \psi_2(t,x)f(t,x,0)}{\Delta(t,x)},$$

$$A_2(t,x) = \frac{-f_z(t,x,0)}{\Delta(t,x)},\ A_3(t,x) = \frac{f(t,x,0)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_1(t,x) = \frac{\psi_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x)) - \psi_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_2(t,x) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},\ B_3(t,x) = \frac{-M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$\Delta(t,x) = M(t,\varphi_1(t,x))f_z(t,x,0) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f(t,x,0)$$

– известные функции.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения (3.9), (3.10) и удовлетворяют этим соотношениям :

$$\left|D_x^{\beta_1}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i(t,x)\right| + \left|D_x^{\beta_2}\varphi_i(t,x)\right| \leqslant C,\ |\beta_1| \leqslant 4,\ |\beta_2| \leqslant 6,\ i=1,2, \tag{3.9}$$

$$\left|D_x^{\beta_3}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right| + \left|D_x^{\beta_3}\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ |\beta_3| \leqslant 4,\ k=0,1,\ldots,5, \tag{3.10}$$

$$(t,x,z) \in G_{[0,T]}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.4.1. *Пусть выполняются условия* (3.5)–(3.10). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (3.1)–(3.4) *в классе* $Z(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\sum_{k=0}^{3}\left|D_x^\alpha \frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}, \tag{3.11}$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D_x^\alpha \lambda_1(t,x)| + \sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D_x^\alpha \lambda_2(t,x)| \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}. \tag{3.12}$$

Здесь

$$Z(t^*) = \big\{u(t,x,z),\, \lambda_1(t,x),\, \lambda_2(t,x) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),$$
$$\lambda_1(t,x),\, \lambda_2(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})\big\},$$

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{f(t,x,z) \mid f_t,\, \frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha f \in C(G_{[0,t^*]}),\, |\alpha|\leqslant 2,\, k=0,1,2,3\right\}.$$
$$C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}) = \{g(t,x) \mid D_x^\alpha g(t,x) \in C(\Pi_{[0,t^*]}),\, |\alpha| = 0,1,2\}.$$

Теорема 3.5.1. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (3.1)–(3.8), *удовлетворяющее соотношениям* (3.11), (3.12), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 3.4.1, 3.5.1 следует

Теорема 3.5.2. *Пусть выполняются условия* (3.5)–(3.10). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (3.1)–(3.4) *в классе* $Z(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (3.11), (3.12).

Также в области $\Omega_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0\le t\le T,\ 0\le x\le \pi\}$ рассмотрена задача идентификации тройки действительнозначных функций $\big(u(t,x),\lambda_1(t),\lambda_2(t)\big)$, удовлетворяющих краевой задаче для одномерного уравнения

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \lambda_1(t)M(t,u(t,x)) + \lambda_2(t)f(t,x), \tag{3.13}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{3.14}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{3.15}$$

и условиям

$$u(t,a) = \varphi_1(t),\ u_x(t,a) = \varphi_2(t) \tag{3.16}$$

для некоторой фиксированной точки $0 < a < \pi$.

Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(a) = \varphi_1(0), \quad \frac{\partial}{\partial x}u_0(a) = \varphi_2(0). \tag{3.17}$$

Предположим, что функция $M(t,y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$\left|M^{(j)}(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ j = 0,1,\ldots,5,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in E_1. \tag{3.18}$$

Здесь M_0 – постоянная, $p \geq 1$ – целое.

Пусть при $0 \leqslant t \leqslant T$

$$|\Delta(t)| \geq \delta > 0, \quad \delta - const, \tag{3.19}$$

где

$$\Delta(t) = M(t,\varphi_1(t))f_x(t,a) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a).$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения (3.20)) и при $(t,x) \in G^*_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$ удовлетворяет соотношениям :

$$|\varphi_i(t)| + \left|\frac{d}{dt}\varphi_i(t)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f(t,x)\right| \leqslant C,\ i = 0,1,\ j = \overline{0,5}. \tag{3.20}$$

Функции $u_0(x)$ и $f(t,x)$ нечетным образом продолжаются по переменной x на E_1:

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin kx, \;\; f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx. \tag{3.21}$$

Здесь $\alpha_k - const, \;\; \beta_k(t) \in C[0,T]$.

Также предполагаем, что при $(t,x) \in G^*_{[0,T]}$ справедливо следующее условие

$$M(t, v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \sin kx \tag{3.22}$$

для любых $v(t,x)$, таких, что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \sin kx.$$

Вообще говоря, коэффициенты $M_k(t)$ могут быть различны и зависят от выбора функции $v(t,x)$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.6.1. *Пусть выполняются условия* (3.17) – (3.22). *Тогда существует решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (3.13)–(3.16) *в классе*

$$\widehat{Z}(t^*) = \left\{ u(t,x), \, \lambda_1(t), \, \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,3}_{t,x}(\Omega_{[0,t^*]}), \, \lambda_1(t), \, \lambda_2(t) \in C([0,t^*]) \right\},$$

где

$$C^{1,3}_{t,x}(\Omega_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,x) \mid f_t, \, D^{\alpha}_x f \in C(\Omega_{[0,t^*]}), \, |\alpha| \leqslant 3 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$|\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| + \sum_{k=0}^{3} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x) \right| \leqslant C, \;\; (t,x) \in \Omega_{[0,t^*]}. \tag{3.23}$$

Теорема 3.6.2. *Решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (3.13) – (3.19), *для которого справедливо, что функция* $u(t,x)$ *допускает продолжение нечетным образом по пространственной переменной на* $G^*_{[0,t^*]}$, *и удовлетворяющее при* $(t,x) \in G^*_{[0,t^*]}$ *соотношению* (3.23), *единственно в классе* $\widehat{Z}(t^*)$.

Из теорем 3.6.1, 3.6.2 следует

Теорема 3.6.3. *Пусть выполняются условия* (3.17) – (3.22). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (3.13) – (3.16) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношению* (3.23).

Замечание. В случае второй краевой задачи (3.13), (3.14), (3.24), где

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \tag{3.24}$$

при выполнении условий

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx, \;\; f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \cos kx,$$

где $\alpha_k - const,\;\; \beta_k(t) \in C[0,T]$,

$$M(t,v) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \cos kx,$$

для таких функций, что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \cos kx,$$

справедливы аналогичные теоремы.

В четвертой главе для полулинейного параболического уравнения рассмотрен случай неизвестных коэффициентов при нелинейном члене и функции источника. Коэффициенты зависят от временной переменной, а условия переопределения задаются на гладкой кривой, заданной в параметрическом виде.

Когда рассматриваются процессы диффузии или распространения тепла и условия переопределения задаются на фиксированной гиперплоскости, это означает, что датчик, производящий замеры (например, температуры) установлен и закреплен в определенном месте и не может перемещаться со временем. Если же датчик с течением времени может двигаться в пространстве по определенному закону, то мы приходим к описанной ниже задаче.

В области $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_n, z \in E_1\}$ рассмотрена задача Коши

$$u_t(t, x, z) = L_x(u) + u_{zz} + \lambda_1(t)M(t, u(t, x, z)) + \lambda_2(t)f(t, x, z), \tag{4.1}$$

$$u(0, x, z) = u_0(x, z). \tag{4.2}$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_k x_k}, \text{ где } c_k(t) \in C\,[0, T]\,,$$

функции $M(t, y)$, $u_0(x, z)$, $f(t, x, z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t, x, z)$ задачи (4.1)–(4.2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t, a(t), b(t)) = \varphi_1(t), \tag{4.3}$$

$$u_z(t, a(t), b(t)) = \varphi_2(t), \tag{4.4}$$

где $a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t))$, и условиям согласования

$$u_0(a(0), b(0)) = \varphi_1(0), \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_0(a(0), b(0)) = \varphi_2(0). \tag{4.6}$$

Относительно функции $M(t, y)$ также предполагаем, что она имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение (4.7), и удовлетворяет этому соотношению :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t, y) \right| \leqslant M_0(1 + |y|^p),\ k = 0, 1, \ldots, 9,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in E_1. \tag{4.7}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть при всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\Big| M(t,\varphi_1(t)) f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) f(t,a(t),b(t)) \Big| \geq \delta > 0. \quad (4.8)$$

Здесь δ – постоянная.

Обратная задача (4.1)–(4.4) приводится к следующей вспомогательной прямой задаче для нагруженного уравнения :

$$\begin{gathered} u_t = L_x(u) + u_{zz} + \Big(A_1(t) + A_2(t)K_1(t) + \\ + A_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right] + A_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t)) \Big) M(t,u) + \\ + \Big(B_1(t) + B_2(t)K_1(t) + B_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right] + \\ + B_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t)) \Big) f(t,x,z), \end{gathered}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),$$

где

$$A_1(t) = \frac{\left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t)\right] f_z(t,a(t),b(t)) - \varphi_2'(t) f(t,a(t),b(t))}{D(t)},$$

$$A_2(t) = \frac{-f_z(t,a(t),b(t))}{D(t)}, \;\; A_3(t) = \frac{f(t,a(t),b(t))}{D(t)},$$

$$A_4(t) = \frac{b'(t) f(t,a(t),b(t)) - f_z(t,a(t),b(t))}{D(t)},$$

$$B_1(t) = \frac{\varphi_2'(t) M(t,\varphi_1(t)) - \left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t)\right] M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)},$$

$$B_2(t) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)}, \;\; B_3(t) = \frac{-M(t,\varphi_1(t))}{D(t)},$$

$$B_4(t) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) - b'(t)M(t,\varphi_1(t))}{D(t)}$$

– известные, непрерывные, достаточно гладкие функции.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения) и удовлетворяет соотношениям :

$$|a'(t)| + |b'(t)| + |\varphi_1'(t)| + |\varphi_2'(t)| \leqslant C, \tag{4.9}$$

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ |\alpha| \leqslant 4,\ m = 0,1,\ldots,5, \tag{4.10}$$

$$(t,x,z) \in G_{[0,T]}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.3.1. *Пусть выполняются условия* (4.5)–(4.10)*. Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.1)–(4.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 2} \sum_{k=0}^{3} \left| D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} u(t,x,z) \right| \leqslant C,\ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \tag{4.11}$$

$$|\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| \leqslant C,\ t \in G_{[0,t^*]}, \tag{4.12}$$

где

$$Z(t^*) = \left\{ u(t,x,z),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0,t^*]) \right\},$$

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,x,z) \mid f, f_t \in C(G_{[0,t^*]}),\ D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} f \in C(G_{[0,t^*]}), \right.$$
$$\left. m = 0,1,2,3,\ |\alpha| \leqslant 2 \right\}.$$

Теорема 4.4.1. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.1) – (4.8)*, удовлетворяющее соотношениям* (4.11), (4.12)*, единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 4.3.1, 4.4.1 следует

Теорема 4.4.2. *Пусть выполняются условия* (4.5)–(4.10). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.1)–(4.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (4.11), (4.12).

Также в области $\Omega_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x = (x_1,\ldots,x_n), 0 \le x_k \le \pi, k = \overline{1,n}, 0 \le z \le \pi\}$ рассмотрена задача идентификации тройки действительнозначных функций $\big(u(t,x,z), \lambda_1(t), \lambda_2(t)\big)$, удовлетворяющих краевой задаче для многомерного полулинейного уравнения

$$u_t(t,x,z) = \Delta u + u_{zz} + \lambda_1(t)M(t,u(t,x,z)) + \lambda_2(t)f(t,x,z), \tag{4.13}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{4.14}$$

$$u|_{x_k=0} = u|_{x_k=\pi} = 0, \ k = 1,\ldots,n, \tag{4.15}$$

$$u|_{z=0} = u|_{z=\pi} = 0, \tag{4.16}$$

и условиям

$$u(t,a(t),b(t)) = \varphi_1(t), \tag{4.17}$$

$$u_z(t,a(t),b(t)) = \varphi_2(t), \tag{4.18}$$

где $a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t))$. Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(a(0),b(0)) = \varphi_1(0), \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(a(0),b(0)) = \varphi_2(0). \tag{4.20}$$

Предположим, что функция $M(t,y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p), \ k = 0,1,\ldots,9, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ y \in E_1. \tag{4.21}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть при всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\Big|M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))\Big| \geq \delta > 0. \tag{4.22}$$

Здесь δ – фиксированная постоянная.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения (4.23), (4.24), и удовлетворяют этим соотношениям :

$$|a'(t)| + |b'(t)| + |\varphi_1'(t)| + |\varphi_2'(t)| \leqslant C, \tag{4.23}$$

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial z^m}D_x^\alpha u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial z^m}D_x^\alpha f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ |\alpha| \leqslant 4,\ m = 0,1,\ldots,5, \tag{4.24}$$

$$(t,x,z) \in G^*_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n, z \in E_1\}.$$

Функции $f(t,x,z)$ и $u_0(x,z)$ нечетным образом продолжаются по переменным x_k, z на E_{n+1} :

$$u_0(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz,\ \ \alpha_k \text{ – постоянные}, \tag{4.25}$$

$$f(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz,\ \ \beta_k(t) \in C[0,T]. \tag{4.26}$$

Также предполагаем, что справедливо следующее условие при $(t,x,z) \in G^*_{[0,T]}$:

$$M(t,v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz, \tag{4.27}$$

для любых $v(t,x)$, таких что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz.$$

Здесь коэффициенты $M_k(t)$ могут быть различны и, вообще говоря, зависят от выбора $v(t,x)$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.5.1. *Пусть выполняются условия* (4.19)–(4.27). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.13)–(4.18) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (4.11), (4.12), *где*

$$\widehat{Z}(t^*) = \left\{ u(t,x,z),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(\Omega_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0,t^*]) \right\}.$$

Теорема 4.5.2. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.13) – (4.22), *для которого справедливо, что функция* $u(t,x,z)$ *допускает продолжение нечетным образом по пространственным переменным на* $G^*_{[0,t^*]}$, *и удовлетворяющее при* $(t,x,z) \in G^*_{[0,t^*]}$ *соотношениям* (4.11), (4.12), *единственно в классе* $\widehat{Z}(t^*)$.

Из теорем 4.5.1, 4.5.2 следует

Теорема 4.5.3. *Пусть выполняются условия* (4.19)–(4.27). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.13)–(4.18) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (4.11), (4.12).

Замечание. В случае второй краевой задачи (4.13), (4.14), (4.28), (4.29) где

$$u_{x_k}|_{x_k=0} = u_{x_k}|_{x_k=\pi} = 0,\ \ k = 1,\ldots,n, \tag{4.28}$$

$$u_z|_{z=0} = u_z|_{z=\pi} = 0, \tag{4.29}$$

при выполнении условий

$$u_0(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz,\ \ \alpha_k \text{ – постоянные,}$$

$$f(t,x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(t)\cos kx_1\cos kx_2\ldots\cos kx_n\cos kz,\ \ \beta_k(t)\in C[0,T],$$

$$M(t,v(t,x))=\sum_{k=0}^{\infty}M_k(t)\cos kx_1\cos kx_2\ldots\cos kx_n\cos kz,$$

для любых $v(t,x)$, таких что

$$v(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(t)\cos kx_1\cos kx_2\ldots\cos kx_n\cos kz,$$

справедливы аналогичные теоремы.

Автор выражает благодарность научному руководителю Ю.Я. Белову за неоценимую помощь при работе над диссертацией, а также всем участникам научного семинара кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и информатики Красноярского государственного университета за поддержку и активное обсуждение результатов.

Глава 1. Вспомогательные предложения

В данной главе приводятся некоторые обозначения, а также вспомогательные утверждения и теоремы, которые используются при дальнейшем изложении.

1.1 Некоторые обозначения

Обозначим символом E_n n-мерное евклидово пространство действительных чисел. Пусть Ω – ограниченная область в n - мерном пространстве E_n. Точка в E_n будем обозначать символом $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Символ $\partial\Omega$ обозначает границу области Ω. Предполагается, что в каждой точке $x \in \partial\Omega$ (за исключением, быть может, множества меры ноль точек) определен вектор внешней нормали.

Замыкание множества Ω обозначим как $\overline{\Omega}$.

Пусть α — мультииндекс, то есть $\alpha = \big(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\big)$, где α_i — целые неотрицательные числа и $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Под обозначением $D_x^\alpha f(x)$ будем понимать частную производную функции $f(x)$ порядка $|\alpha|$:

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots x_1^{\alpha_n}}.$$

Символом $C^k(\overline{\Omega})$ (либо$C^k(\Omega)$) будем обозначать совокупность всех k-раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $\overline{\Omega}$ (либоΩ). При $k = 0$ вместо $C^0(\Omega)$ будем писать $C(\Omega)$. Если в $C^k(\overline{\Omega})$ ввести норму

$$\|f\| = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \max_{x \in \overline{\Omega}} \big| D_x^\alpha f(x) \big|,$$

то пространство $C^k(\overline{\Omega})$ превращается в банахово пространство [50].

Под обозначением $C_{t,x}^{k,l}(\Omega)$ будем понимать множество функций, непрерывно дифференцируемых в Ω по t до порядка k включительно, по x —

до порядка l включительно. Символом $C^{k,l,m}_{t,x,z}(\Omega)$ будем обозначать множество функций, непрерывно дифференцируемых в Ω по t до порядка k включительно, по x — до порядка l включительно и по z до порядка m включительно.

1.2 Неравенство Гронуолла

Лемма 1.2.1. *Пусть неотрицательная, измеримая и ограниченная на отрезке* $[0, t^*]$ *функция* $y(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$y(t) \leqslant C + \int\limits_0^t \big(A + By(\tau)\big)\, d\tau,$$

где постоянные $A, B, C \geqslant 0$*. Тогда если* $B > 0$*, при* $0 \leqslant t \leqslant t^*$ *имеет место оценка*

$$y(t) \leqslant Ce^{Bt} + \frac{A}{B}\big(e^{Bt} - 1\big).$$

Если $B = 0$*, то*

$$y(t) \leqslant C + At.$$

Доказательство неравенства Гронуолла в основном повторяет доказательство леммы 1 гл. I в [71].

1.3 Теорема Арцела

Пусть M – некоторое бесконечное множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций ($M \in C(\overline{\Omega})$).

Определение 1.1. Множество M нормированного пространства X называется *компактным* в X, если из каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Определение 1.2. Говорят, что функции множества M *равномерно ограничены* в $C(\overline{\Omega})$, если существует постоянная K, такая, что $\|f\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant K$ для всех $f \in M$.

Определение 1.3. Говорят, что функции множества M *равностепенно непрерывны* в $\overline{\Omega}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых $x', x'' \in \overline{\Omega}$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, выполняющееся сразу для всех $f \in M$.

Теорема 1.3.1 (Арцела). *Для того, чтобы множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ было компактно в $C(\overline{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$ и равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство теоремы Арцела можно найти в [38, 40, 49].

1.4 Принцип максимума для параболического уравнения второго порядка

Пусть $T > 0 - const$, $S_T = [0, T] \times \partial\Omega$, $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ и Ω – ограниченная область пространства E_n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим в Q_T линейное уравнение

$$L(u) = f, \tag{1.30}$$

где дифференциальный оператор L имеет вид

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t}$$

и коэффициенты a_{ij}, b_i, c и правая часть f уравнения (1.30)– вещественные конечнозначные функции переменных t, x.

Считаем, что $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, и выполняется соотношение

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j, \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$$

при любых значениях $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in E_n$.

Определение 1.4. Функция u называется классическим решением [30] уравнения (1.30) в $\overline{Q}_T$, если ее производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $i,j = 1,\ldots,n$, непрерывны в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$, сама функция $u(t,x)$ непрерывна в $\overline{Q}_T$ и в $\overline{Q}_T \setminus \Gamma_T$ выполняется тождество $L(u(t,x)) = f(t,x)$.

Теорема 1.4.1. *Пусть функция $u(t,x)$ в $\Pi_{[0,T]}$ непрерывна и ограничена снизу:*

$$-d < u(t,x), \quad d = const > 0,$$

а в $\Pi_{(0,T]}$, имеет все непрерывные производные, входящие в оператор L, и удовлетворяет неравенству $L(u) \leqslant 0$. Пусть коэффициенты a_{ij}, b_i, c удовлетворяют соотношениям

$$|a_{ij}(t,x)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(t,x)| < M(|x|^2+1)^{1/2},$$

$$c(t,x) < M, \quad M = const > 0.$$

Тогда $u(t,x) \geq 0$ всюду в $\Pi_{[0,T]}$, если $u \geq 0$ при $t = 0$.

Рассмотрим для уравнения (1.30) задачу Коши: найти непрерывную в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_n\}$ функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую в $\Pi_{(0,T]}$ уравнению (1.30) и при $t = 0$ совпадающую с заданной на E_n функцией φ:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in E_n. \tag{1.31}$$

Теорема 1.4.2. *Пусть функция $u(t,x)$ – классическое ограниченное решение задачи Коши* (1.30), (1.31), *коэффициенты a_{ij}, b_i оператора L подчинены условиям теоремы* 1.2.1 *и выполняются соотношения*

$$|\varphi(x)| \leqslant q, \quad x \in E_n,$$

$$|f(t,x)| \leqslant N, \quad c(t,x) \leqslant M, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \leqslant e^{Mt}(Nt+q).$$

Доказательство приведенных теорем дано в [30].

1.5 Общая формулировка метода слабой аппроксимации

В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + L(t)u = f(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = u_0, \tag{1.32}$$

где $L(t)$ – нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор с переменной областью определения $D(L(t))$, причем при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ оператор $L(t)$ отображает $D(L(t))$ в $\mathfrak{B}$.

Пусть $L = \sum_{i=1}^m L_i$, $f = \sum_{i=1}^m f_i$ и $\cap_{i=1}^m D(L_i(t)) \subseteq D(L(t))$. Мы считаем, что операторы $L_i(t)$ отображают $D(L_i(t))$ в $\mathfrak{B}$ и функции $f_i(t) \in \mathfrak{B}$, $i = 1,\ldots,m$.

Наряду с задачей (1.32) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ:

$$\frac{du^\tau}{dt} + L_\tau(t)u^\tau = f_\tau(t), \quad t \in [0,T], \quad u^\tau(0) = u_0. \tag{1.33}$$

Здесь

$$L_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\tau,t)L_i(t), \quad f_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i(\tau,t)f_i(t),$$

а функции $\alpha_i(\tau,t)$, $\beta_i(\tau,t)$ слабо аппроксимируют единицу, то есть для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ при $\tau \to 0$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (\alpha_i(\tau,t)-1)\,dt \to 0, \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} (\beta_i(\tau,t)-1)\,dt \to 0.$$

Метод решения задачи (1.32), при котором в качестве приближенных решений u^τ, $\tau > 0$ берутся решения задачи (1.33) и решение u задачи (1.32) находится как предел при $\tau \to 0$ решений u^τ ($u = \lim\limits_{\tau\to 0} u^\tau$), мы будем называть *методом слабой аппроксимации* [17, 86].

Часто коэффициенты $\alpha_i(\tau,t)$, $\beta_i(\tau,t)$ выбирают в виде

$$\alpha_i(\tau,t) = \beta_i(\tau,t) = \begin{cases} m, & (n+\frac{i-1}{m})\tau < t \leqslant (n+\frac{i}{m})\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

В этом случае нахождение решения u^τ задачи (1.33) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_1(t)u^\tau = mf_1(t), \quad t \in (0, \frac{\tau}{m}], \quad u^\tau(0) = u_0, \text{—первый дробный шаг,}$$

$$\frac{du^\tau}{dt} + mL_2(t)u^\tau = mf_2(t), \quad t \in (\frac{\tau}{m}, \frac{2\tau}{m}], \text{—второй дробный шаг.}$$

В качестве начальных данных на этом шаге берется значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t = \frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $(\frac{2\tau}{m}, \frac{3\tau}{m}], \ldots, (\frac{(m-1)\tau}{m}, \tau]$. Тем самым находят решение на полуинтервале $(0,\tau]$ – нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на множестве $[\tau, 2\tau]$– первом целом шаге, затем - на множестве $[2\tau, 3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов (число это равно N) решение u^τ находят на отрезке $[0,T]$. Задачу (1.33) называют *расщеплением задачи* (1.32).

В тех случаях, когда все операторы L_i имеют более простую структуру, чем оператор L, построение и исследование различных свойств решения задачи (1.33) проще, чем аналогичное исследование задачи (1.32). Так в некоторых нелинейных задачах только расщепление позволяет получить априорные оценки, достаточные для доказательства теорем существования.

1.6 Одна теорема метода слабой аппроксимации

В полосе $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\, x \in E_n\}$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t,x,\overline{u}). \tag{1.34}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1(t,x),\ldots,u_l(t,x))$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_l)$ – вектор-функции размерности l ($l \geq 0$). Через $\overline{u} = (v_0,v_1,\ldots,v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом: $v_0 = u = (u_1,\ldots,u_l)$; v_1 – вектор, составленный из всех производных порядка r по x от u. Таким образом,

$$\overline{u} = (u_1,\ldots,u_l,\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_1}{\partial x_2},...,\frac{\partial u_l}{\partial x_n},...,\frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r},...,\frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r})$$

и система уравнений (1.34) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно ($r \geq 0$).

Мы предполагаем, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^m, \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^m \varphi_j^i, \quad j = 1,\ldots,l,$$

где φ^i – вектор-функции размерности l; φ_j, φ_j^i – j-е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^m a_{i,\tau}(t)\varphi_i(t,x,\overline{u}^\tau), \tag{1.35}$$

где функции $a_{i,\tau}$ определены следующим соотношением

$$\alpha_{i,\tau} = \begin{cases} m, & t_0 + (n + \frac{i-1}{m})\tau < t \leqslant t_0 + (n + \frac{i}{m})\tau, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, ..., N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$.

Система (1.35) слабо аппроксимирует систему (1.34) [17, 28].

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau), \tag{1.36}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \overline{u}^\tau)$, зависящие от τ.

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.34), ((1.35), (1.36)). Под классическим решением уравнения (1.35) ((1.36)) мы понимаем функцию u^τ, непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.35) ((1.36)), обладающую кусочно непрерывной производной u_t^τ в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]}$ (u_t^τ может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = (n + i/m)\tau$; $n = 0, 1, ..., N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$; $j = 0, 1, ..., m-1$) и удовлетворяющую уравнению (1.35) ((1.36)) в $\Pi_{[t_0,t_1]}$.

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau)$ на классических решениях $\overline{u}^\tau$ системы уравнений (1.36) непрерывны по переменным $(t, x) \in \Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \tau \leqslant \tau_0)$ – некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$.

Через $u^{\tau_k}(t,x)$ обозначим решение системы (1.36) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u^{τ_k} системы (1.36) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в

$$\Pi^N_{[t_0,t_1]} = \{(t,x)|, t_0 \leqslant t \leqslant t_1, |x| \leqslant N\},$$

последовательность u^{τ_k} сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящим в (1.34), причем

$$\max_{\Pi^N_{[t_0,t_1]}} |\varphi_i(t,x,\overline{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t,x,\overline{u}^{\tau_k})| \to 0, \tag{1.37}$$

$$\tau_k \to 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Теорема 1.6.1. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда вектор-функция* $u(t,x)$ *есть решение системы* (1.34) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

Доказательство приведем из [17]. Ниже для удобства обозначений будем опускать аргумент x и вместо индекса τ_k писать индекс ν, например, будем писать $u^\nu(t)$ вместо $u^{\tau_k}(t,x)$. Введем средние функции $u^\nu_{\text{ср}}(t)$:

$$u^\nu_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{\nu}\int\limits_t^{t+\nu} u^\nu(\theta)\,d\theta. \tag{1.38}$$

При любом t^* из интервала (t_0,t_1) в прямоугольнике $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$ функции $u^\nu_{\text{ср}}(t)$ существуют (для достаточно малых ν) и сходятся при $\nu \to 0$ равномерно по t, x к функции $u(t)$.

Из (1.38) следует равенство

$$\frac{\partial u^\nu_{\text{ср}}(t)}{\partial t} = \frac{u^\nu(t+\tau) - u^\nu(t)}{\nu}.$$

Докажем, что $\frac{\partial u^{\nu}_{\text{ср}}(t)}{\partial t}$ сходится равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t_*]}$ к вектор-функции $\frac{\partial u}{\partial t}$. Осредним (1.36). Получим систему

$$\frac{\partial u^{\nu}_{\text{ср}}(t)}{\partial t} = \varphi(t, x, \bar{(u)}^{\nu}) + F_{\nu},$$

где

$$F_{\nu} = F_{\nu}(t, x, \overline{u}^{\nu}) = \frac{1}{\nu}\int\limits_{t}^{t+\nu}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{i,\nu}(\theta)\varphi_{i,\nu}(\theta, x, \overline{u}^{\nu}(\theta)) - \sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t, x, \overline{u}^{\nu}(t))\right\} d\theta.$$

Так как меры множеств σ_i, на которых $a_{i,\nu}(t)$ не обращаются в нуль на $[t, t+\nu]$, равны, то

$$F_v = \frac{m}{\nu}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\sigma_i}\left\{\varphi_{i,\nu}(\theta, x, \overline{u}^{\nu}(\theta)) - \varphi_i(t, x, \overline{u}^{\nu}(t))\right\} d\theta. \tag{1.39}$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в (1.39):

$$|\varphi_{i,\nu}(\theta, x, \overline{u}^{\nu}(\theta)) - \varphi_i(t, x, \overline{u}^{\nu}(t))| \leqslant |\varphi_{i,\nu}(\theta, x, \overline{u}^{\nu}(\theta)) - \varphi_i(\theta, x, \overline{u}^{\nu}(\theta))| +$$
$$+ |\varphi_i(\theta, x, \overline{u}^{\nu}(\theta)) - \varphi_i(t, x, \overline{u}^{\nu}(t))|.$$

При $\nu \to 0$ первый член в правой части последнего равенства равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ стремится к нулю вследствии соотношения (1.37).

Второй член равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ стремится к нулю вследствии равномерной непрерывности по всем своим аргументам вектор-функции φ_i (см. условие 1) и равностепенной непрерывности $\overline{u}^{\nu}(t)$ по t в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$. Следовательно, при $\nu \to 0$ функция F_{ν} равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$. Так как $\varphi(t, x, \overline{u}^{\nu}(t))$ сходится равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ к $\varphi(t, x, \overline{u}(t))$, то

$$\frac{\partial u^{\nu}_{\text{ср}}(t)}{\partial t} \to \varphi(t, x, \overline{u}(t)) \quad \text{равномерно в } \Pi^N_{[t_0,t^*]}.$$

По теореме о дифференцировании функциональных последовательностей $\frac{\partial u^{\nu}_{\text{ср}}}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$ равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$ к $\varphi(t, x, \overline{u}(t))$. Следовательно $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t, x, \overline{u}(t))$, то есть u – классическое решение системы (1.34) в $\Pi^N_{[t_0,t^*]}$.

Рассматривая средние функции

$$u^{\nu}_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{\nu} \int\limits_{t-\nu}^{t} u^{\nu}(\theta)\, d\theta,$$

докажем, что $u(t)$ есть решение системы (1.34) в $\Pi^N_{[t_*,t_1]}$ при любом $t_* \in (t_0, t_1)$ и следовательно в $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$. Теорема 1.6.1 доказана.

Глава 2. О задаче идентификации коэффициентов при производной по времени и нелинейном члене в полулинейном параболическом уравнении

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_1, z \in E_1\}$ задачу Коши

$$\lambda_1(t,x)u_t(t,x,z) = a_1(t,x)u_{xx} + a_2(t,x)u_{zz} + \\ + \lambda_2(t,x)M(t,u(t,x,z)) + f(t,x,z), \quad (2.1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \quad (2.2)$$

Обозначим

$$L(u) = a_1(t,x)u_{xx} + a_2(t,x)u_{zz}.$$

Функции $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$ такие, что дифференциальный оператор $L(u)$ является оператором эллиптического типа при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$. Функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_2 и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,x,0) = \varphi_1(t,x), \quad (2.3)$$

$$u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x) \quad (2.4)$$

и условиям согласования

$$u_0(x,0) = \varphi_1(0,x), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(x,0)=\varphi_2(0,x). \tag{2.6}$$

Относительно функции $M(t,y)$ также предполагаем, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение и удовлетворяет ему.

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\ldots,11,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y\in E_1. \tag{2.7}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k\geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y)=M(t,y)$.

Пусть выполняется при $(t,x)\in \Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0\leq t\leq T, x\in E_1\}$ соотношение

$$|\Delta(t,x)| = \left|\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)- \right.$$
$$\left. -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))\right| \geq \delta > 0, \tag{2.8}$$

где δ – некоторая фиксированная постоянная.

2.2 Переход от обратной задачи к прямой

Приведем задачу (2.1)–(2.4) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Положим $z=0$ в (2.1), получим

$$\lambda_1(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x) = a_1(t,x)\varphi_{1xx}(t,x)+a_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+$$
$$+\lambda_2(t,x)M(t,\varphi_1)+f(t,x,0). \tag{2.9}$$

Продифференцируем (2.1) по z, положим $z=0$, учитывая (2.3), (2.4), получим

$$\lambda_1(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) = a_1\varphi_{2xx}+a_2u_{zzz}(t,x,0)+$$
$$+\lambda_2(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2+f_z(t,x,0). \tag{2.10}$$

Из (2.9), (2.10) находим

$$\lambda_1(t,x) = \frac{(\psi_1(t,x) + a_2(t,x)u_{zz}(t,x,0))M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)} - $$
$$- \frac{(\psi_2(t,x) + a_2(t,x)u_{zzz}(t,x,0))M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)}, \quad (2.11)$$

$$\lambda_2(t,x) = -\frac{(\psi_2(t,x) + a_2(t,x)u_{zzz}(t,x,0))\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)} + $$
$$+ \frac{(\psi_1(t,x) + a_2(t,x)u_{zz}(t,x,0))\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)}. \quad (2.12)$$

Здесь

$$\psi_1(t,x) = a_1(t,x)\varphi_{1xx}(t,x) + f(t,x,0),$$

$$\psi_2(t,x) = a_1(t,x)\varphi_{2xx}(t,x) + f_z(t,x,0).$$

Знаменатели в (2.11), (2.12) в силу (2.8) в ноль не обращаются при всех $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$. Перепишем выражения (2.11), (2.12) в следующем виде :

$$\lambda_1(t,x) = A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0),$$

$$\lambda_2(t,x) = B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0).$$

Здесь

$$A_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x) - \psi_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$A_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$A_3(t,x) = -\frac{a_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$B_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) - \psi_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)}, \ B_3(t,x) = -\frac{a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)}, \ \Delta(t,x)$$

– известные функции.

Учитывая выражения для коэффициентов $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$, приходим к следующей задаче

$$[A_1(t,x)+A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\,u_t = L(u)+$$
$$+\,[B_1(t,x)+B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\,M(t,u)+$$
$$+\,f(t,x,z), \quad (2.13)$$

$$u(0,x,z)=u_0(x,z). \quad (2.14)$$

Введем функцию срезки $S_\delta(y)$, определенную в E_1, достаточно гладкую, обладающую следующими свойствами

$$S_\delta(y)\geq \frac{\delta}{3}>0,\ \ y\in E_1 \text{ и } S_\delta(y)=\begin{cases} y, & y\geq \frac{\delta}{2},\\ \frac{\delta}{3}, & y\leqslant \frac{\delta}{3}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Возьмем срезку от одного из множителей в правой части уравнения (2.13) следующим образом

$$S_\delta\big(A_1(t,x)+A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\big)u_t = L_x(u)+$$
$$+\,u_{zz}+[B_1(t,x)+B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\,M(t,u)+$$
$$+\,f(t,x,z), \quad (2.16)$$

Докажем существование решение вспомогательной прямой задачи (2.16), (2.14).

2.3 Разрешимость прямой задачи

Для доказательства существования решения задачи (2.16), (2.14) применим метод слабой аппроксимации [17, 83]. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t-\frac{\tau}{3})$ в нелинейных членах.

$$u_t^\tau = 3\frac{a_1(t,x)u_{xx}^\tau(t,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(t,x))}, \quad j\tau < t \leqslant \left(j+\frac{1}{3}\right)\tau, \tag{2.17}$$

$$u_t^\tau = 3\frac{a_2(t,x)u_{zz}^\tau(t,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(t,x))}, \quad \left(j+\frac{1}{3}\right)\tau < t \leqslant \left(j+\frac{2}{3}\right)\tau, \tag{2.18}$$

$$u_t^\tau = 3\frac{R_2^\tau(t,x)M(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,z)) + f(t,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(t,x))},$$
$$\left(j+\frac{2}{3}\right)\tau < t \leqslant (j+1)\,\tau, \tag{2.19}$$

$$u^\tau(t,x,z)|_{t\leqslant 0} = u_0(x,z), \quad x\in E_1,\ z\in E_1. \tag{2.20}$$

Здесь $j = 0,1,\ldots,N-1$; $\tau N = T$; $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t,x,z)$,

$$R_1^\tau(t,x) = A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,0),$$

$$R_2^\tau(t,x) = B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,0).$$

Введем следующие обозначения

$$U^\tau(t) = \sum_{k=0}^{11} U_k^\tau(t),$$

$$U_k^\tau(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t}\sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi)\right|,\ U_k(0) = \sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right|. \tag{2.21}$$

Функции $U^\tau(t)$ и $U_k^\tau(t)$ являются неотрицательными и неубывающими на каждом полуинтервале $(j\tau,(j+1)\tau]$.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\psi_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}a_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^m\partial t}\varphi_i(t,x)\right| \leqslant C, \tag{2.22}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}f(t,x,z)\right| \leqslant C, \tag{2.23}$$

Здесь $m = 0, 1, \ldots, 4$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 11 - 2m$, $(t, x, y) \in G_{[0,T]}$, C – постоянная больше единицы.

Пусть также выполняется следующее условие при $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,0) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,0) \geq \delta. \tag{2.24}$$

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений

$\{u^\tau(t, x, z)\}$ задачи (2.17)–(2.20) в классе непрерывных функций.

Как и ранее, назовем j-м временным шагом полуинтервал $(j\tau, (j+1)\tau]$, где $j = 0, 1, \ldots, N - 1$.

Рассмотрим нулевой шаг ($j = 0$).

На первом дробном шаге для решения u^τ, учитывая свойства срезающей функции, в силу принципа максимума получаем

$$|u^\tau(\xi, x, z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |u_0(x, z)|\,,\ 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{3}. \tag{2.25}$$

Аналогично, дифференцируя уравнения (2.17), (2.20) по z, от одного до одиннадцати раз соответственно, в силу принципа максимума получим оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi, x, z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x, z)\right|,\ \text{где } k = 1, \ldots, 11,\ 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{3}, \tag{2.26}$$

Возьмем от левых частей неравенств (2.25), (2.26) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}}$, а затем $\sup\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t}$, и сложим данные 12 неравенств (2.25), (2.26). Получим

$$U^\tau(t) \leqslant U(0),\ 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}. \tag{2.27}$$

На втором дробном шаге $t \in \left(\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}\right]$ по аналогии, в силу принципа максимума получим

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\frac{\tau}{3}),\ \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}.$$

На третьем дробном шаге, интегрируя уравнение по t в пределах от $\frac{2\tau}{3}$ до t, получим равенство

$$u^\tau(t) = u^\tau(\frac{2\tau}{3}) + \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} 3\frac{R_2^\tau(\eta,x)M(\eta,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},x,z)) + f(\eta,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(\eta,x))}\,d\eta,$$

$$\frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau.$$

Из последнего соотношения следует неравенство

$$|u^\tau(t,x,z)| \leqslant |u^\tau(\frac{2\tau}{3})| + \\ + 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \left\{ \frac{|M(\eta,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{3}))||R_2^\tau(\eta,x)|}{S_\delta(R_1^\tau(\eta,x))} + \frac{|f(\eta,x,z)|}{S_\delta(R_1^\tau(\eta,x))} \right\} d\eta.$$

Поскольку данное неравенство выполняется при всех x, z, заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in E_1$, $z \in E_1$, затем заменим функцию $|u^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |u^\tau|$. Функции $A_i(t,x)$ и $B_i(t,x)$ являются ограниченными в силу (2.22), (2.23). Учитывая, что $|M(t,y)| \leqslant M_0(1+|y|^p)$ (см.(2.7)), получим

$$\sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |u^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |u^\tau(\frac{2\tau}{3})| + \\ + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \Bigg\{ (1 + (\sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |u^\tau|)^p) \Bigg(1 + \sup_{x\in E_1} |u^\tau_{zz}(\eta - \frac{\tau}{3}, x, 0)| + \\ + \sup_{x\in E_1} |u^\tau_{zzz}(\eta - \frac{\tau}{3}, x, 0)|\Bigg) + 1 \Bigg\} d\eta.$$

Здесь и далее через С обозначены (вообще говоря различные) постоянные больше единицы, зависящие от δ, постоянной C из (2.22), (2.23), ограничивающей входные данные, постоянной M_0 из (2.7) и не зависящие от τ. Ниже для удобства мы считаем, что $C \geq 1$.

Отсюда, учитывая монотонность по t функций U_k^τ (см. (2.21)), получим

$$U_0^\tau(t) \leqslant U_0^\tau(\frac{2\tau}{3})+C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\{(1+(U_0^\tau(\eta))^p)(1+U_2^\tau(\eta)+U_3^\tau(\eta))+1\}\,d\eta. \quad (2.28)$$

Дифференцируя на нулевом шаге (2.19) по z от одного до одиннадцати раз соответственно, и проделывая на втором дробном шаге аналогичные выкладки, получим следующие неравенства

$$|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)| \leqslant |\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\frac{2\tau}{3})|+$$
$$+C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\frac{|H_k^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},x,z)|\left(1+|u_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},x,0)|+|u_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},x,0)|\right)}{S_\delta\left(R_2^\tau(\eta,x)\right)}+$$
$$+\frac{|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(\eta,x,z)|}{S_\delta\left(R_2^\tau(\eta,x)\right)}\,d\eta,\ \text{k=1,\ldots,11}. \quad (2.29)$$

Здесь функция $H_k^\tau(t,x,z)$ – это результат дифференцирования k раз функции $M(t,u^\tau(t,x,z))$ по переменной z:

$$H_1^\tau(t,x,z)=M^{(1)}(t,u^\tau)u_z^\tau, \quad (2.30)$$

$$H_2^\tau(t,x,z)=M^{(2)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^2+M^{(1)}(t,u^\tau)u_{zz}^\tau, \quad (2.31)$$

$$H_3^\tau(t,x,z)=M^{(3)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^3+3M^{(2)}(t,u^\tau)u_z^\tau u_{zz}^\tau+M^{(1)}(t,u^\tau)u_{zzz}^\tau, \quad (2.32)$$

и так далее до $H_{11}^\tau(t,x,z)$.

Заменим в неравенствах (2.29) функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x\in E_1$, $z\in E_1$, затем заменим функцию $|u^\tau|$, стоящую в левой части неравенств, на $\sup\limits_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}}|u^\tau|$. Учитывая монотонность функции $U^\tau(t)$ и тот факт, что $U_k^\tau(t)\leqslant U^\tau(t)$ (см.(2.21)), получим

$$U_k^\tau(t)\leqslant U_k^\tau(\frac{2\tau}{3})+C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}\Big\{|H_k^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},x,z)|\Big(1+U_2^\tau(\eta)+$$
$$+U_3^\tau(\eta)\Big)+1\Big\}\,d\eta,\ k=1,\ldots,11. \quad (2.33)$$

Учитывая обозначения (2.21), и условие (2.7), из (2.30)–(2.32) и вида других H_k^τ следует оценка

$$|H_k^\tau(t,x,z)| \leqslant C\big(1+(U^\tau(t))^{p+11}\big), \text{ при } x\in E_1,\ z\in E_1,\ k=\overline{1,11}. \quad (2.34)$$

Из (2.28), (2.33), учитывая (2.34), получим

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\frac{2\tau}{3}) + \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} P_{p+12}(U^\tau(\eta))\,d\eta, \quad (2.35)$$

где $P_{p+12}(\zeta) = C(\zeta^{p+12}+\zeta^{p+11}+\cdots+\zeta+1)$ – полином порядка $p+12$, p - постоянная из (2.7), $C\geq 1$ - константа, не зависящая от τ.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = P_{p+12}(\omega(t)), \quad \omega(0)=U(0). \quad (2.36)$$

По теореме Коши [53] существует решение $\omega\in C^1[0,t_1^*]$ данной задачи на отрезке $[0,t_1^*]$, где t_1^* зависит от C и начальных данных $U(0)$. Очевидно, что $\omega(t)$ - строго возрастающая функция.

Лемма 2.3.1. *Из* (2.35), (2.36) *следует, что если для некоторого* $t_0\in(0,t^*)$ *выполняется неравенство* $U^\tau(t_0)\leqslant\omega(t_0)$ *то выполняется*

$$U^\tau(t)\leqslant\omega(t), \quad t\in[t_0,t^*]. \quad (2.37)$$

Доказательство. Пусть $\omega^\varepsilon(t)$ решение задачи

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = P_{p+12}(\omega(t)), \quad \omega(0)=U^\tau(0)+\varepsilon, \quad t\in[0,t^*].$$

Следовательно,

$$\omega^\varepsilon(t) = U(0)+\varepsilon+\int\limits_0^t P_{p+12}(\omega^\varepsilon(\theta))\,d\theta. \quad (2.38)$$

Докажем неравенство

$$U^{\tau}(t) \leqslant \omega^{\varepsilon}(t), \quad t \in [t_0, t^*]. \tag{2.39}$$

Из (2.35), (2.38) вытекает, что неравенство выполнено при $t = t_0$ ($t_0 = \frac{\tau}{2}$). Допустим, что неравенство (2.39) выполняется не при всех $t \in [t_0, t^*]$. Пусть $h(t) = \omega^{\varepsilon}(t) - U^{\tau}(t)$. Возьмем точку t', t'–точная нижняя грань тех точек $t \in [t_0, t^*]$, для которых $h(t) \leqslant 0$, т.е. $t' = \inf\{t|\, h(t) \leqslant 0,\, t \in [t_0, t^*]\}$. Тогда $h(t') = 0$. Если $h(t') < 0$, то в силу непрерывности $h(t)$, существует точка $t_1 \in [t_0, t']$, что противоречит выбору точки t'. Для всех $t \in [t_0, t')$, $h(t) > 0$ в силу выбора t'.

$$U^{\tau}(t') \leqslant U^{\tau}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t'} P_{p+12}(U^{\tau}(\theta))\, d\theta < U^{\tau}(0) + \varepsilon + \int\limits_{0}^{t'} P_{p+12}(\omega^{\varepsilon}(\theta))\, d\theta =$$

$$= \omega^{\varepsilon}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t'} P_{p+12}(\omega^{\varepsilon}(\theta))\, d\theta = \omega^{\varepsilon}(t'),$$

т.е. $h(t') > 0$, следовательно, $h(t) > 0$, $t \in [t_0, t']$. Получили противоречие, следовательно, $U^{\tau}(t) \leqslant \omega^{\varepsilon}(t)$, $t \in [t_0, t^*]$. Переходя в неравенстве (2.39) к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство (2.37). Тем самым, доказали неравенство (2.37) для непрерывных функций $U^{\tau}(t)$, $\omega(t)$.

Докажем неравенство (2.37) для монотонных функций, т.е., для этого достаточно доказать неравенство (2.39).

Рассмотрим функцию $h(t) = \omega^{\varepsilon}(t) - U^{\tau}(t)$, $h(t)$–измеримая функция. Из (2.35), (2.38) вытекает, что $h(t) > 0$ при $t = t_0$.

В силу измеримости $h(t)$ на $[t_0, t^*]$, она имеет конечное число точек разрыва $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [t_0, t^*]$ [80]. Тогда на интервале $[t_0, t_1)$ функция $h(t)$ непрерывна и по доказанному выше, для любого $t \in [t_0, t_1)$, $h(t) > 0$.

Рассмотрим функцию $h(t)$ в точке разрыва t_1

$$h(t_1) = \omega^\varepsilon(t_1) - U^\tau(t_1) \geq \omega^\varepsilon(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} P_{p+12}(\omega^\varepsilon(\theta))\, d\theta - U^\tau(t_0) -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t_1} P_{p+12}(U^\tau(\theta))\, d\theta > 0.$$

Следовательно, $h(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$.
Рассуждая аналогично, мы получим, что $h(t) > 0$, для любого $t \in [t_1, t_2]$. Через конечное число шагов, получим $h(t) > 0$, для любого $t \in [t_0, t^*]$. Таким образом, доказали неравенство (2.39). Лемма 2.3.1 доказана.

Так как

$$U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) \leqslant U(0) = \omega(0) \leqslant \omega\left(\frac{2\tau}{3}\right),$$

то из (2.35) получаем

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(t), \text{ при } \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau. \tag{2.40}$$

Из (2.27), (2.40) следует

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(\tau), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Проделывая аналогичные рассуждения на первом временном отрезке, получим, что

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(2\tau), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 2\tau,$$

и так далее. Через конечное число шагов получим равномерную по τ оценку

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(t_1^*), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t_1^*,$$

и, следовательно, учитывая обозначения (2.21), равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(t, x, z)\right| \leqslant C, \text{ при } k = 0, 1, \ldots, 11, \ (t, x, z) \in G_{[0, t_1^*]}. \tag{2.41}$$

Продифференцируем задачу (2.17)–(2.20) по переменной x и обозначим $v^\tau(t,x,z) = u^\tau_x(t,x,z)$, $v_0(x,z) = \frac{\partial}{\partial x}u_0(x,z)$. Получим задачу

$$v^\tau_t = 3\frac{a_1(t,x)v^\tau_{xx}(t,x,z)}{S_\delta(R^\tau_1(t,x))} + K^\tau_1(t,x)v^\tau_x(t,x,z), \quad j\tau < t \leqslant \left(j+\frac{1}{3}\right)\tau, \tag{2.42}$$

$$\begin{gathered} v^\tau_t = 3\frac{a_2(t,x)v^\tau_{zz}(t,x,z)}{S_\delta(R^\tau_1(t,x))} + \left[\frac{3\frac{\partial}{\partial x}a_2}{S_\delta(R^\tau_1)} - \frac{3a_2 S'_\delta(R^\tau_1)}{[S_\delta(R^\tau_1)]^2}\Big(D_1(t,x) + \right. \\ \left. +A_2 v^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{3},x,0) + A_3 v^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{3},x,0)\Big)\right] u^\tau_{zz}(t,x,z), \\ \left(j+\frac{1}{3}\right)\tau < t \leqslant \left(j+\frac{2}{3}\right)\tau, \end{gathered} \tag{2.43}$$

$$\begin{gathered} v^\tau_t = \frac{3}{S_\delta(R^\tau_1)}\Big[R^\tau_2 M^{(1)}(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{3}))v^\tau(t-\frac{\tau}{3}) + \\ +M(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{3}))\Big(D_2(t,x) + B_2(t,x)v^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{3},x,0) + \\ +B_3(t,x)v^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{3},x,0)\Big) + f_x(t,x,z)\Big] - \\ -3\frac{R^\tau_2 M(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{3})) + f(t,x,z)}{[S_\delta(R^\tau_1)]^2} S'_\delta(R^\tau_1)\Big(D_1(t,x) + A_2 v^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{3},x,0) + \\ +A_3 v^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{3},x,0)\Big), \quad \left(j+\frac{2}{3}\right)\tau < t \leqslant (j+1)\tau, \end{gathered} \tag{2.44}$$

$$v^\tau|_{t\leqslant 0} = v_0(x,z), \quad x \in E_1, \ z \in E_1. \tag{2.45}$$

Здесь

$$D^\tau_1(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}A_1 + \frac{\partial}{\partial x}A_2 u^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{3},x,0) + \frac{\partial}{\partial x}A_3 u^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{3},x,0),$$

$$D^\tau_2(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}B_1 + \frac{\partial}{\partial x}B_2 u^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{3},x,0) + \frac{\partial}{\partial x}B_3 u^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{3},x,0)$$

– ограниченные равномерно по τ в $\Pi_{[0,t^*_1]}$ функции. А функция

$$\begin{gathered} K^\tau_1(t,x) = \frac{3\frac{\partial}{\partial x}a_1(t,x)}{S_\delta(R^\tau_1)} - \frac{3a_1(t,x)}{[S_\delta(R^\tau_1)]^2} S'_\delta(R^\tau_1)\Big(D_1(t,x) + \\ +A_2(t,x)v^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{3},x,0) + A_3(t,x)v^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{3},x,0)\Big) \end{gathered} \tag{2.46}$$

является ограниченной при каждом фиксированном t, в виду сдвига по времени на $\frac{\tau}{3}$ в неизвестных членах.

Введем следующие обозначения

$$V^{\tau}(t) = \sum_{k=0}^{9} V_k^{\tau}(t),$$

$$V_k^{\tau}(t) = \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant t} \sup_{\substack{x \in E_1, \\ z \in E_1}} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} v^{\tau}(\xi, x, z) \right|, \ V_k(0) = \sup_{\substack{x \in E_1, \\ z \in E_1}} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} v_0(x, z) \right|. \qquad (2.47)$$

Функции $V^{\tau}(t)$ и $V_k^{\tau}(t)$ являются неотрицательными и неубывающими на каждом полуинтервале $(j\tau, (j+1)\tau]$.

Рассмотрим нулевой шаг ($j = 0$).

На первом дробном шаге, учитывая свойства срезающей функции, полученные оценки и монотонное возрастание функций $V_k^{\tau}(t)$, в силу принципа максимума, получим

$$|v^{\tau}(\xi, x, z)| \leqslant \sup_{\substack{x \in E_1, \\ z \in E_1}} |v_0(x, z)|, \ 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{3}.$$

Аналогично, дифференцируя уравнения (2.42), (2.45) по z от одного до девяти раз соответственно, в силу принципа максимума получим оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} v^{\tau}(\xi, x, z) \right| \leqslant \sup_{\substack{x \in E_1, \\ z \in E_1}} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} v_0(x, z) \right|, \text{ где } k = 1, \ldots, 9, \ 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{3}. \quad (2.48)$$

Возьмем от левых частей полученных неравенств сначала $\sup\limits_{\substack{x \in E_1, \\ z \in E_1}}$, а затем $\sup\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant t}$ и сложим их. Получим

$$V^{\tau}(t) \leqslant V(0), \ 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}. \qquad (2.49)$$

На втором дробном шаге, учитывая свойства срезающей функции и полученные оценки, в силу принципа максимума получим

$$V_0^{\tau}(t) \leqslant V_0^{\tau}(\frac{\tau}{3}) + C\left(1 + V_2^{\tau}(t - \frac{\tau}{3}) + V_3^{\tau}(t - \frac{\tau}{3})\right) t, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \quad (2.50)$$

Дифференцируя уравнение (2.43) по z от одного до девяти раз, получим для $k=1,\ldots,9$ в силу принципа максимума

$$V_k^\tau(t) \leqslant V_k^\tau(\frac{\tau}{3}) + C\left(1 + V_2^\tau(t-\frac{\tau}{3}) + V_3^\tau(t-\frac{\tau}{3})\right)t, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \quad (2.51)$$

Сложим неравенства (2.50), (2.51), получим

$$V^\tau(t) \leqslant V^\tau(\frac{\tau}{3}) + C\left(1 + V_2^\tau(t-\frac{\tau}{3}) + V_3^\tau(t-\frac{\tau}{3})\right)t, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}.$$

Учитывая (2.49) и неотрицательность функций $V_k^\tau(t)$, усилим неравенство

$$V^\tau(t) \leqslant V^\tau(\frac{\tau}{3}) + C\left(V^\tau(\frac{\tau}{3}) + 1\right)t + 1 - 1, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3},$$

$$V^\tau(t) \leqslant (V(0)+1)\left(1 + C\left(V(0)+1\right)t\right) - 1, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3},$$

$$V^\tau(t) \leqslant (V(0)+1)e^{C(V(0)+1)t} - 1 \leqslant$$
$$\leqslant (V(0)+1)e^{C(V(0)+1)\tau} - 1, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \quad (2.52)$$

На третьем дробном шаге проинтегрируем уравнение (2.44) по временной переменной по отрезку $[\frac{2\tau}{3}, t]$, затем по аналогии с ранее проделанными оценками возьмем обе части равенства по модулю, заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in E_1$, $z \in E_1$, затем заменим функцию $|v^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |v^\tau|$. Заметим, что из оценок (2.41) и условия (2.7), следуют равномерные по τ оценки

$$|M(t, u^\tau(t,x,z))| \leqslant M_0(1 + |u^\tau(t,x,z)|^p) \leqslant C, \ (t,x,z) \in G_{[0,t_1^*]}.$$

Аналогично

$$|M^{(1)}(t, u^\tau(t))| \leqslant M_0(1 + |u^\tau(t,x,z)|^p) \leqslant C, \ (t,x,z) \in G_{[0,t_1^*]}.$$

Получим при $\frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau$

$$\sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |v^\tau(t)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\frac{2\tau}{3})| + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} \sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\eta-\frac{\tau}{3})|+$$

$$+\sup_{x\in E_1}|v^\tau_{zz}(\eta-\frac{\tau}{3},x,0)| + \sup_{x\in E_1}|v^\tau_{zzz}(\eta-\frac{\tau}{3},x,0)| + 1+$$

$$+C\left(1+\sup_{x\in E_1}|v^\tau_{zz}(\eta-\frac{\tau}{3},x,0)| + \sup_{x\in E_1}|v^\tau_{zzz}(\eta-\frac{\tau}{3},x,0)|\right)d\eta.$$

Отсюда, учитывая монотонность функций $V_k^\tau(t)$ (см.(2.47)), справедливо

$$V_0^\tau(t) \leqslant V_0^\tau(\frac{2\tau}{3}) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(1+V_0^\tau(\eta)+V_2^\tau(\eta)+V_3^\tau(\eta))\,d\eta.$$

Отметим теперь, что справедливо равномерно по τ при $(t,x,z)\in G_{[0,t_1^*]}$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}M(t,u^\tau(t,x,z))\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}M^{(1)}(t,u^\tau(t,x,z))\right| \leqslant C,\ \ k=1,\ldots,9.$$

Действительно, учитывая (2.41) и условие (2.7), получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}M(t,u^\tau(t,x,z))\right| = |M^{(1)}(t,u^\tau(t,x,z))||u^\tau_z(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}M(t,u^\tau(t,x,z))\right| = |M^{(2)}(t,u^\tau(t,x,z))(u^\tau_z(t,x,z))^2+$$

$$+M^{(1)}(t,u^\tau)u^\tau_{zz}(t,x,z)| \leqslant C,$$

и т.д. Дифференцируя на нулевом временном шаге уравнение (2.44) по z от одного до девяти раз, учитывая обозначения (2.47), получим при $\frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau$

$$V_k^\tau(t) \leqslant V_k^\tau(\frac{2\tau}{3}) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(1+\sum_{i=0}^{k}V_i^\tau(\eta))\,d\eta,\ \ k=1,\ldots,9.$$

Сложим данные неравенства, получим

$$V^\tau(t) \leqslant V^\tau(\frac{2\tau}{3}) + C\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t}(1+V^\tau(\eta))\,d\eta, \quad \frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau,$$

откуда по лемме Гронуолла следует оценка

$$V^{\tau}(t) \leqslant (V^{\tau}(\frac{2\tau}{3}) + 1)e^{Ct} - 1 \leqslant (V^{\tau}(\frac{2\tau}{3}) + 1)e^{C\tau} - 1, \quad \frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau. \quad (2.53)$$

Учитывая (2.49), (2.52), (2.53), получим, что на нулевом целом шаге справедлива оценка

$$V^{\tau}(t) \leqslant (V(0) + 1)e^{C(V(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant \tau. \quad (2.54)$$

Для того чтобы получить оценку функции $V^{\tau}(t)$ на первом шаге нужно в неравенстве (2.54) взять вместо величины $V(0)$ величину $(V(0) + 1)e^{C(V(0)+1)\tau} - 1:$

$$V^{\tau}(t) \leqslant \left[(V(0) + 1)e^{C(V(0) + 1)\tau}\right] e^{C\left[(V(0)+1)e^{C(V(0)+1)\tau}\right]\tau} - 1,$$

$$0 < t \leqslant 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C(V(0)+1)\tau} \leqslant 2,$$

получим

$$V^{\tau}(t) \leqslant (V(0) + 1)e^{3C(V(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 2\tau.$$

На втором дробном шаге ($j = 2$) при условии $e^{3C(V(0)+1)\tau} \leqslant 2$ имеет место оценка

$$V^{\tau}(t) \leqslant (V(0) + 1)e^{5C(V(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 3\tau,$$

и так далее.

На j-м шаге ($j < N$)

$$V^{\tau}(t) \leqslant (V(0) + 1)e^{C(V(0)+1)(2j+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant (j + 1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_2^*, $0 < t_2^* \leqslant t_1^*$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{2C(V(0)+1)t_2^*} \leqslant 2.$$

Заметим, что t_2^* не зависит от τ, поскольку константы C и $V(0)$ (см.(2.47)) не зависят от τ.

Таким образом, справедлива оценка

$$V^\tau(t) \leqslant (V(0)+1)e^{C(V(0)+1)2t_2^*} - 1 \leqslant C, \quad 0 < t \leqslant t_2^*.$$

Получили равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \text{ при } k = 0, 1, \ldots, 9, \ (t,x,z) \in G_{[0,t_2^*]}.$$

Продифференцируем задачу (2.42)–(2.45) по переменной x и обозначим $w^\tau(t,x,z) = v_x^\tau(t,x,z) = u_{xx}^\tau(t,x,z)$, $w_0(x,z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0(x,z)$. Получим задачу

$$\begin{aligned} w_t^\tau = {} & 3\frac{a_1(t,x)w_{xx}^\tau(t,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(t,x))} + 2K_1^\tau(t,x)w_x^\tau(t,x,z) + \\ & + \left[J_1^\tau + J_2^\tau\Big(E_1 + A_2 w_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,0) + A_3 w_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,0)\Big)\right] \times \\ & \times w^\tau(t,x,z), \quad j\tau < t \leqslant \left(j+\frac{1}{3}\right)\tau, \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} w_t^\tau = {} & 3\frac{a_2(t,x)w_{zz}^\tau(t,x,z)}{S_\delta(R_1^\tau(t,x))} + 2K_2^\tau(t,x)v_{zz}^\tau(t,x,z) + \\ & + \left[Q_1^\tau + Q_2^\tau\Big(E_1 + A_2 w_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,0) + A_3 w_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x,0)\Big)\right] \times \\ & \times u_{zz}^\tau(t,x,z), \quad \left(j+\frac{1}{3}\right)\tau < t \leqslant \left(j+\frac{2}{3}\right)\tau, \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$w_t^\tau = \frac{3}{S_\delta(R_1^\tau)}\Big[R_2^\tau M^{(1)}(t, u^\tau(t-\frac{\tau}{3}))w^\tau(t-\frac{\tau}{3})+$$
$$+ M(t, u^\tau(t-\frac{\tau}{3}))\left(E_2 + B_2 w_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0) + B_3 w_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0)\right)+$$
$$+ f_{xx}(t,x,z)\Big] + 3\frac{R_2^\tau M(t, u^\tau(t-\frac{\tau}{3})) + f}{\left[S_\delta(R_1^\tau)\right]^2}\Big(E_1(t,x) + A_2 w_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0)+$$
$$+A_3 w_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0)\Big) + Z_1^\tau(t,x,z), \quad \left(j+\frac{2}{3}\right)\tau < t \leqslant (j+1)\,\tau, \quad (2.57)$$
$$w^\tau(t,x,z)|_{t\leqslant 0} = w_0(x,z), \quad x \in E_1,\ z \in E_1. \quad (2.58)$$

Здесь функции $K_1^\tau(t,x)$ (см.(2.46)), $J_1^\tau(t,x)$, $J_2^\tau(t,x)$, $Q_1^\tau(t,x)$, $Q_2^\tau(t,x)$,

$$K_2^\tau(t,x) = \frac{3\frac{\partial}{\partial x}a_2(t,x)}{S_\delta(R_1^\tau)} - \frac{3a_2(t,x)}{\left[S_\delta(R_1^\tau)\right]^2}S'_\delta(R_1^\tau)\Big(D_1 + A_2 v_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0)+$$
$$+A_3 v_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0)\Big),$$

$$E_1^\tau(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}D_1 + \frac{\partial}{\partial x}A_2 v_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0) + \frac{\partial}{\partial x}A_3 v_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0),$$
$$E_2^\tau(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}D_2 + \frac{\partial}{\partial x}B_2 v_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0) + \frac{\partial}{\partial x}B_3 v_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x, 0)$$

– ограниченные равномерно по τ в $\Pi_{[0,t_2^*]}$ функции. Функции $J_1^\tau(t,x)$, $J_2^\tau(t,x)$ здесь не приводятся в виду их громоздкости, но могут быть легко получены путем дифференцирования функции $K_1^\tau(t,x)$ по переменной x. Аналогично, функции $Q_1^\tau(t,x)$, $Q_2^\tau(t,x)$ могут быть получены путем дифференцирования функции $K_2^\tau(t,x)$ по переменной x.

А функция $Z_1^\tau(t,x,z)$ зависит от функций u^τ и u_x^τ, а также от следов $u_{zz}^\tau|_{z=0}$, $u_{zzz}^\tau|_{z=0}$, $u_{xzz}^\tau|_{z=0}$, $u_{xzzz}^\tau|_{z=0}$. Данная функция является ограниченной равномерно по τ одновременно с производными по z до седьмого порядка.

Введем следующие обозначения

$$W^\tau(t) = \sum_{k=0}^{7} V_k^\tau(t),$$

$$W_k^\tau(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t}\sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}v^\tau(\xi,x,z)\right|,\ W_k(0) = \sup_{\substack{x\in E_1,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}v_0(x,z)\right|. \quad (2.59)$$

Функции $W^\tau(t)$ и $W_k^\tau(t)$ являются неотрицательными, неубывающими на каждом полуинтервале $(j\tau,(j+1)\tau]$.

Рассмотрим нулевой шаг ($j=0$). На первом дробном шаге в силу принципа максимума получим

$$W_0^\tau(t) \leqslant W_0(0)e^{C\left(1+W_2^\tau(t-\frac{\tau}{3})+W_3^\tau(t-\frac{\tau}{3})\right)t},\ 0<t\leqslant\frac{\tau}{3}.$$

Дифференцируя (2.55), (2.58) по z от одного до семи раз, в силу принципа максимума получим

$$W_k^\tau(t) \leqslant W_k(0)e^{C\left(1+W_2^\tau(t-\frac{\tau}{3})+W_3^\tau(t-\frac{\tau}{3})\right)t},\ 0<t\leqslant\frac{\tau}{3},\ k=1,\ldots,7.$$

Сложим полученные неравенства:

$$W^\tau(t) \leqslant W(0)e^{C\left(1+W_2^\tau(t-\frac{\tau}{3})+W_3^\tau(t-\frac{\tau}{3})\right)t},\ 0<t\leqslant\frac{\tau}{3}. \tag{2.60}$$

Учитывая неотрицательность и неубывание функций $W_k^\tau(t)$, усилим неравенство (2.60):

$$W^\tau(t) \leqslant W(0)e^{C(1+W(0))\tau}+1-1,\ 0<t\leqslant\frac{\tau}{3},$$

$$W^\tau(t) \leqslant (W(0)+1)e^{C(1+W(0))\tau}-1,\ 0<t\leqslant\frac{\tau}{3}. \tag{2.61}$$

На втором дробном шаге в силу принципа максимума получим

$$W_0^\tau(t) \leqslant W_0^\tau(\frac{\tau}{3})+C\left(1+W_2^\tau(t-\frac{\tau}{3})+W_3^\tau(t-\frac{\tau}{3})\right)t,\ \frac{\tau}{3}<t\leqslant\frac{2\tau}{3}.$$

Дифференцируя (2.56) по z от одного до семи раз, в силу принципа максимума для $k=1,\ldots,7$ получим

$$W_k^\tau(t) \leqslant W_k^\tau(\frac{\tau}{3})+C\left(1+W_2^\tau(t-\frac{\tau}{3})+W_3^\tau(t-\frac{\tau}{3})\right)t,\ \frac{\tau}{3}<t\leqslant\frac{2\tau}{3}.$$

Сложим полученные неравенства:

$$W^\tau(t) \leqslant W^\tau(\frac{\tau}{3})+C\left(1+W_2^\tau(t-\frac{\tau}{3})+W_3^\tau(t-\frac{\tau}{3})\right)t,\ \frac{\tau}{3}<t\leqslant\frac{2\tau}{3}.$$

Усилим данное неравенство

$$W^\tau(t) \leqslant W^\tau(\frac{\tau}{3}) + 1 + C\left(1 + W^\tau(\frac{\tau}{3})\right)t - 1,\ \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3},$$

$$W^\tau(t) \leqslant (W^\tau(\frac{\tau}{3}) + 1)(1 + C\left(1 + W^\tau(\frac{\tau}{3})\right)t) - 1,\ \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3},$$

$$W^\tau(t) \leqslant (W^\tau(\frac{\tau}{3}) + 1)e^{C\left(1+W^\tau(\frac{\tau}{3})\right)\tau} - 1,\ \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}.$$

Учитывая (2.61), получим при $\frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}$

$$W^\tau(t) \leqslant \left[(W(0)+1)e^{C\,(1+W(0))\,\tau}\right]e^{C\,\left((W(0)+1)e^{C(W(0)+1)\tau}\right)\,\tau} - 1.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C(W(0)+1)\tau} \leqslant 2,$$

получим

$$W^\tau(t) \leqslant (W(0)+1)\,e^{C(W(0)+1)\tau} - 1,\ \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{2.62}$$

На третьем дробном шаге, действуя по аналогии с рассуждениями, проводимыми при оценке u_x^τ, в силу леммы Гронуолла получим

$$W^\tau(t) \leqslant (W^\tau(\frac{2\tau}{3})+1)e^{Ct} - 1 \leqslant (W^\tau(\frac{2\tau}{3})+1)e^{C\tau} - 1, \quad \frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau. \tag{2.63}$$

Учитывая (2.61), (2.62), (2.63) получим на нулевом целом шаге

$$W^\tau(t) \leqslant (W(0)+1)\,e^{C(W(0)+1)\tau} - 1,\ 0 < t \leqslant \tau.$$

Для того, чтобы получить оценку функции $W^\tau(t)$ на первом шаге нужно в данном неравенстве взять вместо величины $W(0)$ величину $(W(0)+1)e^{C(W(0)+1)\tau} - 1$:

$$W^\tau(t) \leqslant \left[(W(0)+1)e^{C(W(0)+1)\tau}\right]e^{C\,\left[(W(0)+1)e^{C(W(0)+1)\tau}\right]\,\tau} - 1,$$

$$0 < t \leqslant 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C(W(0)+1)\tau} \leqslant 2,$$

получим

$$W^\tau(t) \leqslant (W(0)+1)e^{3C(W(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 2\tau.$$

На втором дробном шаге ($j = 2$) при условии $e^{3C(W(0)+1)\tau} \leqslant 2$ имеет место оценка

$$W^\tau(t) \leqslant (W(0)+1)e^{5C(W(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 3\tau,$$

и так далее.

На j-м шаге ($j < N$)

$$W^\tau(t) \leqslant (W(0)+1)e^{C(W(0)+1)(2j+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant (j+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t_3^*, $0 < t_3^* \leqslant t_2^*$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{2C(W(0)+1)t_3^*} \leqslant 2.$$

Заметим, что t_3^* не зависит от τ, поскольку константы C и $W(0)$ (см.(2.59)) не зависят от τ.

Таким образом, справедлива оценка

$$W^\tau(t) \leqslant (W(0)+1)e^{C(W(0)+1)2t_3^*} - 1 \leqslant C, \quad 0 < t \leqslant t_3^*.$$

Получили равномерно по τ

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(t,x,z) \right| \leqslant C, \text{ при } k = 0, 1, \ldots, 7, \ (t,x,z) \in G_{[0,t_3^*]}.$$

После соответствующего дифференцирования по x задачи (2.55)–(2.58) получаются уравнения, которые можно рассматривать как линейные с коэффициентами, равномерно ограниченными по τ. Рассуждая по аналогии, получим оценки

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ \text{при } k=0,1,\dots,5,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_4^*]},$$

$$\left|\frac{\partial^4}{\partial x^4}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ \text{при } k=0,1,\dots,3,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_4^*]},$$

где t_4^* – некоторая постоянная, зависящая от δ, M_0 из (2.7) и константы C, ограничивающей начальные данные, такая, что $0 < t_4^* \leqslant t_3^*$.

Таким образом, при $(t,x,z) \in G_{[0,t_4^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ m=0,1,\dots,4,\ k=0,1,\dots,11-2m. \quad (2.64)$$

Используя оценку (2.64) и уравнения (2.17)–(2.20), получим равномерно по τ

$$|u_t^\tau(t,x,z)| \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_4^*]}.$$

Продифференцируем уравнения (2.17)–(2.19) один раз по z. В силу оценки (2.64) правая часть получившихся уравнений будет ограничена равномерно по τ, а значит и левая часть будет также ограничена равномерно по τ

$$|u_{tz}^\tau(t,x,z)| \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_4^*]}.$$

По аналогии получим равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_t^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k=1,\dots,5,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_4^*]},$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_{tx}^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k=0,\dots,3,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_4^*]},$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_{txx}^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k=0,\dots,3,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_4^*]},$$

Выполнены следующие оценки равномерно по τ при $(t,x,z) \in G_{[0,t_4^*]}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| + \\ + \left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k = 0,\dots,5, \quad (2.65)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| + \\ + \left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad (2.66)$$

$$m = 0,1,2,\ k = 0,1,2,3.$$

В силу теоремы Арцела [49] о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (2.17)–(2.20) сходится вместе с производными по x до второго и по z до третьего порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t_4^*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t_4^*]})$. Доказано на основании теоремы 1.6.1, что $u(t,x,z)$ есть решение задачи (2.16), (2.14), причем $u(t,x,z) \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t_4^*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t_4^*]})$, где

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t_4^*]}) = \Big\{ f(t,x,z) \mid f, f_t \in C(G_{[0,t_4^*]}), \\ \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0,t_4^*]}),\ m \leqslant 2,\ k = 0,1,2,3 \Big\}, \quad (2.67)$$

$$C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t_4^*]}) = \Big\{ f(t,x,z) \mid \frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0,t_4^*]}),\ k = 0,1,\dots,5 \Big\}, \quad (2.68)$$

При этом при $(t,x,z) \in G_{[0,t_4^*]}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ k = 0,\dots,5, \quad (2.69)$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ m = 0,1,2,\ k = 0,1,2,3. \quad (2.70)$$

Для того чтобы снять срезку в уравнении (2.16), докажем, что при $(t,x) \in \Pi_{[0,t_4^*]}$ выполняется

$$\Delta = A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Продифференцируем уравнение (2.16) дважды по z и проинтегрируем по t в пределах от 0 до t, получим

$$u_{zz}(t,x,z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,z) + \int\limits_0^t \Psi_1(\eta,x,z)\,d\eta, \tag{2.71}$$

где

$$\Psi_1(t,x,z) = \frac{1}{S_\delta(\Delta)}\Big\{L(u_{zz}(t,x,z)) +$$
$$+ \Big[B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\Big]\times$$
$$\times\Big(M^{(2)}(t,u)u_z^2(t,x,z) + M^{(1)}(t,u)u_{zz}(t,x,z)\Big) + f_{zz}(t,x,z)\Big\}.$$

Продифференцируем уравнение (2.16) трижды по z и проинтегрируем по t в пределах от 0 до t, получим

$$u_{zzz}(t,x,z) = \frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,z) + \int\limits_0^t \Psi_2(\eta,x,z)\,d\eta, \text{ где} \tag{2.72}$$

$$\Psi_2(t,x,z) = \frac{1}{S_\delta(\Delta)}\Big\{L(u_{zzz}(t,x,z)) +$$
$$+ \Big[B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\Big]\times$$
$$\times\Big(M^{(3)}(t,u)u_z^3(t,x,z) + 3M^{(2)}(t,u)u_z u_{zz} + M^{(1)}(t,u)u_{zzz}(t,x,z)\Big) +$$
$$+ f_{zzz}(t,x,z)\Big\}.$$

Домножим выражение (2.71) на $A_2(t,x)$, а выражение (2.72) на $A_3(t,x)$, сложим полученные равенства и прибавим к левой и правой части $A_1(t,x)$.

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,z) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,z) = A_1(t,x) +$$
$$+ A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,z) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,z) + A_2(t,x)\int\limits_0^t \Psi_1(\eta,x,z)\,d\eta +$$
$$+ A_3(t,x)\int\limits_0^t \Psi_2(\eta,x,z)\,d\eta,$$

Положим в данном равенстве $z = 0$

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0) = A_1(t,x) +$$
$$+ A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,0) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,0) + A_2(t,x)\int\limits_0^t \Psi_1(\eta,x,0)\,d\eta +$$
$$+ A_3(t,x)\int\limits_0^t \Psi_2(\eta,x,0)\,d\eta, \quad (2.73)$$

Поскольку выполняется условие (см.(2.24))

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,0) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,0) \geq \delta,$$

то из (2.73), учитывая ограниченность входных данных и полученные оценки, получим при $t \in \left[0, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right]$

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0) \geq$$
$$\geq \delta - A(\delta)t \geq \frac{\delta}{2}. \quad (2.74)$$

Здесь $A(\delta)$ - некоторая положительная константа, зависящая от δ, M_0 из (2.7) и константы C из (2.22), (2.23).

В силу определения срезающей функции $S_\delta(y)$ (см.(2.15)) получаем

$$S_\delta(\Delta(t,x)) = \Delta(t,x), \text{ при } t \in [0,t^*], \text{ где } t^* = \min\left(t_4^*, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right).$$

Таким образом, в уравнении (2.16) срезка снимается. Функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет уравнению (2.13), заметим, что в силу (2.74)

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Таким образом, мы доказали существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (2.13), (2.14) в классе $C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$.

2.4 Существование классического решения обратной задачи

Докажем, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$, где

$$\lambda_1(t,x) = \frac{(\psi_1(t,x) + a_2(t,x)u_{zz}|_{z=0})M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} - \\ - \frac{(\psi_2(t,x) + a_2(t,x)u_{zzz}|_{z=0})M(t,\varphi_1)}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)},$$

$$\lambda_2(t,x) = -\frac{(\psi_2 + a_2(t,x)u_{zzz}|_{z=0})\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - (\psi_1 + a_2(t,x)u_{zz}|_{z=0})\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)}$$

является решением обратной задачи (2.1)–(2.4). Поскольку $u(t,x,z)$ – это решение прямой задачи (2.13), (2.14), то подставляя $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$ и $\lambda_2(t,x)$ в (2.1), мы получим верное тождество.

Используя (2.7), (2.8), (2.22), (2.23), (2.65), (2.66) из (2.11), (2.12), (2.13) получим, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ принадлежит классу

$$Z(t^*) = \Big\{u(t,x,z),\ \lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}), \\ \lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})\Big\},$$

и удовлетворяет при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ неравенствам

$$\sum_{k=0}^{5}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ \ \sum_{m=0}^{2}\sum_{k=0}^{3}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C, \tag{2.75}$$

$$\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_1(t,x)\right| + \sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_2(t,x)\right| \leqslant C,\ \ (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}. \tag{2.76}$$

Классы $C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$, $C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$ определены в (2.67), (2.68), а

$$C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}) = \Big\{g(t,x) \mid \frac{\partial^m}{\partial x^m}g(t,x) \in C(\Pi_{[0,t^*]}),\ m = 0,1,2\Big\}.$$

Докажем выполнение условий переопределения (2.3), (2.4).

Положим $z = 0$ в уравнении

$$\frac{(\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - (\psi_2(t,x) + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0}) M(t,\varphi_1)}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} \times$$

$$\times\, u_t(t,x,z) = a_1(t,x) u_{xx}(t,x,z) + a_2(t,x) u_{zz} -$$

$$- \frac{(\psi_2 + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - (\psi_1 + a_2(t,x) u_{zz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} M(t,u) +$$

$$+ f(t,x,z), \quad (2.77)$$

получим соотношение

$$\frac{(\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - (\psi_2 + a_2 u_{zzz}|_{z=0}) M(t,\varphi_1)}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} \times$$

$$\times\, u_t(t,x,0) = a_1(t,x) u_{xx}|_{z=0} + a_2(t,x) u_{zz}|_{z=0} -$$

$$- \frac{(\psi_2 + a_2 u_{zzz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - (\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} M(t,u(t,x,0)) +$$

$$+ f(t,x,0),$$

Преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{(\psi_1(t,x) + a_2(t,x) u_{zz}|_{z=0}) \left[u_t|_{z=0} M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,u|_{z=0})\right]}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} =$$

$$= a_1(t,x) u_{xx}|_{z=0} + a_2(t,x) u_{zz}|_{z=0} +$$

$$+ \frac{(\psi_2 + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0}) \left[M(t,\varphi_1) u_t|_{z=0} - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M(t,u|_{z=0})\right]}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} + f(t,x,0),$$

Обозначим $\chi(t,x) = u(t,x,0) - \varphi_1(t,x)$. Получим

$$\frac{(\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) \left[\chi_t M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 \left(M(t,u|_{z=0}) - M(t,\varphi_1)\right)\right]}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} =$$

$$= a_1(t,x)\chi_{xx} +$$

$$+ \frac{(\psi_2 + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0}) \left[M(t,\varphi_1)\chi_t - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 \left(M(t,u|_{z=0}) - M(t,\varphi_1)\right)\right]}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)},$$

$$\frac{(\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - (\psi_2(t,x) + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0}) M(t,\varphi_1)}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} \times$$

$$\times\, \chi_t = a_1(t,x)\chi_{xx} -$$

$$- \frac{(\psi_2 + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - (\psi_1 + a_2(t,x) u_{zz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} \times$$

$$\times \left[M(t, u|_{z=0}) - M(t,\varphi_1) \right],$$

Заметим, что для коэффициента $\Delta(t,x)$, стоящего в левой части равенства при χ_t, выполняется условие $\Delta(t,x) \geq \frac{\delta}{2} > 0$, $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$ (см.(2.74)).

Отсюда, используя теорему Лагранжа, получим

$$\chi_t(t,x) = \frac{a_1(t,x)}{\Delta(t,x)}\chi_{xx}(t,x) + \Omega_1(t,x)\chi(t,x),$$

где

$$\Omega_1(t,x) = -\frac{1}{\Delta(t,x)} \frac{(\psi_2 + a_2 u_{zzz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - (\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} \times$$

$$\times\, M^{(1)}\Big(t, u|_{z=0} - \theta[\varphi_1 - u|_{z=0}]\Big)$$

– ограниченная при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ в силу (2.7), (2.8), (2.22), (2.23), (2.69), (2.70) функция. θ - постоянная, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. В силу (2.5) $\chi(0,x) = 0$.

Используя оценку принципа максимума, получим

$$|u(t,x,0) - \varphi_1(t,x)| = |\chi(t,x)| \leqslant 0, \ \ (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}.$$

Т.е. $u(t,x,0) = \varphi_1(t,x)$, при $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$, и мы доказали выполнение условия переопределения (2.3).

Продифференцируем уравнение (2.77) по z и положим в результате дифференцирования $z = 0$.

$$\frac{(\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - (\psi_2 + a_2 u_{zzz}|_{z=0}) M(t,\varphi_1)}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} u_{zt}(t,x,0) =$$

$$= a_1(t,x) u_{zxx}|_{z=0} + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0} -$$

$$- \frac{(\psi_2 + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - (\psi_1 + a_2(t,x) u_{zz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} \times$$

$$\times M^{(1)}(t, u|_{z=0}) u_z(t,x,0) + f_z(t,x,0),$$

Преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{(\psi_2 + a_2 u_{zzz}|_{z=0}) \left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t, u|_{z=0}) u_z|_{z=0} - M(t,\varphi_1) u_{zt}|_{z=0}\right]}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} =$$

$$= a_1(t,x) u_{zxx}|_{z=0} + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0} + (\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) \times$$

$$\times \frac{\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M^{(1)}(t, u|_{z=0}) u_z(t,x,0) - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 u_{zt}(t,x,0)\right]}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} + f_z(t,x,0).$$

Заметим, что из того, что $u(t,x,0) \equiv \varphi_1(t,x)$, следует

$$M^{(1)}(t, \varphi_1(t,x)) \equiv M^{(1)}(t, u(t,x,0)).$$

Обозначим $\gamma(t,x) = u_z(t,x,0) - \varphi_2(t,x)$.

$$\frac{(\psi_2 + a_2 u_{zzz}|_{z=0}) \left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\gamma - M(t,\varphi_1)\gamma_t\right]}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} = a_1(t,x)\gamma_{xx} +$$

$$+ \frac{(\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) M^{(1)}(t,\varphi_1) \left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 \gamma - \varphi_2 \gamma_t\right]}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)}.$$

$$\frac{(\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0}) M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - (\psi_2 + a_2 u_{zzz}|_{z=0}) M(t,\varphi_1)}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} \gamma_t = a_1 \gamma_{xx} -$$

$$- \frac{(\psi_2 + a_2(t,x) u_{zzz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - (\psi_1 + a_2(t,x) u_{zz}|_{z=0}) \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} M^{(1)}(t,\varphi_1)\gamma,$$

Заметим, что для коэффициента $\Delta(t,x)$, стоящего в левой части равенства при χ_t, выполняется условие $\Delta(t,x) \geq \frac{\delta}{2} > 0$, $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$ (см.(2.74)).

Следовательно справедливо

$$\gamma_t(t,x) = \frac{a_1(t,x)}{\Delta(t,x)}\gamma_{xx}(t,x) + \Omega_2(t,x)\gamma(t,x),$$

где

$$\Omega_2(t,x,z) = -\frac{(\psi_2 + a_2 u_{zzz}|_{z=0})\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - (\psi_1 + a_2 u_{zz}|_{z=0})\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)} M^{(1)}(t,\varphi_1)$$

– ограниченная при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ в силу (2.8), (2.22), (2.23), (2.69), (2.70) функция.

В силу (2.6) $\gamma(0,x) = 0$.

Используя принцип максимума, получим

$$|u_z(t,x,0) - \varphi_2(t,x)| = |\gamma(t,x)| \leqslant 0, \ (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}.$$

Т.е. $u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x)$, при $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$, и мы доказали выполнение условия переопределения (2.4).

Доказано существование решения $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющего соотношениям (2.1)–(2.4). Справедлива

Теорема 2.4.1. *Пусть выполняются условия* (2.5)–(2.8), (2.22)–(2.24). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (2.1)–(2.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (2.75), (2.76).

2.5 Единственность классического решения обратной задачи

Докажем единственность решения задачи (2.1)–(2.4), при условии выполнения (2.5)–(2.8), (2.22), (2.23), (2.75), (2.76).

Пусть $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1^1(t,x)$, $\lambda_2^1(t,x)$ и $u_2(t,x,z)$, $\lambda_1^2(t,x)$, $\lambda_2^2(t,x)$ – два классических решения задачи (2.1)–(2.4), причем тройка функций $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1^1(t,x)$ и $\lambda_1^2(t,x)$ – решение определяемое соотношениями (2.11), (2.12), а тройка $u_2(t,x,z)$, $\lambda_1^2(t,x)$, $\lambda_2^2(t,x)$ – некоторое другое решение задачи (2.1)–(2.4), удовлетворяющее условиям (2.75), (2.76). Тогда справедливы соотношения

$$\lambda_1^1(t,x)u_{1t}(t,x,z) = L(u_1(t,x,z)) + \lambda_2^1(t,x)M(t,u_1(t,x,z)) + f(t,x,z), \quad (2.78)$$

$$\lambda_1^2(t,x)u_{2t}(t,x,z) = L(u_2(t,x,z)) + \lambda_2^2(t,x)M(t,u_2(t,x,z)) + f(t,x,z), \quad (2.79)$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z),\ u_1(t,x,0) = \varphi_1(t,x),\ u_{1z}(t,x,0) = \varphi_2(t,x), \quad (2.80)$$

$$u_2(0,x,z) = u_0(x,z),\ u_2(t,x,0) = \varphi_1(t,x),\ u_{2z}(t,x,0) = \varphi_2(t,x), \quad (2.81)$$

Заметим, что для коэффициента $\lambda_1^1(t,x)$, выполняется условие $\lambda_1^1(t,x) \geq \frac{\delta}{2} > 0$, $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$ (см.(2.74)). Тогда разность $u(t,x,z) = u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) = \frac{a_1(t,x)}{\lambda_1^1(t,x)}u_{xx}(t,x,z) + \frac{a_2(t,x)}{\lambda_1^1(t,x)}u_{zz}(t,x,z) + \\ + \frac{\lambda_2^1(t,x)}{\lambda_1^1(t,x)}\Big(M(t,u_1) - M(t,u_2)\Big) + F_1(t,x,z)u_{zz}(t,x,0) + \\ + F_2(t,x,z)u_{zzz}(t,x,0), \quad (2.82) \end{aligned}$$

$$u(0,x,z) = 0,$$

где функции

$$F_1(t,x,z) = \frac{-a_2 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 \frac{\partial}{\partial t}u_2(t,x,z) + a_2 \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,u_2(t,x,z))}{\lambda_1^1(t,x)\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)\right]},$$

$$F_2(t,x,z) = \frac{a_2(t,x)M(t,\varphi_1)\frac{\partial}{\partial t}u_2(t,x,z) - a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M(t,u_2(t,x,z))}{\lambda_1^1(t,x)\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 M(t,\varphi_1)\right]},$$

вследствие (2.7), (2.8), (2.22), (2.23), (2.75), (2.76) удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{G_{[0,t^*]}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}F_j\right| \leqslant C,\ k = 0,1,2,3,\ j = 1,2. \quad (2.83)$$

Используя теорему Лагранжа, перепишем уравнение (2.82) в следующем виде

$$u_t(t,x,z) = \frac{a_1(t,x)}{\lambda_1^1(t,x)} u_{xx}(t,x,z) + \frac{a_2(t,x)}{\lambda_1^1(t,x)} u_{zz}(t,x,z) +$$
$$+ F_1(t,x,z) u_{zz}(t,x,0) + F_2(t,x,z) u_{zzz}(t,x,0) +$$
$$+ F_3(t,x,z) u(t,x,z), \quad (2.84)$$

где функция

$$F_3(t,x,z) = \frac{\lambda_2^1(t,x)}{\lambda_1^1(t,x)} M^{(1)}\Big(t, u_1(t,x,z) - \theta\big(u_2(t,x,z) - u_1(t,x,z)\big)\Big),$$

вследствии (2.7), (2.8), (2.22), (2.23), (2.69), (2.71) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{G_{[0,t^*]}} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} F_3 \right| \leqslant C, \ \ k = 0,1,2,3. \quad (2.85)$$

Здесь θ – постоянная, такая, что $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Рассмотрим

$$g_k(t) = \sup_{G_{[0,t]}} |\frac{\partial^k}{\partial z^k} u(\xi,x,z)|, \ \ k = 0,1,2,3,$$

неотрицательные, монотонно возрастающие на отрезке $[0,t^*]$ функции.

Учитывая оценки (2.83), (2.85), в силу принципа максимума для уравнения (2.84) получим

$$|u(\xi,x,z)| \leqslant C_0(g_3(t) + g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t, \ \ (\xi,x,z) \in G_{[0,t]}, \ \ 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

откуда следует неравенство

$$g_0(t) \leqslant C_0(g_3(t) + g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t, \ \ 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Дифференцируя (2.84) от одного до трех раз по z, в силу принципа максимума получим оценки

$$g_k(t) \leqslant C_k(g_3(t) + g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t, \ \ 0 \leqslant t \leqslant t^*, \ \ k = 1,2,3.$$

Сложим данные неравенства, получим при $0 \leqslant t \leqslant t^*$

$$g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)+g_3(t) \leqslant (C_0+C_1+C_2+C_3)(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)+g_3(t))t.$$

Отсюда получим, что при $t \in [0, \zeta]$, где $\zeta < 1/(C_0 + C_1 + C_2 + C_3)$ выполняется $g_0(t) + g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = 0$ и, следовательно

$$u(t, x, z) = 0, \text{ при } (t, x, z) \in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя наши рассуждения для $t \in [\zeta, 2\zeta]$, получим, что

$$u(t, x, z) = 0, \ (t, x, z) \in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов докажем, что $u(t, x, z) \equiv 0$ в $G_{[0,t^*]}$.

Учитывая, что $u_1 \equiv u_2$ в $G_{[0,t^*]}$, из (2.78) – (2.81), получим, что для $\lambda_1(t, x) = \lambda_1^1(t, x) - \lambda_1^2(t, x)$ и $\lambda_2(t, x) = \lambda_2^1(t, x) - \lambda_2^2(t, x)$ выполняются соотношения

$$\lambda_1(t, x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 - \lambda_2(t, x)M(t, \varphi_1) = 0,$$
$$\lambda_1(t, x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 - \lambda_2(t, x)M^{(1)}(t, \varphi_1)\varphi_2 = 0.$$

Отсюда, учитывая (2.8), получим, что $\lambda_1(t, x) \equiv 0$, $\lambda_2(t, x) \equiv 0$ в $\Pi_{[0,t^*]}$. Следовательно $\lambda_1^1(t, x) \equiv \lambda_1^2(t, x)$, $\lambda_2^1(t, x) \equiv \lambda_2^2(t, x)$ в $\Pi_{[0,t^*]}$. Справедлива

Теорема 2.5.1. *Решение $u(t, x, z)$, $\lambda_1(t, x)$, $\lambda_2(t, x)$ задачи* (2.1)–(2.8), *удовлетворяющее соотношениям* (2.75), (2.76), *единственно в классе $Z(t^*)$.*

Из теорем 2.4.1 и 2.5.1 следует

Теорема 2.5.2. *Пусть выполняются условия* (2.5)–(2.8), (2.22)–(2.24). *Тогда существует и единственно решение $u(t, x, z)$, $\lambda_1(t, x)$, $\lambda_2(t, x)$ задачи* (2.1)–(2.4) *в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющее соотношениям* (2.75), (2.76).

Глава 3. О задаче идентификации коэффициентов при нелинейном члене и функции источника для полулинейного параболического уравнения

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_n, z \in E_1\}$ задачу Коши

$$u_t(t,x,z) = L_x(u) + u_{zz} + \lambda_1(t,x)M(t,u(t,x,z)) + \lambda_2(t,x)f(t,x,z), \quad (3.1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \quad (3.2)$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{k,m=1}^{n} a_{km}(t)u_{x_k x_m} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)u_{x_k}, \text{ где } a_{km}(t), a_k(t) \in C\,[0,T]\,,$$

функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (3.1)–(3.2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,x,0) = \varphi_1(t,x), \quad (3.3)$$

$$u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x) \quad (3.4)$$

и условиям согласования

$$u_0(x,0) = \varphi_1(0,x), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(x,0) = \varphi_2(0,x). \quad (3.6)$$

Относительно функции $M(t,y)$ также предполагаем, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение.

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\ldots,9,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y\in E_1. \quad (3.7)$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k\geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y)=M(t,y)$.

Пусть выполняется при $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}=\{(t,x)\mid 0\leq t\leq T, x\in E_n\}$ соотношение

$$\Big|M(t,\varphi_1(t,x))f_z(t,x,0)-M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f(t,x,0)\Big|\geq\delta>0, \quad (3.8)$$

где δ – некоторая фиксированная постоянная.

Под решением обратной задачи (3.1)–(3.4) в некоторой области $G_{[0,t_*]}$, $0<t_*\leqslant T$, будем понимать тройку действительнозначных функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$, которые обладают достаточной гладкостью и удовлетворяют соотношениям (3.1)–(3.4).

3.2 Переход от обратной задачи к прямой

Приведем задачу (3.1)–(3.4) к некоторой вспомогательной задаче. Положим $z=0$ в (3.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)=L_x(\varphi_1)+u_{zz}(t,x,0)+\lambda_1(t,x)M(t,\varphi_1)+\lambda_2(t,x)f(t,x,0). \quad (3.9)$$

Продифференцируем (3.1) по z, положим $z=0$, учитывая (3.3)–(3.4), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x)=L_x(\varphi_2(t,x))+u_{zzz}(t,x,0)+$$
$$+\lambda_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)+\lambda_2(t,x)f_z(t,x,0). \quad (3.10)$$

Из (3.9), (3.10) находим

$$\lambda_1(t,x) = \frac{(\psi_1(t,x) - u_{zz}|_{z=0})f_z|_{z=0} - (\psi_2(t,x) - u_{zzz}|_{z=0})f|_{z=0}}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}}, \quad (3.11)$$

$$\lambda_2(t,x) = \frac{(\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})M(t,\varphi_1) - (\psi_1 - u_{zz}|_{z=0})M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2(t,x)}{M(t,\varphi_1)f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 f|_{z=0}}. \quad (3.12)$$

Здесь

$$\psi_1(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x) - L_x(\varphi_1(t,x)), \quad \psi_2(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) - L_x(\varphi_2(t,x)).$$

Знаменатели в (3.11), (3.12) в силу (3.8) в ноль не обращаются при всех $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$. Перепишем выражения (3.11), (3.12) в следующем виде :

$$\lambda_1(t,x) = A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0),$$

$$\lambda_2(t,x) = B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0).$$

Здесь

$$A_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)f_z(t,x,0) - \psi_2(t,x)f(t,x,0)}{\Delta(t,x)},$$

$$A_2(t,x) = \frac{-f_z(t,x,0)}{\Delta(t,x)}, \ A_3(t,x) = \frac{f(t,x,0)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_1(t,x) = \frac{\psi_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x)) - \psi_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_2(t,x) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)}, \ B_3(t,x) = \frac{-M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$\Delta(t,x) = M(t,\varphi_1(t,x))f_z(t,x,0) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f(t,x,0)$$

– известные функции.

Учитывая выражения для коэффициентов $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$, приходим к следующей задаче

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z) +$$
$$+ \left[A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\right] M(t,u(t,x,z)) +$$
$$+ \left[B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\right] f(t,x,z), \quad (3.13)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{3.14}$$

Докажем теперь классическую однозначную разрешимость прямой задачи (3.13), (3.14).

3.3 Разрешимость прямой задачи

Для доказательства существования решения задачи (3.13), (3.14) применим метод слабой аппроксимации [17, 83]. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t - \frac{\tau}{2})$ на втором дробном шаге в нелинейных членах.

$$u_t^\tau(t,x,z) = 2L_x(u^\tau(t,x,z)) + 2u_{zz}^\tau(t,x,z),\ t \in \left(j\tau, \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau\right] \tag{3.15}$$

$$u_t^\tau(t,x,z) = 2R_1^\tau(t,x)M(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,z)) + \\ + 2R_2^\tau(t,x)f(t,x,z),\ t \in \left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, (j+1)\,\tau\right] \tag{3.16}$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z), \quad x \in E_n,\ z \in E_1. \tag{3.17}$$

Здесь $j = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = T$; $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t,x,z)$,

$$R_1^\tau(t,x) = A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,0), \tag{3.18}$$

$$R_2^\tau(t,x) = B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,0). \tag{3.19}$$

Введем следующие обозначения:

$$U^\tau(t) = \sum_{k=0}^{5} U_k^\tau(t), \tag{3.20}$$

$$U_k^\tau(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t}\ \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi,x,z)\right|, \quad U_k(0) = \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right|. \tag{3.21}$$

Функции $U^\tau(t)$ и $U_k^\tau(t)$ являются неотрицательными и неубывающими на каждом полуинтервале $(j\tau, (j+1)\tau]$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения и удовлетворяют им

$$\left|D_x^{\beta_1}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i(t,x)\right| + \left|D_x^{\beta_2}\varphi_i(t,x)\right| \leqslant C,\ |\beta_1|\leqslant 4,\ |\beta_2|\leqslant 6,\ i=1,2, \quad (3.22)$$

$$\left|D_x^{\beta_3}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right| + \left|D_x^{\beta_3}\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ |\beta_3|\leqslant 4,\ k=0,1,\ldots,5, \quad (3.23)$$

$$(t,x,z)\in G_{[0,T]},\ C \text{ – постоянная больше единицы.}$$

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\{u^\tau(t,x,z)\}$ задачи (3.15)–(3.17) в классе непрерывных функций.

Назовем j-м целым временным шагом полуинтервал $(j\tau,(j+1)\tau]$, где $j=0,1,\ldots,N-1$.

Рассмотрим целый нулевой шаг ($j=0$).

На первом дробном шаге для решения u^τ задачи

$$u_t^\tau(t,x,z) = 2L_x(u^\tau(t,x,z)) + 2u_{zz}^\tau(t,x,z), \quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{2},$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z),$$

в силу принципа максимума получаем

$$|u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|,\ 0<\xi\leqslant\frac{\tau}{2}. \quad (3.24)$$

Аналогично, дифференцируя уравнения (3.15), (3.17) по z, от одного до пяти раз соответственно, в силу принципа максимума получим оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right|,\ \text{где } k=1,\ldots,5,\ 0<\xi\leqslant\frac{\tau}{2}. \quad (3.25)$$

Возьмем от левых частей неравенств (3.24), (3.25) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}$, а затем $\sup\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t}$, и сложим полученные неравенства. Получим

$$U^\tau(t)\leqslant U(0),\ 0<t\leqslant\frac{\tau}{2}. \quad (3.26)$$

На втором дробном шаге, интегрируя по t в пределах от $\frac{\tau}{2}$ до t уравнение

$$u_t^\tau(t,x,z) = 2R_1^\tau(t,x)M(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2})) + 2R_2^\tau(t,x)f(t,x,z), \quad \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau,$$

получим равенство

$$u^\tau(t) = u^\tau(\frac{\tau}{2}) + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} R_1^\tau(\eta,x)M(\eta,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{2}))\,d\eta + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} R_2^\tau(\eta,x)f(\eta,x,z)\,d\eta.$$

Из последнего соотношения следует неравенство

$$|u^\tau(t,x,z)| \leqslant |u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)| + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{|M(\eta,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{2}))|\Big(|A_1(t,x)| +$$
$$+|A_2(t,x)||u_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)| + |A_3(t,x)||u_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)|\Big)\Big\}\,d\eta +$$
$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{|f(\eta,x,z)|\Big(|B_1(t,x)| + |B_2(t,x)||u_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)| +$$
$$+|B_3(t,x)||u_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)|\Big)\Big\}\,d\eta.$$

Поскольку данное неравенство выполняется при всех x, z, заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in E_n$, $z \in E_1$, затем заменим функцию $|u^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau|$. Учитывая, что $|M(t,y)| \leqslant M_0(1+|y|^p)$ (см.(3.7)), получим

$$\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)| + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{\big(1 + (\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau(\eta,x,z)|)^p\big)\times$$
$$\times\Big(1 + \sup_{x\in E_n} |u_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)| + \sup_{x\in E_n} |u_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)|\Big)\Big\}\,d\eta +$$
$$+C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |f(\eta,x,z)|\Big(1 + \sup_{x\in E_n} |u_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)| +$$
$$+\sup_{x\in E_n} |u_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)|\Big)\Big\}\,d\eta.$$

Здесь и далее через C обозначены (вообще говоря различные) постоянные больше единицы, зависящие от δ, постоянной M_0 из (3.7) и постоянных из (3.22), (3.23), ограничивающих входные данные, и не зависящие от τ. Ниже для удобства мы считаем, что $C \geq 1$.

Отсюда, учитывая монотонность по t функций U_k^τ (см. (3.21)), получим

$$U_0^\tau(t) \leqslant U_0^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\big(1 + (U_0^\tau(\eta))^p\big)(1 + U_2^\tau(\eta) + U_3^\tau(\eta))\,d\eta +$$
$$+ C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{\big(\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}|f(\eta,x,z)|\big)(1 + U_2^\tau(\eta) + U_3^\tau(\eta))\Big\}\,d\eta. \quad (3.27)$$

Дифференцируя на нулевом шаге уравнение (3.16) по z от одного до пяти раз соответственно, и проделывая на втором дробном шаге аналогичные выкладки, получим следующие неравенства

$$|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(t,x,z)| \leqslant |\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau(\frac{\tau}{2}x,z)| + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{|H_k^\tau(\eta - \frac{\tau}{2},x,z)|\,\Big(|A_1(t,x)| +$$
$$+|A_2(t,x)||u_{zz}^\tau(\eta - \frac{\tau}{2},x,0)| + |A_3(t,x)||u_{zzz}^\tau(\eta - \frac{\tau}{2},x,0)|\Big)\Big\}\,d\eta +$$
$$+ 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(\eta,x,z)|\,\Big(|B_1(t,x)| + |B_2(t,x)||u_{zz}^\tau(\eta - \frac{\tau}{2},x,0)| +$$
$$+|B_3(t,x)||u_{zzz}^\tau(\eta - \frac{\tau}{2},x,0)|\Big)\Big\}\,d\eta,\ \ k = 1,\ldots,5. \quad (3.28)$$

Здесь функция $H_k^\tau(t,x,z)$ – это результат дифференцирования k раз функции $M(t,u^\tau(t,x,z))$ по переменной z:

$$H_1^\tau(t,x,z) = M^{(1)}(t,u^\tau)u_z^\tau, \quad (3.29)$$

$$H_2^\tau(t,x,z) = M^{(2)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^2 + M^{(1)}(t,u^\tau)u_{zz}^\tau, \quad (3.30)$$

$$H_3^\tau(t,x,z) = M^{(3)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^3 + 3M^{(2)}(t,u^\tau)u_z^\tau u_{zz}^\tau + M^{(1)}(t,u^\tau)u_{zzz}^\tau, \quad (3.31)$$

$$H_4^\tau(t,x,z) = M^{(4)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^4 + 6M^{(3)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^2 u_{zz}^\tau +$$
$$+ 4M^{(2)}(t,u^\tau)u_z^\tau u_{zzz}^\tau + 3M^{(2)}(t,u^\tau)(u_{zz}^\tau)^2 + M^{(1)}(t,u^\tau)\frac{\partial^4}{\partial z^4}u^\tau, \quad (3.32)$$

$$H_5^\tau(t,x,z) = M^{(5)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^5 + 10M^{(4)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^3 u_{zz}^\tau +$$
$$+ 15M^{(3)}(t,u^\tau)u_z^\tau(u_{zz}^\tau)^2 + 10M^{(3)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^2 u_{zzz}^\tau + 10M^{(2)}(t,u^\tau)u_{zz}^\tau u_{zzz}^\tau +$$
$$+ 5M^{(2)}(t,u^\tau)u_z^\tau \frac{\partial^4}{\partial z^4}u^\tau + M^{(1)}(t,u^\tau)\frac{\partial^5}{\partial z^5}u^\tau. \quad (3.33)$$

Заменим в неравенствах (3.28) функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in E_n$, $z \in E_1$, затем заменим функцию $|u^\tau|$, стоящую в левой части неравенств на $\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau|$. Учитывая монотонность функции $U^\tau(t)$ и тот факт, что $U_k^\tau(t) \leqslant U^\tau(t)$ (см.(3.20), (3.21)), получим

$$U_k^\tau(t) \leqslant U_k^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}|H_k^\tau(\eta,x,z)|(1+U_2^\tau(\eta)+U_3^\tau(\eta))\Big\}\,d\eta +$$
$$+ C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big\{\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(\eta)|(1+U_2^\tau(\eta)+U_3^\tau(\eta))\Big\}\,d\eta, \ k=1,\dots,5. \quad (3.34)$$

Учитывая обозначения (3.20), (3.21), и условие (3.7), из (3.29)–(3.33) следует оценка

$$|H_k^\tau(t,x,z)| \leqslant C\big(1+(U^\tau(t))^{p+5}\big), \text{ при } x\in E_n,\ z\in E_1,\ k=1,\dots,5. \quad (3.35)$$

Из (3.27), (3.34), учитывая (3.35), получим

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\frac{\tau}{2}) + \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} P_{p+6}(U^\tau(\eta))\,d\eta, \quad (3.36)$$

где $P_{p+6}(\zeta) = C(\zeta^{p+6} + \zeta^{p+5} + \dots + \zeta + 1)$ – полином порядка $p+6$, p – постоянная из (3.7), $C \geq 1$ - константа, не зависящая от τ.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = P_{p+6}(\omega(t)), \quad \omega(0) = U(0). \tag{3.37}$$

По теореме Коши [53] существует решение $\omega \in C^1[0, t^*]$ данной задачи на отрезке $[0, t^*]$, где t^* зависит от C и начальных данных $U(0)$. Очевидно, что $\omega(t)$ – строго возрастающая функция.

Отметим тот факт, что если для некоторого $t_0 \leqslant t$ справедливо $U^\tau(t_0) \leqslant \omega(t_0)$, то выполняется неравенство $U^\tau(t) \leqslant \omega(t)$ при $t \in [t_0, t_1^*]$ (см. лемму 2.3.1).

Так как

$$U^\tau\left(\frac{\tau}{2}\right) \leqslant U(0) = \omega(0) \leqslant \omega\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

то из (3.36) получаем

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(t), \text{ при } \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau. \tag{3.38}$$

Из (3.26), (3.38) следует, что

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(\tau), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Рассуждая аналогично на первом временном отрезке, получим, что

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(2\tau), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 2\tau,$$

и так далее. Через конечное число шагов получим равномерную по τ оценку

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(t^*), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

и, следовательно, учитывая обозначения (3.20), (3.21), равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(t, x, z)\right| \leqslant C, \text{ при } k = 0, 1, \ldots, 5, \ (t, x, z) \in G_{[0, t^*]}. \tag{3.39}$$

Продифференцируем задачу (3.15)–(3.17) по переменной x_i и обозначим $v^\tau(t,x,z) = u^\tau_{x_i}(t,x,z)$, $v_0(x,z) = \frac{\partial}{\partial x_i} u_0(x,z)$. Получим задачу

$$v^\tau_t(t,x,z) = 2L_x(v^\tau(t,x,z)) + 2v^\tau_{zz}(t,x,z), \quad j\tau < t \leqslant \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, \tag{3.40}$$

$$\begin{gathered} v^\tau_t(t,x,z) = 2R^\tau_1(t,x)M^{(1)}(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,z))v^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,z)+ \\ +2\left(D^\tau_1(t,x) + A_2(t,x)v^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,0) + A_3(t,x)v^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)\right)\times \\ \times M(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2})) + 2\left(D^\tau_2(t,x) + B_2(t,x)v^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)+\right. \\ \left.+B_3(t,x)v^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)\right) f(t,x,z)+ \\ +2R^\tau_2(t,x)f_{x_i}(t,x,z), \quad \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau < t \leqslant (j+1)\tau, \end{gathered} \tag{3.41}$$

$$v^\tau(0,x,z) = v_0(x,z), \quad x\in E_n,\ y \in E_1. \tag{3.42}$$

Здесь функции $R^\tau_1(t,x)$, $R^\tau_2(t,x)$ (см. (3.18), (3.19)) и функции

$$D^\tau_1(t,x) = A_{1x_i} + A_{2x_i}u^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,0) + A_{3x_i}u^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{2},x,0),$$

$$D^\tau_2(t,x) = B_{1x_i} + B_{2x_i}u^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,0) + B_{3x_i}u^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)$$

ограничены при $(t,x)\in \Pi_{[0,t^*]}$ равномерно по τ, что следует из оценок (3.7), (3.8), (3.22), (3.23), (3.39).

Введем следующие обозначения

$$V^\tau(t) = \sum_{k=0}^{5} V^\tau_k(t), \tag{3.43}$$

$$V^\tau_k(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t}\ \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} v^\tau(\xi,x,z)\right|, \quad V_k(0) = \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} v_0(x,z)\right|. \tag{3.44}$$

Функции $V^\tau(t)$ и $V^\tau_k(t)$ являются неотрицательными и неубывающими на каждом полуинтервале $(j\tau,(j+1)\tau]$, $j=0,1,\dots,N-1$.

Рассмотрим нулевой шаг ($j = 0$). На первом дробном шаге для решения v^τ задачи

$$v_t^\tau(t,x,z) = 2L_x(v^\tau(t,x,z)) + 2v_{zz}^\tau(t,x,z), \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2},$$

$$v^\tau(0,x,z) = v_0(x,z),$$

в силу принципа максимума

$$|v^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v_0(x,z)|\,, \text{ при } 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{2}. \tag{3.45}$$

Аналогично, дифференцируя уравнения (3.40), (3.42) по z, в силу принципа максимума получим оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} v^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} v_0(x,z)\right|,\ k = 1,\ldots,5,\ 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{2}, \tag{3.46}$$

Возьмем от левых частей неравенств (3.45), (3.46) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}$, а затем $\sup\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t}$, и сложим полученные неравенства. Учитывая обозначения (3.43), (3.44), получим

$$V^\tau(t) \leqslant V(0), \text{ при } 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}.$$

На втором дробном шаге, интегрируя уравнение (3.41) по отрезку $\left[\frac{\tau}{2}, t\right]$, получим при $\frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau$ равенство

$$v^\tau(t,x,z) = v^\tau(\frac{\tau}{2},x,z) + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} R_1^\tau(t,x) M^{(1)}(t,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{2}))v^\tau(\eta-\frac{\tau}{2})\,d\eta+$$

$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big(D_1^\tau(t,x) + A_2(t,x)v_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0) + A_3(t,x)v_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2}x,0)\Big)\times$$

$$\times M(t,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{2}))\,d\eta + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big(D_2^\tau(t,x) + B_2(t,x)v_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)+$$

$$+B_3(t,x)v_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)\Big)\,f(\eta,x,z)\,d\eta + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} R_2^\tau(t,x) f_{x_i}(\eta,x,z)\,d\eta.$$

Отсюда следует неравенство

$$|v^\tau(t,x,z)| \leqslant |v^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)| + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} |R_1^\tau||M^{(1)}(t,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{2}))||v^\tau(\eta-\frac{\tau}{2})|\,d\eta+$$

$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big(|D_1^\tau| + |A_2||v_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)| + |A_3||v_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)|\Big)\times$$

$$\times |M(t,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{2}))|\,d\eta + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Big(|D_2^\tau| + |B_2||v_{zz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)|+$$

$$+|B_3||v_{zzz}^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)|\Big)\,|f(\eta,x,z)|\,d\eta+$$

$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} |R_2^\tau||f_{x_i}(\eta,x,z)|\,d\eta, \quad \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau. \quad (3.47)$$

Заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in E_n$, $z \in E_1$, затем заменим функцию $|v^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau|$. Заметим, что из оценок (3.39) и условия

(3.7), следуют равномерные по τ оценки

$$|M(t,u^\tau(t,x,z))| \leqslant C(1+|u^\tau(t,x,z)|^p) \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}.$$

Аналогично

$$|M^{(1)}(t,u^\tau(t,x,z))| \leqslant C(1+|u^\tau(t,x,z)|^p) \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}.$$

Следовательно из (3.47) получим

$$\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(t,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\frac{\tau}{2},x,z)| + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |v^\tau(\eta-\frac{\tau}{2},x,z)|\,d\eta +$$

$$+C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\left(1+\sup_{x\in E_n}|v^\tau_{zz}(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)| + \sup_{x\in E_n}|v^\tau_{zzz}(\eta-\frac{\tau}{2},x,0)|\right)d\eta +$$

$$+C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}|f_{x_i}(\eta,x,z)|\,d\eta,\quad \frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau.$$

Отсюда, учитывая монотонность функций $V_k^\tau(t)$ (см.(3.44)), справедливо

$$V_0^\tau(t)\leqslant V_0^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}(1+V_0^\tau(\eta)+V_2^\tau(\eta)+V_3^\tau(\eta))\,d\eta. \tag{3.48}$$

Отметим теперь, что справедливо равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}M(t,u^\tau(t,x,z))\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}M^{(1)}(t,u^\tau(t,x,z))\right| \leqslant C,$$

$$k=1,\dots,5,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}.$$

Действительно, в силу (3.39) и условия (3.7)

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}M(t,u^\tau(t,x,z))\right| = |M^{(1)}(t,u^\tau(t,x,z))||u^\tau_z(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}M(t,u^\tau(t,x,z))\right| = |M^{(2)}(t,u^\tau(t,x,z))(u^\tau_z(t,x,z))^2 +$$

$$+M^{(1)}(t,u^\tau(t,x,z))u^\tau_{zz}(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial z^3}M(t,u^\tau)\right| = |M^{(3)}(t,u^\tau)(u_z^\tau)^3 + 3M^{(2)}(t,u^\tau)u_z^\tau u_{zz}^\tau + M^{(1)}(t,u^\tau)u_{zzz}^\tau| \leqslant C,$$

и т.д.

Дифференцируя на нулевом временном шаге уравнение (43) по z от одного до пяти раз, учитывая обозначения (3.43), (3.44), при $\frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau$ получим

$$V_1^\tau(t) \leqslant V_1^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}(1 + V_0^\tau(\eta) + V_1^\tau(\eta) + V_2^\tau(\eta))\,d\eta, \tag{3.49}$$

$$V_2^\tau(t) \leqslant V_2^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}(1 + V_0^\tau(\eta) + V_1^\tau(\eta) + V_2^\tau(\eta))\,d\eta, \tag{3.50}$$

$$V_3^\tau(t) \leqslant V_3^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}(1 + V_0^\tau(\eta) + V_1^\tau(\eta) + V_2^\tau(\eta) + V_3^\tau(\eta))\,d\eta, \tag{3.51}$$

$$V_4^\tau(t) \leqslant V_4^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}(1 + V_0^\tau(\eta) + V_1^\tau(\eta) + V_2^\tau(\eta) + V_3^\tau(\eta) + V_4^\tau(\eta))\,d\eta. \tag{3.52}$$

$$V_5^\tau(t) \leqslant V_5^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}(1 + V_0^\tau(\eta) + V_1^\tau(\eta) + V_2^\tau(\eta) + V_3^\tau(\eta) +$$

$$+ V_4^\tau(\eta) + V_5^\tau(\eta))\,d\eta, \tag{3.53}$$

Сложим неравенства (3.48) и (3.49)–(3.53), получим

$$V^\tau(t) \leqslant V^\tau(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}(1 + V^\tau(\eta))\,d\eta, \quad \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau,$$

откуда по лемме Гронуолла следует оценка

$$V^\tau(t) \leqslant (V(0)+1)e^{Ct} - 1 \leqslant (V(0)+1)e^{C\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant \tau.$$

Аналогично рассуждая на первом целом шаге, приходим к неравенству

$$V^\tau(t) \leqslant (V0) + 1)e^{C2\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 2\tau,$$

и так далее. Через конечное число шагов равномерно по τ получим неравенство

$$V^\tau(t) \leqslant (V(0) + 1)e^{Ct^*} - 1, \quad 0 < t \leqslant t^*, \tag{3.54}$$

и, следовательно (см.(3.43), (3.44)), справедливы оценки равномерно по τ

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau_{x_i}\right| \leqslant C, \text{ при } k = 0, 1, \ldots, 5, \ (t, x, z) \in G_{[0,t^*]}.$$

Продифференцируем задачу (3.40)–(3.42) по переменной x_j и обозначим $w^\tau(t, x, z) = v^\tau_{x_j}(t, x, z) = u^\tau_{x_i x_j}(t, x, z)$, $w_0(x, z) = \frac{\partial}{\partial x_j} v_0(x, z) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_0(x, z)$. Получим на $w^\tau(t, x, z)$ задачу

$$w^\tau_t = 2L_x(w^\tau(t, x, z)) + 2w^\tau_{zz}(t, x, z), \quad j\tau < t \leqslant \left(j + \frac{1}{2}\right)\tau, \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} w^\tau_t &= 2R^\tau_1(t, x)M^{(1)}(t, u^\tau(t - \frac{\tau}{2}, x, z))w^\tau(t - \frac{\tau}{2}, x, z) + \\ &+ 2\left(E^\tau_1(t, x) + A_2(t, x)w^\tau_{zz}(t - \frac{\tau}{2}, x, 0) + A_3(t, x)w^\tau_{zzz}(t - \frac{\tau}{2}, x, 0)\right) \times \\ &\times M(t, u^\tau(t - \frac{\tau}{2})) + 2\left(E^\tau_2(t, x) + B_2(t, x)w^\tau_{zz}(t - \frac{\tau}{2}, x, 0) + \right. \\ &\left. + B_3(t, x)w^\tau_{zzz}(t - \frac{\tau}{2}, x, 0)\right) f(t, x, z) + \\ &\quad + S^\tau_1(t, x, z) + 2R^\tau_2 f_{x_i x_j}(t, x, z), \quad \left(j + \frac{1}{2}\right)\tau < t \leqslant (j + 1)\tau, \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$w^\tau(0, x, z) = w_0(x, z), \quad x \in E_n, \ z \in E_1. \tag{3.57}$$

Здесь функции $R^\tau_1(t, x)$, $R^\tau_2(t, x)$ и функции

$$E^\tau_1(t, x) = D_{1x_j} + A_{2x_j} u^\tau_{x_i zz}(t - \frac{\tau}{2}, x, 0) + A_{3x_j} u^\tau_{x_i zzz}(t - \frac{\tau}{2}, x, 0),$$

$$E^\tau_2(t, x) = D_{1x_j} + B_{2x_j} u^\tau_{x_i zz}(t - \frac{\tau}{2}, x, 0) + B_{3x_j} u^\tau_{x_i zzz}(t - \frac{\tau}{2}, x, 0)$$

ограничены при $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$ равномерно по τ, а функция

$$S_1^\tau(t,x,z) = 2{R_1}^\tau_{x_j}(t,x)M^{(1)}(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2}))u^\tau_{x_i}(t-\frac{\tau}{2}) + 2R_1^\tau(t,x)\times$$
$$\times M^{(2)}(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2}))u^\tau_{x_i}(t-\frac{\tau}{2})u^\tau_{x_j}(t-\frac{\tau}{2}) + 2\left(D_1^\tau + A_2u^\tau_{x_izz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)+\right.$$
$$\left.+A_3u^\tau_{x_izzz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)\right)M^{(1)}(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2}))u^\tau_{x_j}(t-\frac{\tau}{2}) + 2\left(D_2^\tau(t,x)+\right.$$
$$\left.+B_2(t,x)u^\tau_{x_izz}(t-\frac{\tau}{2},x,0) + B_3(t,x)u^\tau_{x_izzz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)\right)f_{x_j}(t,x,z)+$$
$$+\,2{R_2}^\tau_{x_j}f_{x_i}(t,x,z)$$

ограничена при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ равномерно по τ одновременно с производными по z до пятого порядка включительно, что следует из условия (3.7) и оценок (3.8), (3.22), (3.23), (3.39), (3.54)

Задача (3.55)–(3.57) аналогична задаче (3.40)–(3.42) в силу ограниченности входных данных и уже полученных оценок, что позволяет получить равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau_{x_ix_j}\right| \leqslant C, \text{ при } k=0,1,\ldots,5,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}.$$

Продифференцируем задачу (3.55)–(3.57) по переменной x_k и обозначим $h^\tau(t,x,z) = w^\tau_{x_k}(t,x,z) = u^\tau_{x_ix_jx_k}(t,x,z)$, $h_0(x,z) = \frac{\partial}{\partial x_j}w_0(x,z) = \frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}u_0(x,z)$. Получим задачу следующего вида

$$h_t^\tau = 2L_x(h^\tau(t,x,z)) + 2h^\tau_{zz}(t,x,z), \quad j\tau < t \leqslant \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, \tag{3.58}$$

$$h_t^\tau = 2R_1^\tau M^{(1)}(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2}))h^\tau(t-\frac{\tau}{2}) + 2\left(H_1^\tau + A_2h^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)+\right.$$
$$\left.+A_3h^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)\right)M(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2})) + 2\left(H_2^\tau(t,x)+\right.$$
$$\left.+B_2(t,x)h^\tau_{zz}(t-\frac{\tau}{2},x,0) + B_3(t,x)h^\tau_{zzz}(t-\frac{\tau}{2},x,0)\right)f(t,x,z)+$$
$$+\,S_2^\tau(t,x,z) + 2R_2^\tau f_{x_ix_jx_k}(t,x,z), \quad \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau < t \leqslant (j+1)\tau, \tag{3.59}$$

$$h^\tau(0,x,z) = h_0(x,z), \quad x \in E_n, \ z \in E_1. \tag{3.60}$$

Здесь $S_2^\tau(t,x,z)$ зависит от функции u^τ и ее производных по пространственным переменным x_i, x_j, а также от следов функций $\frac{\partial^2}{\partial z^2}u^\tau$, $\frac{\partial^3}{\partial z^3}u^\tau$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}u^\tau_{x_i}$, $\frac{\partial^3}{\partial z^3}u^\tau_{x_i}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}u^\tau_{x_ix_j}$, $\frac{\partial^3}{\partial z^3}u^\tau_{x_ix_j}$ при $z = 0$. Функции $H_1^\tau(t,x)$ и $H_2^\tau(t,x)$ являются ограниченными равномерно по τ при $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$, а $S_2^\tau(t,x,z)$ ограниченной равномерно по τ одновременно с производными по z до пятого порядка включительно при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$, что следует из ограниченности входных данных и полученных ранее оценок. Функции $H_1^\tau(t,x)$, $H_2^\tau(t,x)$, $S_2^\tau(t,x,z)$ не сложно получить, продифференцировав уравнение (3.56) и преобразовав результат дифференцирования к виду (3.59).

Повторяя для данной задачи рассуждения, аналогичные проделанным при оценке производных меньшего порядка по пространственным переменным, получим равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u^\tau_{x_ix_jx_k}\right| \leqslant C, \ \text{при } k = 0,1,\ldots,5, \ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

Аналогично, при помощи дифференцирования задачи (3.58)–(3.60) по x_l, можно доказать равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u^\tau\right| \leqslant C, \ \text{при } |\alpha| = 4, \ k = 0,1,\ldots,5, \ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

Таким образом справедливы следующие оценки равномерно по τ при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u^\tau\right| \leqslant C, \ \text{при } |\alpha| = 0,1,\ldots,4, \ k = 0,1,\ldots,5, \tag{3.61}$$

Используя оценку (3.61) и уравнения (3.15), (3.16), получим равномерно по τ

$$|u_t^\tau(t,x,z)| \leqslant C, \ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

Продифференцируем уравнения (3.15), (3.16) один раз по z. В силу оценки (3.61) правая часть получившихся уравнений будет ограничена равномерно по τ, а значит и левая часть будет также ограничена равномерно по τ

$$|u^\tau_{tz}(t,x,z)| \leqslant C, \ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

По аналогии получим равномерно по τ следующие оценки при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$:

$$|u^\tau_{tzz}(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$|u^\tau_{tzzz}(t,x,z)| \leqslant C,$$

$$\left|u^\tau_{tx_i}(t,x,z)\right| + \left|u^\tau_{tx_iz}(t,x,z)\right| + \left|u^\tau_{tx_izz}(t,x,z)\right| + \left|u^\tau_{tx_izzz}(t,x,z)\right| \leqslant C,$$

$$\left|u^\tau_{tx_ix_j}(t,x,z)\right| + \left|u^\tau_{tx_ix_jz}(t,x,z)\right| + \left|u^\tau_{tx_ix_jzz}(t,x,z)\right| + \left|u^\tau_{tx_ix_jzzz}(t,x,z)\right| \leqslant C.$$

Таким образом справедливы следующие оценки равномерно по τ при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \ |\alpha| = 0,1,2, \ k = 0,1,2,3,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \ |\alpha| = 0,1,2, \ k = 0,1,2,3,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \ |\alpha| = 0,1,2, \ k = 0,1,2,3,$$

что вместе с (3.61) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела [49] о компактности.

В силу теоремы Арцела некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности u^τ решений задачи (3.15)–(3.17) сходится вместе с производными по x до второго и по z до третьего порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$. Доказано на основании теоремы 1.6.1, что

$u(t,x,z)$ есть решение задачи (3.13), (3.14), причем $u(t,x,z) \in C^{0,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,x,z) \mid f_t,\ \frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x f \in C(G_{[0,t^*]}),\ |\alpha| \leqslant 2,\ k = 0,1,2,3 \right\}.$$

При этом

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u(t,x,z) \right| \leqslant C,\ |\alpha| = 0,1,2,\ k = 0,1,2,3. \tag{3.62}$$

Таким образом, мы доказали существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (3.13), (3.14) в классе $C^{1,2,3}_{[t,x,z]}(G_{[0,t^*]})$.

3.4 Существование классического решения обратной задачи

Докажем, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$, где

$$\lambda_1(t,x) = \frac{(\psi_1(t,x) - u_{zz}|_{z=0}) f_z|_{z=0} - (\psi_2(t,x) - u_{zzz}|_{z=0}) f|_{z=0}}{M(t,\varphi_1(t,x)) f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x) f|_{z=0}},$$

$$\lambda_2(t,x) = \frac{(\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0}) M(t,\varphi_1) - (\psi_1 - u_{zz}|_{z=0}) M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2(t,x)}{M(t,\varphi_1) f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 f|_{z=0}},$$

является классическим решением задачи (3.1)–(3.4).

Поскольку $u(t,x,z)$ – это решение прямой задачи (3.13), (3.14), то подставляя $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$ и $\lambda_2(t,x)$ в (3.1), мы получим верное тождество.

Используя (3.7), (3.8), (3.22), (3.23), (3.62), из (3.11), (3.12), (3.13) получим, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ принадлежит классу

$$Z(t^*) = \big\{ u(t,x,z),\ \lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),$$
$$\lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}) \big\},$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 2} \sum_{k=0}^{3} \left| D^\alpha_x \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z) \right| \leqslant C,\ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \tag{3.63}$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D_x^\alpha \lambda_1(t,x)| + \sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D_x^\alpha \lambda_2(t,x)| \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}. \tag{3.64}$$

Здесь $C_{t,x}^{0,2}(\Pi_{[0,t^*]}) = \{g(t,x) \mid D_x^\alpha g(t,x) \in C(\Pi_{[0,t^*]}),\ |\alpha| = 0,1,2\}$.

Докажем теперь выполнение условий переопределения (3.3), (3.4).

Положив $z=0$ в уравнении

$$\begin{aligned} &u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z) + \\ &+\frac{(\psi_1(t,x) - u_{zz}|_{z=0})f_z|_{z=0} - (\psi_2(t,x) - u_{zzz}|_{z=0})f|_{z=0}}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}} M(t,u) + \\ &+\frac{(\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})M(t,\varphi_1) - (\psi_1 - u_{zz}|_{z=0})M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2(t,x)}{M(t,\varphi_1)f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 f|_{z=0}} f(t,x,z), \end{aligned} \tag{3.65}$$

получим соотношение

$$\begin{aligned} &u_t(t,x,0) = L_x(u(t,x,0))) + u_{zz}(t,x,0) + \\ &+\frac{(\psi_1(t,x) - u_{zz}|_{z=0})f_z|_{z=0} - (\psi_2(t,x) - u_{zzz}|_{z=0})f|_{z=0}}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}} M(t,u(t,x,0)) + \\ &+\frac{(\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})M(t,\varphi_1) - (\psi_1 - u_{zz}|_{z=0})M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2(t,x)}{M(t,\varphi_1)f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 f|_{z=0}} f(t,x,0). \end{aligned}$$

Преобразуем данное уравнение к виду

$$\begin{aligned} &u_t(t,x,0) = L_x(u(t,x,0))) + u_{zz}(t,x,0) + \\ &+\frac{[(\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})f|_{z=0}]\,[M(t,\varphi_1) - M(t,u|_{z=0})]}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}} + \\ &\qquad\qquad + \frac{(\psi_1 - u_{zz}|_{z=0})[M(t,u|_{z=0})f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 f|_{z=0}]}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}}. \end{aligned}$$

Обозначим $\chi(t,x) = u(t,x,0) - \varphi_1(t,x)$. Получим

$$\begin{aligned} &\chi_t(t,x) = L_x(\chi(t,x)) + \\ &+\frac{[(\psi_1 - u_{zz}|_{z=0})f_z|_{z=0} - (\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})f|_{z=0}]\,[M(t,u|_{z=0}) - M(t,\varphi_1)]}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя теорему Лагранжа, получим

$$\chi_t(t,x) = L_x(\chi(t,x)) + \Omega_1(t,x,z)\chi(t,x),$$

где

$$\Omega_1(t,x,z) = \frac{[(\psi_1 - u_{zz}|_{z=0})f_z|_{z=0} - (\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})f|_{z=0}]}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}} \times$$
$$\times M^{(1)}\Big(t, u|_{z=0} - \theta[\varphi_1 - u|_{z=0}]\Big)$$

ограниченная при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ в силу (3.7), (3.8), (3.22), (3.23), (3.63) функция. θ - постоянная, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

В силу (3.5) $\chi(0,x) = 0$. По принципу максимума

$$|u(t,x,0) - \varphi_1(t,x)| = |\chi(t,x)| = 0, \ (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}. \tag{3.66}$$

Т.е. $u(t,x,0) = \varphi_1(t,x),$ в $\Pi_{[0,t^*]}$, и мы доказали выполнение условия переопределения (3.3).

Продифференцируем (3.65) по z и в полученном уравнении положим $z = 0$. Получим уравнение

$$u_{zt}(t,x,0) = L_x(u_zt,x,0)) + u_{zzz}(t,x,0) +$$
$$+ \frac{(\psi_1(t,x) - u_{zz}|_{z=0})f_z|_{z=0} - (\psi_2(t,x) - u_{zzz}|_{z=0})f|_{z=0}}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}} \times$$
$$\times M^{(1)}(t,u(t,x,0))u_z(t,x,0) +$$
$$+ \frac{(\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})M(t,\varphi_1) - (\psi_1 - u_{zz}|_{z=0})M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2(t,x)}{M(t,\varphi_1)f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 f|_{z=0}} f_z(t,x,0).$$

Тождественно преобразуем данное уравнение к следующему виду

$$u_{zt}(t,x,0) = L_x(u_zt,x,0)) + u_{zzz}(t,x,0) +$$
$$+ \frac{\big[(\psi_1(t,x) - u_{zz}|_{z=0})f_z|_{z=0}\big]\big(M^{(1)}(t,u|_{z=0})u_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2\big)}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}} +$$
$$+ \frac{(\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})\big[M(t,\varphi_1)f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,u|_{z=0})u_z|_{z=0}f|_{z=0}\big]}{M(t,\varphi_1)f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 f|_{z=0}}.$$

Заметим, что из того, что $u(t,x,0) \equiv \varphi_1(t,x)$, следует $M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x)) \equiv M^{(1)}(t,u(t,x,0))$.

Обозначим $\gamma(t,x) = u_z(t,x,0) - \varphi_2(t,x)$. Получим, учитывая (3.66),

$$\gamma_t(t,x) = L_x(\gamma(t,x)) + \Omega_2(t,x,z)\gamma(t,x),$$

где

$$\Omega_2(t,x,z) = \frac{\left[(\psi_1 - u_{zz}|_{z=0})f_z|_{z=0} - (\psi_2 - u_{zzz}|_{z=0})f|_{z=0}\right] M^{(1)}(t,\varphi_1)}{M(t,\varphi_1(t,x))f_z|_{z=0} - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f|_{z=0}}$$

– ограниченная при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ в силу (3.7), (3.8), (3.22), (3.23), (3.63) функция.

В силу (3.6) $\gamma(0,x) = 0$. Используя принцип максимума, получим

$$|u_z(t,x,0) - \varphi_2(t,x)| = |\gamma(t,x)| \leqslant 0, \ (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}.$$

Т.е. $u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x)$, при $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$, и мы доказали выполнение условия переопределения (3.4).

Доказано существование решения $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющего соотношениям (3.1)–(3.4). Справедлива

Теорема 3.4.1. *Пусть выполняются условия* (3.5) – (3.8), (3.22), (3.23). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (3.1)–(3.4) *в классе* $Z(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (3.63), (3.64).

3.5 Единственность классического решения обратной задачи

Докажем единственность решения задачи (3.1)–(3.4), при условии выполнения (3.5)–(3.8), (3.22), (3.23), (3.63), (3.64).

Пусть $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1^1(t,x)$, $\lambda_2^1(t,x)$ и $u_2(t,x,z)$, $\lambda_1^2(t,x)$, $\lambda_2^2(t,x)$ – два классических решения задачи (3.1)–(3.4), причем тройка функций $u_1(t,x,z)$,

$\lambda_1^1(t,x)$ и $\lambda_1^2(t,x)$ – решение определяемое соотношениями (3.11), (3.12), а тройка $u_2(t,x,z)$, $\lambda_1^2(t,x)$, $\lambda_2^2(t,x)$ – некоторое другое решение задачи (3.1)–(3.4), удовлетворяющее условиям (3.63), (3.64). Тогда справедливы соотношения

$$u_{1t}(t,x,z) = L_x(u_1(t,x,z)) + u_{1zz}(t,x,z) + \lambda_1^1(t,x)M(t,u_1(t,x,z)) + \\ + \lambda_2^1(t,x)f(t,x,z), \quad (3.67)$$

$$u_{2t}(t,x,z) = L_x(u_2(t,x,z)) + u_{2zz}(t,x,z) + \lambda_1^2(t,x)M(t,u_2(t,x,z)) + \\ + \lambda_2^2(t,x)f(t,x,z), \quad (3.68)$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z),\ u_1(t,x,0) = \varphi_1(t,x),\ u_{1z}(t,x,0) = \varphi_2(t,x), \quad (3.69)$$

$$u_2(0,x,z) = u_0(x,z),\ u_2(t,x,0) = \varphi_1(t,x),\ u_{2z}(t,x,0) = \varphi_2(t,x). \quad (3.70)$$

Разность $u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z) = u(t,x,z)$ является решением задачи

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z) + \\ + \lambda_1^2(t,x)\Big(M(t,u_1(t,x,z)) - M(t,u_2(t,x,z)\Big) + \\ + F_1(t,x,z)u_{zz}(t,x,0) + F_2(t,x,z)u_{zzz}(t,x,0), \quad (3.71)$$

$$u(0,x,z) = 0, \quad (3.72)$$

где функции

$$F_1(t,x,z) = \frac{M^{(1)}\big(t,\varphi_1(t,x)\big)\varphi_2(t,x)f(t,x,z) - M\big(t,u_1(t,x,z)\big)f_z(t,x,0)}{M\big(t,\varphi_1(t,x)\big)f_z(t,x,0) - M^{(1)}\big(t,\varphi_1(t,x)\big)\varphi_2(t,x)f(t,x,0)},$$

$$F_2(t,x,z) = \frac{f(t,x,0)M\big(t,u_1(t,x,z)\big) - M\big(t,\varphi_1(t,x)\big)f(t,x,z)}{M\big(t,\varphi_1(t,x)\big)f_z(t,x,0) - M^{(1)}\big(t,\varphi_1(t,x)\big)\varphi_2(t,x)f(t,x,0)},$$

вследствии (3.7), (3.8), (3.22), (3.23), (3.63), (3.64) удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{G_{[0,t^*]}} |\frac{\partial^k}{\partial z^k}F_j| \leqslant C,\ k = 0,1,2,3,\ j = 1,2. \quad (3.73)$$

Используя теорему Лагранжа, перепишем уравнение (3.71) в следующем виде

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z) + F_1(t,x,z)u_{zz}(t,x,0)+$$
$$+ F_2(t,x,z)u_{zzz}(t,x,0) + F_3(t,x,z)u(t,x,z). \quad (3.74)$$

где функция

$$F_3(t,x,z) = \lambda_1^2(t,x)M^{(1)}\Big(t, u_1(t,x,z) - \theta\big(u_2(t,x,z) - u_1(t,x,z)\big)\Big),$$

вследствие (3.7), (3.8), (3.22), (3.23), (3.63), (3.64) удовлетворяют неравенству

$$\sup_{G_{[0,t^*]}} \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}F_3\right| \leqslant C,\ \ k = 0,1,2,3. \quad (3.75)$$

Здесь θ – постоянная, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$g_k(t) = \sup_{G_{[0,t]}} |\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(\xi,x,z)|,\ \ k = 0,1,2,3.$$

Учитывая оценки (3.73), (3.75), в силу принципа максимума для уравнения (3.74) получим

$$|u(\xi,x,z)| \leqslant C_1(g_3(t)+g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t,\ \ (\xi,x,z) \in G_{[0,t]},\ \ 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

откуда следует неравенство

$$g_0(t) \leqslant C_1(g_3(t)+g_2(t)+g_1(t)+g_0(t))t,\ \ 0 \leqslant t \leqslant t^*. \quad (3.76)$$

Дифференцируя (3.74) по переменной z, видим, что $v = u_z$ есть решение задачи

$$v_t(t,x,z) = L_x(v(t,x,z)) + v_{zz}(t,x,z) + F_{1z}(t,x,z)u_{zz}(t,x,0)+$$
$$+ F_{2z}(t,x,z)u_{zzz}(t,x,0) + F_{3z}(t,x,z)u(t,x,z) + F_3(t,x,z)v(t,x,z),$$

$$v|_{t=0} = 0.$$

Учитывая оценки (3.73), (3.75), в силу принципа максимума получим

$$|v(\xi, x, z)| = |u_z(\xi, x, z)| \leqslant C_2(g_3(t) + g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,$$
$$(\xi, x, z) \in G_{[0,t]},\ 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

откуда следует неравенство

$$g_1(t) \leqslant C_2(g_3(t) + g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*. \tag{3.77}$$

Дифференцируя (3.74) дважды по переменной z, видим, что $w = u_{zz}$ есть решение задачи

$$w_t(t, x, z) = L_x(w(t, x, z)) + w_{zz}(t, x, z) + F_{1zz}(t, x, z)u_{zz}(t, x, 0) +$$
$$+ F_{2zz}(t, x, z)u_{zzz}(t, x, 0) + F_{3zz}(t, x, z)u(t, x, z) + F_{3z}(t, x, z)u_z(t, x, z) +$$
$$+ F_3(t, x, z)u_{zz}(t, x, z),$$

$$w|_{t=0} = 0.$$

Учитывая оценки (3.73), (3.75), в силу принципа максимума получим

$$|w(\xi, x, z)| = |u_{zz}(\xi, x, z)| \leqslant C_3(g_3(t) + g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,$$
$$(\xi, x, z) \in G_{[0,t]},\ 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

откуда следует неравенство

$$g_2(t) \leqslant C_3(g_3(t) + g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*. \tag{3.78}$$

Аналогично, дифференцируя (3.74) трижды по переменной z, получим

$$g_3(t) \leqslant C_4(g_3(t) + g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*. \tag{3.79}$$

Сложим неравенства (3.76), (3.77), (3.78), (3.79), получим

$$g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)+g_3(t) \leqslant (C_1+C_2+C_3+C_4)(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)+g_3(t))t,$$
$$0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Отсюда получим, что при $t \in [0,\zeta]$, где $\zeta < 1\big/(C_1+C_2+C_3+C_4)$ выполняется $g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)+g_3(t) = 0$ и, следовательно

$$u(t,x,z) = 0, \text{ при } (t,x,z) \in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя наши рассуждения для $t \in [\zeta, 2\zeta]$, получим, что

$$u(t,x,z) = 0, \ (t,x,z) \in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов докажем, что $u(t,x,z) \equiv 0$ в $G_{[0,t^*]}$.

Учитывая, что $u_1 \equiv u_2$ в $G_{[0,t^*]}$, из (3.67) – (3.70), получим, что для $\lambda_1(t,x) = \lambda_1^1(t,x) - \lambda_1^2(t,x)$ и $\lambda_2(t,x) = \lambda_2^1(t,x) - \lambda_2^2(t,x)$ выполняются соотношения

$$\lambda_1(t,x)M(t,\varphi_1(t,x)) + \lambda_2(t,x)f(t,x,0) = 0,$$

$$\lambda_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2 + \lambda_2(t,x)f_z(t,x,0) = 0.$$

Отсюда, учитывая (3.8), получим, что $\lambda_1(t,x) \equiv 0$, $\lambda_2(t,x) \equiv 0$ в $\Pi_{[0,t^*]}$. Следовательно $\lambda_1^1(t,x) \equiv \lambda_1^2(t,x)$, $\lambda_2^1(t,x) \equiv \lambda_2^2(t,x)$ в $\Pi_{[0,t^*]}$. Справедлива

Теорема 3.5.1. *Решение $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ задачи* (3.1) – (3.8), *удовлетворяющее соотношениям* (3.63), (3.64), *единственно в классе $Z(t^*)$.*

Из теорем 3.4.1, 3.5.1 следует

Теорема 3.5.2. *Пусть выполняются условия* (3.5) – (3.8), (3.22), (3.23). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (3.1)–(3.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (3.63), (3.64).

Замечание. Если рассмотреть уравнение

$$u_t(t,x,z) = L_x(u) + a(t,x)u_{zz} + b(t,x)u_z + \lambda_1(t,x)M(t,u(t,x,z)) + \\ + \lambda_2(t,x)f(t,x,z), \quad (3.80)$$

то при дополнительных условиях на функции $a(t,x)$, $b(t,x)$ для задачи (3.80), (3.2)–(3.4) имеет место результат, указанный теоремами 3.4.1, 3.5.1, 3.5.2.

3.6 Существование и единственность классического решения в случае первой и второй краевых задач

Рассмотрим теперь в области $\Omega_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi\}$ первую краевую задачу для одномерного уравнения

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \lambda_1(t)M(t,u(t,x)) + \lambda_2(t)f(t,x), \quad (3.81)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad (3.82)$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \quad (3.83)$$

Здесь функции $M(t,y)$, $u_0(x)$, $f(t,x)$ действительнозначные и заданы в $[0,T]\times E_1$, E_1 и $[0,T]\times E_1$ соответственно, E_1 - одномерное евклидово пространство.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (3.81)–(3.83), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,a) = \varphi_1(t),\ u_x(t,a) = \varphi_2(t) \quad (3.84)$$

для некоторой фиксированной точки $0 < a < \pi$.

Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(a) = \varphi_1(0), \quad \frac{\partial}{\partial x} u_0(a) = \varphi_2(0). \tag{3.85}$$

Предположим, что функция $M(t, y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$\left| M^{(j)}(t, y) \right| \leqslant M_0(1 + |y|^p), \ j = 0, 1, \ldots, 5, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ y \in E_1. \tag{3.86}$$

Здесь M_0 – постоянная, $p \geq 1$ – целое,

$$M^{(j)}(t, y) = \frac{\partial^j}{\partial y^j} M(t, y), \quad M^{(0)}(t, y) = M(t, y).$$

Пусть при $0 \leqslant t \leqslant T$

$$|\Delta(t)| \geq \delta > 0, \quad \delta - const, \tag{3.87}$$

где

$$\Delta(t) = M(t, \varphi_1(t)) f_x(t, a) - M^{(1)}(t, \varphi_1(t)) \varphi_2(t) f(t, a).$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения) и при $(t, x) \in G^*_{[0,T]} = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$ выполняется

$$|\varphi_i(t)| + \left| \frac{d}{dt} \varphi_i(t) \right| + \left| \frac{d^j}{dx^j} u_0(x) \right| + \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f(t, x) \right| \leqslant C, \ i = 0, 1, \ j = \overline{0, 5}. \tag{3.88}$$

Считаем, что постоянная $C > 1$.

Функции $u_0(x)$ и $f(t, x)$ нечетным образом продолжаются по переменной x на E_1:

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin kx, \ f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx. \tag{3.89}$$

Здесь $\alpha_k - const,\ \beta_k(t) \in C[0,T]$.

Также предполагаем, что при $(t,x) \in G^*_{[0,T]}$ справедливо следующее условие

$$M(t, v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \sin kx \tag{3.90}$$

для любых $v(t,x)$, таких, что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \sin kx.$$

Коэффициенты $M_k(t)$, вообще говоря, зависят от выбора функции $v(t,x)$.

Используя условия переопределения (3.84), найдем выражение неизвестных коэффициентов через решение $u(t,x)$.

$$\lambda_1(t) = \frac{(\varphi_{1t} - u_{xx}|_{x=a}) f_x(t,a) - (\varphi_{2t} - u_{xxx}|_{x=a}) f(t,a)}{M(t,\varphi_1(t)) f_x(t,a) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) f(t,a)},$$

$$\lambda_2(t) = \frac{-(\varphi_{1t} - u_{xx}|_{x=a}) M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 + (\varphi_{2t} - u_{xxx}|_{x=a}) M(t,\varphi_1)}{M(t,\varphi_1(t)) f_x(t,a) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) f(t,a)}.$$

Перепишем выражения для коэффициентов в следующем виде :

$$\lambda_1(t) = A_1(t) + A_2(t) u_{xx}(t,a) + A_3(t) u_{xxx}(t,a),$$

$$\lambda_2(t) = B_1(t) + B_2(t) u_{xx}(t,a) + B_3(t) u_{xxx}(t,a).$$

Здесь

$$A_1(t) = \frac{\frac{d}{dt}\varphi_1(t) f_x(t,a) - \frac{d}{dt}\varphi_2(t) f(t,a)}{\Delta(t)}, \quad A_2(t) = \frac{-f_x(t,a)}{\Delta(t)},$$

$$A_3(t) = \frac{f(t,a)}{\Delta(t)}, \quad B_1(t) = \frac{\frac{d}{dt}\varphi_2(t) M(t,\varphi_1) - \frac{d}{dt}\varphi_1(t) M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{\Delta(t)},$$

$$B_2(t) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{\Delta(t)}, \quad B_3(t) = \frac{-M(t,\varphi_1(t))}{\Delta(t)}$$

– известные функции.

Рассмотрим теперь в $G^*_{[0,T]}$ прямую задачу Коши, которая получается из (3.81), (3.82) заменой функций $u_0(x)$ и $f(t,x)$ на их продолжения нечетным образом на всю числовую ось по x (обозначения продолжений оставим прежними).

$$u_t = u_{xx} + \left[A_1(t) + A_2(t)u_{xx}(t,a) + A_3(t)u_{xxx}(t,a)\right] M(t,u) + \\ + \left[B_1(t) + B_2(t)u_{xx}(t,a) + B_3(t)u_{xxx}(t,a)\right] f(t,x), \quad (3.91)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in E_1. \quad (3.92)$$

Теперь расщепим данную задачу [17, 83] и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t - \frac{\tau}{2})$ на втором дробном шаге.

$$u^\tau_t = 2u^\tau_{xx}(t,x), \quad j\tau < t \leqslant \left(j + \frac{1}{2}\right)\tau, \quad (3.93)$$

$$u^\tau_t = 2R^\tau_1(t)M(t, u^\tau(t - \frac{\tau}{2}, x)) + \\ + 2R^\tau_2(t)f(t,x), \quad \left(j + \frac{1}{2}\right)\tau < t \leqslant (j+1)\,\tau, \quad (3.94)$$

$$u^\tau|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in E_1. \quad (3.95)$$

Здесь $j = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = T$; $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t,x)$,

$$R^\tau_1(t) = A_1(t) + A_2(t)u^\tau_{xx}(t - \frac{\tau}{2}, a) + A_3(t)u^\tau_{xxx}(t - \frac{\tau}{2}, a),$$

$$R^\tau_2(t) = B_1(t) + B_2(t)u^\tau_{xx}(t - \frac{\tau}{2}, a) + B_3(t)u^\tau_{xxx}(t - \frac{\tau}{2}, a).$$

Доказано (см. случай задачи Коши), что для решения расщепленной задачи (3.93)–(3.95) $u^\tau(t,x)$ справедливы следующие равномерные по τ оценки при $(t,x) \in G^*_{[0,t^*]}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right| \leqslant C, \ k = 0, 1, 2, 3,$$

здесь t^* – некоторая постоянная, зависящая от констант a (см.(3.84)), δ (см.(3.87)), M_0 (см.(3.86)) и константы C, ограничивающей начальные данные (см.(3.88)), такая, что $0 < t^* \leqslant T$.

Рассмотрим уравнение (3.93) с начальным условием (3.95). В силу (3.89) решение данного уравнения при $t \in (0, \frac{\tau}{2}]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-2k^2 t} \sin kx, \tag{3.96}$$

и, следовательно, $u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0$ при $t \in (0, \frac{\tau}{2}]$.

Рассмотрим уравнение (3.94) с начальным условием

$$u^\tau(\frac{\tau}{2}, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-k^2 \tau} \sin kx.$$

Проинтегрируем уравнение (3.94) по временной переменной по отрезку $(\frac{\tau}{2}, t]$. В силу (3.90), (3.96) решение на временном отрезке $t \in (\frac{\tau}{2}, \tau]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_k e^{-k^2 \tau} + \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 2R_1^\tau(\theta) M_k(\theta) + 2R_2^\tau(\theta) \beta_k(\theta)\, d\theta \right] \sin kx.$$

Следовательно $u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0$ при $t \in (\frac{\tau}{2}, \tau]$.

Таким образом, $u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0$ при $t \in (0, \tau]$.

Проделывая аналогичные рассуждения на следующем целом временном шаге, получим, что $u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0$ при $t \in (0, 2\tau]$. Через конечное число шагов

$$u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0 \text{ при } t \in (0, t^*]. \tag{3.97}$$

В силу теоремы Арцела о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ последовательности $u^\tau(t,x)$ решений задачи (3.93)–(3.95) сходится вместе с производными по x до третьего порядка включительно к функции $u(t,x) \in C^{0,3}_{t,x}(G^*_{[0,t^*]})$. На основании теоремы 1.6.1 слабой аппроксимации $u(t,x)$ есть решение задачи (3.91), (3.92), причем $u(t,x) \in C^{1,3}_{t,x}(G^*_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,3}_{t,x}(G^*_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,x) \mid f, f_t \in C(G^*_{[0,t^*]}),\ \frac{\partial^k}{\partial x^k} f \in C(G^*_{[0,t^*]}),\ k = \overline{0,3} \right\}.$$

При $(t,x) \in G^*_{[0,t^*]}$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x) \right| \leqslant C,\ \ k = \overline{0,3}.$$

В силу (3.97) для функции $u(t,x)$ выполняется $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ при $t \in (0,t^*]$, и, следовательно, в качестве решения исходной краевой задачи (3.81) – (3.84) можно взять сужение на $\Omega_{[0,t^*]}$ решения задачи Коши для уравнения (3.81) с начальными данными, являющимися указанным в (3.89) продолжением функции $u_0(x)$, и условиями переопределения (3.84).

Единственность решения исходной краевой задачи будет следовать из теоремы единственности 3.5.1, доказанной для решения задачи Коши.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.6.1. *Пусть выполняются условия* (3.85) – (3.90). *Тогда существует решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (3.81)–(3.84) *в классе*

$$\widehat{Z}(t^*) = \left\{ u(t,x),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,3}_{t,x}(\Omega_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0,t^*]) \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$|\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| + \sum_{k=0}^{3} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x) \right| \leqslant C,\ \ (t,x) \in \Omega_{[0,t^*]}, \tag{3.98}$$

Теорема 3.6.2. *Решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (3.81) – (3.87), *для которого справедливо, что функция* $u(t,x)$ *допускает продолжение* *нечетным образом по пространственной переменной на* $G^*_{[0,t^*]}$*, и удовлетворяющее при* $(t,x) \in G^*_{[0,t^*]}$ *соотношению* (3.98)*, единственно в классе* $\widehat{Z}(t^*)$*.*

Из теорем 3.6.1, 3.6.2 следует

Теорема 3.6.3. *Пусть выполняются условия* (3.85) – (3.90)*. Тогда существует и единственно решение* $u(t,x)$*,* $\lambda_1(t)$*,* $\lambda_2(t)$ *задачи* (3.81) – (3.84) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$*, удовлетворяющее соотношению* (3.98)*.*

Замечание. В случае второй краевой задачи (3.81), (3.82), (3.99), где

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \tag{3.99}$$

при выполнении условий

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx, \;\; f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \cos kx,$$

где $\alpha_k - const, \;\; \beta_k(t) \in C[0,T]$,

$$M(t,v) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \cos kx,$$

для таких функций, что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \cos kx,$$

справедливы аналогичные теоремы.

Глава 4. О задаче идентификации коэффициентов при нелинейном члене и функции источника в полулинейном параболическом уравнении с условиями переопределения, заданными на кривой

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n, z \in E_1\}$ задачу Коши

$$u_t(t, x, z) = L_x(u) + u_{zz} + \lambda_1(t)M(t, u(t, x, z)) + \lambda_2(t)f(t, x, z), \tag{4.1}$$

$$u(0, x, z) = u_0(x, z). \tag{4.2}$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_k x_k}, \text{ где } c_k(t) \in C\left[0, T\right],$$

функции $M(t, y)$, $u_0(x, z)$, $f(t, x, z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t, x, z)$ задачи (4.1)–(4.2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t, a(t), b(t)) = \varphi_1(t), \tag{4.3}$$

$$u_z(t, a(t), b(t)) = \varphi_2(t), \tag{4.4}$$

где $a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t))$, и условиям согласования

$$u_0(a(0), b(0)) = \varphi_1(0), \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(a(0), b(0)) = \varphi_2(0). \tag{4.6}$$

Относительно функции $M(t,y)$ также предполагаем, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение.

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\ldots,9,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y\in E_1. \quad (4.7)$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть при всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\left|M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))\right| \geq \delta > 0. \quad (4.8)$$

Здесь δ – постоянная.

Приведем задачу (4.1)–(4.4) к некоторой вспомогательной задаче. Положим $x=a(t)$, $z=b(t)$ в (4.1), получим

$$u_t(t,a(t),b(t)) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_kx_k}(t,a(t),b(t)) + u_{zz}(t,a(t),b(t)) +$$
$$+ \lambda_1(t)M(t,\varphi_1) + \lambda_2(t)f(t,a(t),b(t)).$$

Из (4.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,a(t),b(t)) = u_t(t,a(t),b(t)) + \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t) +$$
$$+ u_z(t,a(t),b(t))b'(t) = u_t(t,a(t),b(t)) + \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t) +$$
$$+ \varphi_2(t)b'(t) = \varphi_1'(t),$$

$$u_t(t,a(t),b(t)) = \varphi_1'(t) - \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t) - \varphi_2(t)b'(t),$$

$$\varphi_1'(t) - \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(t, a(t), b(t))a_k'(t) - \varphi_2(t)b'(t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_k x_k}(t, a(t), b(t)) + u_{zz}(t, a(t), b(t)) + \lambda_1(t)M(t, \varphi_1) +$$
$$+ \lambda_2(t)f(t, a(t), b(t)). \quad (4.9)$$

Продифференцируем (4.1) по z, положим $x = a(t)$, $z = b(t)$, учитывая (4.3)–(4.4), получим

$$u_{tz}(t, a(t), b(t)) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_k x_k z}(t, a(t), b(t)) +$$
$$+ u_{zzz}(t, a(t), b(t)) + \lambda_1(t)M^{(1)}(t, \varphi_1)\varphi_2 + \lambda_2(t, x)f_z(t, a(t), b(t)),$$

Из (4.4) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}u_z(t, a(t), b(t)) = u_{tz}(t, a(t), b(t)) + \sum_{k=1}^{n} u_{x_k z}(t, a(t), b(t))a_k'(t) +$$
$$+ u_{zz}(t, a(t), b(t))b'(t) = \varphi_2'(t),$$

$$u_{tz}(t, a(t), b(t)) = \varphi_2'(t) - \sum_{k=1}^{n} u_{x_k z}(t, a(t), b(t))a_k'(t) - u_{zz}(t, a(t), b(t))b'(t),$$

$$\varphi_2'(t) - \sum_{k=1}^{n} u_{x_k z}(t, a(t), b(t))a_k'(t) - u_{zz}(t, a(t), b(t))b'(t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_k x_k z}(t, a(t), b(t)) + u_{zzz}(t, a(t), b(t)) +$$
$$+ \lambda_1(t)M^{(1)}(t, \varphi_1(t))\varphi_2(t) + \lambda_2(t)f_z(t, a(t), b(t)), \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) находим

$$\lambda_1(t) = \frac{\left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))\right] f_z(t,a(t),b(t))}{D(t)} -$$
$$- \frac{\left[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)\right]}{D(t)} \times$$
$$\times f(t,a(t),b(t)), \quad (4.11)$$

$$\lambda_2(t) = \frac{\left[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)\right]}{D(t)} \times$$
$$\times M(t,\varphi_1(t)) - \frac{\left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))\right]}{D(t)} \times$$
$$\times M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t), \quad (4.12)$$

здесь

$$K_1(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_{x_k x_k}(t,a(t),b(t)) + u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t),$$
$$K_2(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_{x_k x_k z}(t,a(t),b(t)) + u_{x_k z}(t,a(t),b(t))a_k'(t),$$
$$D(t) = M(t,\varphi_1(t)) f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) f(t,a(t),b(t)).$$

Перепишем $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ для удобства изложения в следующем виде:

$$\lambda_1(t) = A_1(t) + A_2(t)K_1(t) + A_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right] +$$
$$+ A_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t)),$$

$$\lambda_2(t) = B_1(t) + B_2(t)K_1(t) + B_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right] +$$
$$+ B_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t)).$$

Здесь

$$A_1(t) = \frac{\left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t)\right] f_z(t,a(t),b(t)) - \varphi_2'(t) f(t,a(t),b(t))}{D(t)},$$

$$A_2(t)=\frac{-f_z(t,a(t),b(t))}{D(t)},\ A_3(t)=\frac{f(t,a(t),b(t))}{D(t)},$$
$$A_4(t)=\frac{b'(t)f(t,a(t),b(t))-f_z(t,a(t),b(t))}{D(t)},$$
$$B_1(t)=\frac{\varphi_2'(t)M(t,\varphi_1(t))-\left[\varphi_1'(t)-\varphi_2(t)b'(t)\right]M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)},$$
$$B_2(t)=\frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)},\ B_3(t)=\frac{-M(t,\varphi_1(t))}{D(t)},$$
$$B_4(t)=\frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)-b'(t)M(t,\varphi_1(t))}{D(t)}$$

– известные, непрерывные, достаточно гладкие функции.

Учитывая выражения для коэффициентов $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, приходим к следующей прямой задаче

$$\begin{gathered}u_t=L_x(u)+u_{zz}+\Big(A_1(t)+A_2(t)K_1(t)+\\ +A_3(t)\left[K_2(t)+u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right]+A_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t))\Big)M(t,u)+\\ +\Big(B_1(t)+B_2(t)K_1(t)+B_3(t)\left[K_2(t)+u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right]+\\ +B_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t))\Big)f(t,x,z),\end{gathered}\tag{4.13}$$

$$u(0,x,z)=u_0(x,z).\tag{4.14}$$

Ниже докажем классическую однозначную разрешимость задачи (4.13), (4.14).

4.2 Разрешимость прямой задачи

Для доказательства существования решения прямой задачи применим метод слабой аппроксимации [17, 83]. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t-\frac{\tau}{2})$ на втором дробном шаге в нелинейных членах.

$$u_t^\tau = 2L_x(u^\tau(t,x,z)) + 2u_{zz}^\tau(t,x,z), \quad j\tau < t \leqslant \left(j+\frac{1}{2}\right)\tau, \tag{4.15}$$

$$u_t^\tau = 2R_1^\tau(t)M(t, u^\tau(t-\frac{\tau}{2}, x, z)) + 2R_2^\tau(t)f(t,x,z),$$
$$\left(j+\frac{1}{2}\right) < t \leqslant (j+1)\,\tau, \tag{4.16}$$

$$u^\tau|_{t=0} = u_0(x,z), \quad x \in E_n,\ z \in E_1. \tag{4.17}$$

Здесь $j = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = T$; $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t,x,z)$,

$$R_1^\tau(t) = A_1(t) + A_2(t)\Big(\sum_{k=1}^n c_k(t) u_{x_k x_k}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)) +$$
$$+ u_{x_k}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)) a_k'(t)\Big) + A_3(t)\Big(\sum_{k=1}^n c_k(t) u_{x_k x_k z}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)) +$$
$$+ u_{x_k z}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)) a_k'(t) + u_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t))\Big) +$$
$$+ A_4(t) u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)), \tag{4.18}$$

$$R_2^\tau(t) = B_1(t) + B_2(t)\Big(\sum_{k=1}^n c_k(t) u_{x_k x_k}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)) +$$
$$+ u_{x_k}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)) a_k'(t)\Big) + B_3(t)\Big(\sum_{k=1}^n c_k(t) u_{x_k x_k z}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)) +$$
$$+ u_{x_k z}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)) a_k'(t) + u_{zzz}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t))\Big) +$$
$$+ B_4(t) u_{zz}^\tau(t-\frac{\tau}{2}, a(t), b(t)), \tag{4.19}$$

Введем следующие обозначения :

$$U^\tau(t) = \sum_{m=0}^{5}\left(U_{0,m}^\tau(t) + \sum_{l=1}^{4}\sum_{k=1}^{n} U_{l,m,k}^\tau(t)\right), \tag{4.20}$$

$$U_{l,m,k}^\tau(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t}\ \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u^\tau(\xi,x,z)\right|, \tag{4.21}$$

$$U_{l,m,k}(0) = \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^l}{\partial x_k^l} \frac{\partial^m}{\partial z^m} u_0(x,z) \right|,$$

$$U^\tau_{0,m}(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t} \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} u^\tau(\xi,x,z) \right|, \tag{4.22}$$

$$U_{0,m}(0) = \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} u_0(x,z) \right|.$$

Функции $U^\tau(t)$, $U^\tau_{0,m}(t)$, $U^\tau_{l,m,k}(t)$ являются неубывающими на каждом интервале $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения) и

$$|a'(t)| + |b'(t)| + |\varphi_1'(t)| + |\varphi_2'(t)| \leqslant C, \tag{4.23}$$

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha u_0(x,z) \right| + \left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha f(t,x,z) \right| \leqslant C,\ |\alpha| \leqslant 4,\ m = 0,1,\ldots,5, \tag{4.24}$$

$(t,x,z) \in G_{[0,T]}$, C – постоянная больше единицы.

Докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\{u^\tau(t,x,z)\}$ задачи (4.15)–(4.17) в классе непрерывных функций.

Назовем n-м временным шагом полуинтервал $(n\tau, (n+1)\tau]$, где $n = 0,1,\ldots,N-1$.

Рассмотрим нулевой шаг ($n = 0$).

На первом дробном шаге для решения u^τ задачи

$$u^\tau_t = 2L_x(u^\tau(t,x,z)) + 2u^\tau_{zz}(t,x,z), \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2},$$

$$u^\tau(0,x,z) = u_0(x,z),$$

в силу принципа максимума получаем

$$|u^\tau(\xi,x,z)| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u_0(x,z)|,\ 0 < \xi \leqslant \frac{\tau}{2}. \tag{4.25}$$

Аналогично, дифференцируя уравнения (4.15),(4.17) по x_k, z соответствующее количество раз, в силу принципа максимума, для решения задачи

$$\frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u_t^\tau = 2L_x(\frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u^\tau(t,x,z))+2\frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u_{zz}^\tau(t,x,z), \quad 0<t\leqslant\frac{\tau}{2},$$

$$\frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u^\tau(0,x,z) = \frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u_0(x,z),$$

получим оценки

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u^\tau(\xi,x,z)\right| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}\left|\frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}u_0(x,z)\right|, \ 0<\xi\leqslant\frac{\tau}{2}. \tag{4.26}$$

Здесь где $l=\overline{0,4},\ m=\overline{0,5},\ k=\overline{1,n}.$

Возьмем от левых частей неравенств (4.25), (4.26) сначала $\sup\limits_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}$, а затем $\sup\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t}$, и сложим полученные неравенства. Получим

$$U^\tau(t)\leqslant U(0),\ 0<t\leqslant\frac{\tau}{2}. \tag{4.27}$$

На втором дробном шаге, интегрируя по t в пределах от $\frac{\tau}{2}$ до t уравнение

$$u_t^\tau(t,x,z) = 2R_1^\tau(t)M(t,u^\tau(t-\frac{\tau}{2})) + 2R_2^\tau(t)f(t,x,z), \quad \frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau,$$

получим равенство

$$u^\tau(t) = u^\tau(\frac{\tau}{2}) + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} R_1^\tau(\eta)M(\eta,u^\tau(\eta-\frac{\tau}{2}))\,d\eta + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} R_2^\tau(\eta)f(\eta,x,z)\,d\eta.$$

Из последнего соотношения следует неравенство

$$
\begin{aligned}
&|u^\tau(t,x,z)| \leqslant |u^\tau(\frac{\tau}{2})| + 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \Bigg\{ |M(\eta, u^\tau(\eta - \frac{\tau}{2}))| \times \\
&\times \Bigg[|A_1| + |A_2| \Bigg(\sum_{k=1}^{n} |c_k(\eta)| |u^\tau_{x_k x_k}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + \\
&+ |u^\tau_{x_k}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| |a'_k(\eta)| \Bigg) + \\
&+ |A_3| \Bigg(\sum_{k=1}^{n} |c_k(\eta)| |u^\tau_{x_k x_k z}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + \\
&+ |u^\tau_{x_k z}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| |a'_k(\eta)| + |u^\tau_{zzz}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| \Bigg) + \\
&+ |A_4| |u^\tau_{zz}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| \Bigg] \Bigg\} \, d\eta + \\
&+ 2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \Bigg\{ |f(\eta))| \Bigg[|B_1| + |B_2| \Bigg(\sum_{k=1}^{n} |c_k(\eta)| |u^\tau_{x_k x_k}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + \\
&+ |u^\tau_{x_k}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| |a'_k(\eta)| \Bigg) + \\
&+ |B_3| \Bigg(\sum_{k=1}^{n} |c_k(\eta)| |u^\tau_{x_k x_k z}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + \\
&+ |u^\tau_{x_k z}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| |a'_k(\eta)| + |u^\tau_{zzz}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| \Bigg) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + |B_4| |u^\tau_{zz}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| \Bigg] \Bigg\} \, d\eta
\end{aligned}
$$

Поскольку данное неравенство выполняется при всех x, z, заменим функции в интегральных членах на их точные верхние границы по $x \in E_n$, $z \in E_1$, затем заменим функцию $|u^\tau|$, стоящую в левой части неравенства на $\sup\limits_{\substack{x \in E_n, \\ z \in E_1}} |u^\tau|$. Учитывая, что $|M(t,y)| \leqslant C(1 + |y|^p)$ (см.(4.7)), получим

$$\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau| \leqslant \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau(\frac{\tau}{2})| + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \Bigg\{ (1 + \big(\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} |u^\tau(\eta - \frac{\tau}{2})|)^p\big) \times$$

$$\times \Bigg(1 + \sum_{k=1}^{n} |u^\tau_{x_k x_k}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + |u^\tau_{x_k}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} |u^\tau_{x_k x_k z}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + |u^\tau_{x_k z}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| +$$

$$+ |u^\tau_{zzz}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + |u^\tau_{zz}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))|\Bigg)\Bigg\} d\eta +$$

$$+ C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \Bigg\{ 1 + \sum_{k=1}^{n} |u^\tau_{x_k x_k}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + |u^\tau_{x_k}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} |u^\tau_{x_k x_k z}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta)) + |u^\tau_{x_k z}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| +$$

$$+ |u^\tau_{zzz}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| + |u^\tau_{zz}(\eta - \frac{\tau}{2}, a(\eta), b(\eta))| \Bigg\} d\eta$$

Здесь и далее через С обозначены (вообще говоря различные) постоянные больше единицы, зависящие от δ, постоянных C из (4.23), (4.24), ограничивающих входные данные, постоянной M_0 из (4.8) и не зависящие от τ. Ниже для удобства мы считаем, что $C \geq 1$.

Отсюда, учитывая монотонность по t функций $U^\tau_{l,m,k}$ (см. (4.22)), получим

$$U_{0,0}^{\tau}(t) \leqslant U_{0,0}^{\tau}(\frac{\tau}{2}) + C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left\{ (1 + (U_{0,0}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}))^p) \left(1 + \sum_{k=1}^{n} U_{2,0,k}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + \right.\right.$$
$$+ U_{1,0,k}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + \sum_{k=1}^{n} U_{2,1,k}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + U_{1,1,k}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + U_{0,3}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) +$$
$$\left.\left. + U_{0,2}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) \right) \right\} d\eta. \quad (4.28)$$

Дифференцируя на нулевом шаге (4.16) по x_k и z соответствующее количество раз, и проделывая на втором дробном шаге аналогичные рассуждения для уравнения

$$\frac{\partial^l}{\partial x_k^l} \frac{\partial^m}{\partial z^m} u_t^{\tau} = 2R_1^{\tau}(t) H_{l,m}(t - \frac{\tau}{2}, x, z) + 2R_2^{\tau}(t) \frac{\partial^l}{\partial x_k^l} \frac{\partial^m}{\partial z^m} f(t, x, z),$$
$$\left(n + \frac{1}{2} \right) < t \leqslant (n+1)\,\tau, \; l = \overline{0,4}, \; m = \overline{0,5}, \; k = \overline{1,n},$$

получим следующие неравенства

$$U_{0,m}^{\tau}(t) \leqslant U_{0,m}^{\tau}(\frac{\tau}{2}) + C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left\{ \sup_{\substack{x \in E_n, \\ z \in E_1}} |H_{0,m}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}, x, z)| \times \right.$$
$$\times \left(1 + \sum_{k=1}^{n} U_{2,0,k}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + U_{1,0,k}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + \sum_{k=1}^{n} U_{2,1,k}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + \right.$$
$$\left.\left. + U_{1,1,k}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + U_{0,3}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) + U_{0,2}^{\tau}(\eta - \frac{\tau}{2}) \right) \right\} d\eta, \quad (4.29)$$

$$U^\tau_{l,m,k}(t) \leqslant U^\tau_{l,m,k}(\frac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Bigg\{\sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}}|H^\tau_{l,m,k}(\eta-\frac{\tau}{2},x,z)|\times$$
$$\times\left(1+\sum_{k=1}^{n}U^\tau_{2,0,k}(\eta-\frac{\tau}{2})+U^\tau_{1,0,k}(\eta-\frac{\tau}{2})+\sum_{k=1}^{n}U^\tau_{2,1,k}(\eta-\frac{\tau}{2})+\right.$$
$$\left.+U^\tau_{1,1,k}(\eta-\frac{\tau}{2})+U^\tau_{0,3}(\eta-\frac{\tau}{2})+U^\tau_{0,2}(\eta-\frac{\tau}{2})\right)\Bigg\}\,d\eta. \quad (4.30)$$

Здесь функции

$$H^\tau_{0,m}(t,x,z) = \frac{\partial^m}{\partial z^m}M(t,u^\tau(t,x,z)),$$
$$H^\tau_{l,m,k}(t,x,z) = \frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m}M(t,u^\tau(t,x,z))$$

могут быть без труда вычислены, например,

$$H^\tau_{0,1}(t,x,z) = M^{(1)}(t,u^\tau)u^\tau_z, \quad (4.31)$$

$$H^\tau_{0,2}(t,x,z) = M^{(2)}(t,u^\tau)(u^\tau_z)^2 + M^{(1)}(t,u^\tau)u^\tau_{zz}, \quad (4.32)$$

$$H^\tau_{0,3}(t,x,z) = M^{(3)}(t,u^\tau)(u^\tau_z)^3 + 3M^{(2)}(t,u^\tau)u^\tau_z u^\tau_{zz} +$$
$$+ M^{(1)}(t,u^\tau)u^\tau_{zzz}, \quad (4.33)$$

$$H^\tau_{0,4}(t,x,z) = M^{(4)}(t,u^\tau)(u^\tau_z)^4 + 6M^{(3)}(t,u^\tau)(u^\tau_z)^2u^\tau_{zz} +$$
$$+ 4M^{(2)}(t,u^\tau)u^\tau_z u^\tau_{zzz} + 3M^{(2)}(t,u^\tau)(u^\tau_{zz})^2 + M^{(1)}(t,u^\tau)\frac{\partial^4}{\partial z^4}u^\tau, \quad (4.34)$$

$$H^\tau_{0,5}(t,x,z) = M^{(5)}(t,u^\tau)(u^\tau_z)^5 + 10M^{(4)}(t,u^\tau)(u^\tau_z)^3u^\tau_{zz} +$$
$$+ 15M^{(3)}(t,u^\tau)u^\tau_z(u^\tau_{zz})^2 + 10M^{(3)}(t,u^\tau)(u^\tau_z)^2u^\tau_{zzz} + 10M^{(2)}(t,u^\tau)u^\tau_{zz}u^\tau_{zzz} +$$
$$+ 5M^{(2)}(t,u^\tau)u^\tau_z\frac{\partial^4}{\partial z^4}u^\tau + M^{(1)}(t,u^\tau)\frac{\partial^5}{\partial z^5}u^\tau, \quad (4.35)$$

$$H^\tau_{1,1,k}(t,x,z) = M^{(2)}(t,u^\tau)u^\tau_z u^\tau_{x_k} + M^{(1)}(t,u^\tau)u^\tau_{x_k z}, \quad (4.36)$$

и т.д.

Учитывая обозначения (4.20), (4.22), и условие (4.7), из (4.31)–(4.36) следует, что для функций $H^{\tau}_{0,m}$ и $H^{\tau}_{l,m,k}$ справедливы оценки:

$$|H^{\tau}_{0,m}(t,x,z)| \leqslant C\big(1+(U^{\tau}(t))^{p+m}\big),\ |H^{\tau}_{l,m,k}(t,x,z)| \leqslant C\big(1+(U^{\tau}(t))^{p+l+m}\big),$$
$$\text{при } x \in E_n,\ z \in E_1,\ l = 1,\dots,4,\ ,m = 1,\dots,5,\ k = 1,\dots,n. \quad (4.37)$$

Из (4.28), (4.29), (4.30), учитывая (4.37), получим

$$U^{\tau}(t) \leqslant U^{\tau}(\frac{\tau}{2}) + \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} P_{p+10}(U^{\tau}(\eta))\, d\eta, \quad (4.38)$$

где $P_{p+10}(\zeta) = C(\zeta^{p+10} + \zeta^{p+9} + \dots + \zeta + 1)$ – полином порядка $p + 10$, p - постоянная из (4.7), $C \geq 1$ - константа, не зависящая от τ.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = P_{p+10}(\omega(t)), \quad \omega(0) = U^{\tau}(0).$$

По теореме Коши [53] существует решение $\omega \in C[0,t^*]$ данной задачи на отрезке $[0,t^*]$, где t^* зависит от C и начальных данных $U(0)$. Очевидно, что $\omega(t)$ - строго возрастающая функция. Отметим тот факт, что если для некоторого $t_0 \in (0,t^*)$ справедливо $U^{\tau}(t_0) \leqslant \omega(t_0)$, то выполняется неравенство $U^{\tau}(t) \leqslant \omega(t)$ при $t \in [t_0,t^*]$ (см. лемму 2.3.1).

Так как

$$U^{\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right) \leqslant U^{\tau}(0) = \omega(0) \leqslant \omega\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

то из (4.38) получаем

$$U^{\tau}(t) \leqslant \omega(t),\ \text{при } \frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau. \quad (4.39)$$

Из (4.27), (4.39) следует

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(\tau), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Рассуждая аналогично на первом временном отрезке, получим, что

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(2\tau), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 2\tau,$$

и так далее. Через конечное число шагов получим равномерную по τ оценку

$$U^\tau(t) \leqslant \omega(t^*), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

и, следовательно, учитывая обозначения (4.20) – (4.22), справедливы равномерные по τ при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u^\tau\right| \leqslant C, \text{ при } |\alpha| = 0,1,\ldots,4, \; k = 0,1,\ldots,5, \tag{4.40}$$

Используя оценку (4.40) и уравнения (4.15), (4.16), получим равномерно по τ

$$|u_t^\tau(t,x,z)| \leqslant C, \; (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

Продифференцируем уравнения (4.15), (4.16) один раз по z. В силу оценок (4.40) правая часть получившихся уравнений будет ограничена равномерно по τ, а значит и левая часть будет также ограничена равномерно по τ

$$|u_{tz}^\tau(t,x,z)| \leqslant C, \; (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

При помощи соответствующего дифференцирования, по аналогии получим равномерно по τ следующие оценки при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} u^\tau(t,x,z)\right| \leqslant C, \text{ где } m = 0,1,2,3, \; |\alpha| \leqslant 2.$$

В силу теоремы Арцела [49] о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (4.15)–(4.17) сходится вместе с производными по x_k до второго и z до третьего порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$. По теореме метода слабой аппроксимации 1.6.1 данная функция является решением задачи (4.13), (4.14), причем $u(t,x,z) \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \Big\{ f(t,x,z) \mid f, f_t \in C(G_{[0,t^*]}),\ D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} f \in C(G_{[0,t^*]}), \\ m = 0,1,2,3,\ |\alpha| \leqslant 2 \Big\}. \quad (4.41)$$

4.3 Существование классического решения обратной задачи

Докажем, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ (см. (4.11), (4.12)), является классическим решением задачи (4.1)–(4.4).

Используя все доказанные оценки, получим, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ принадлежит классу

$$Z(t^*) = \Big\{ u(t,x,z),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0,t^*]) \Big\},$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2} \sum_{k=0}^{3} \left| D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} u(t,x,z) \right| \leqslant C,\ \ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \quad (4.42)$$

$$|\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| \leqslant C,\ \ t \in G_{[0,t^*]}. \quad (4.43)$$

Докажем выполнение условий переопределения (4.3), (4.4).

Положим $x = a(t)$, $z = a(t)$ в уравнении (4.1), где $\lambda_1(t,x)$ и $\lambda_2(t,x)$ вычисляются по формулам (4.11), (4.12), сделав соответствующие преобразования, получим

$$
\begin{aligned}
&u_t(t,a(t),b(t)) = L_x(u(t,a(t),b(t))) + u_{zz}(t,a(t),b(t)) + \\
&+ \frac{[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))]}{M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))} \times \\
&\times f_z(t,a(t),b(t))M(t,u(t,a(t),b(t))) - \\
&- \frac{[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))]}{M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))} \times \\
&\times M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t)) + \\
&+ \frac{[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)]}{D(t)} \times \\
&\times M(t,\varphi_1(t))f(t,a(t),b(t)) - \\
&- \frac{[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)]}{D(t)} \times \\
&\qquad\qquad\qquad \times f(t,a(t),b(t))M(t,u(t,a(t),b(t))),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_t(t,a(t),b(t)) = L_x(u(t,a(t),b(t))) + u_{zz}(t,a(t),b(t)) + \\
&+ \frac{[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))]\, f_z(t,a(t),b(t))}{M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))} \times \\
&\times [M(t,u(t,a(t),b(t))) \pm M(t,\varphi_1(t))] - \\
&- \frac{[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))]}{M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))} \times \\
&\times M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t)) + \\
&+ \frac{[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)]}{D(t)} \times \\
&\times M(t,\varphi_1(t))f(t,a(t),b(t)) - \\
&- \frac{[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)]}{D(t)} \times \\
&\qquad\qquad\qquad \times f(t,a(t),b(t))M(t,u(t,a(t),b(t))),
\end{aligned}
$$

$$u_t(t,a(t),b(t))+\sum_{k=1}^{n}u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t)-\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)b'(t)=$$
$$=\lambda_1(t)\left[M(t,u(t,a(t),b(t)))-M(t,\varphi_1(t))\right].$$

Обозначим $\chi_1(t)=u(t,a(t),b(t))-\varphi_1(t)$, $\chi_2(t)=u_z(t,a(t),b(t))-\varphi_2(t)$. Из последнего равенства, используя теорему Лагранжа в правой части, получим

$$\frac{d}{dt}\chi_1(t)=\Omega_1(t)\chi_1(t)+\Omega_2(t)\chi_2(t), \tag{4.44}$$

где

$$\Omega_1(t)=\lambda_1(t)M^{(1)}\Big(t,u(t,a(t),b(t))-\theta[\varphi_1(t)-u(t,a(t),b(t))]\Big),\ \Omega_2(t)=b'(t)$$

– ограниченные при $t\in[0,t^*]$ в силу (4.7), (4.8), (4.23), (4.24), (4.42) функции. θ - постоянная, $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

Продифференцируем уравнение (4.1) по z и положим $x=a(t)$, $z=b(t)$, также, сделав соответствующие преобразования, получим

$$\begin{aligned}
&u_{tz}(t,a(t),b(t))=L_x(u_z(t,a(t),b(t)))+u_{zzz}(t,a(t),b(t))+\\
&+\frac{[\varphi_2'(t)-K_2(t)-u_{zzz}(t,a(t),b(t))-u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)]}{M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t))-M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f_z(t,a(t),b(t))}\times\\
&\times M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t))-\\
&-\frac{[\varphi_2'(t)-K_2(t)-u_{zzz}(t,a(t),b(t))-u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)]}{M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t))-M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))}\times\\
&\times f(t,a(t),b(t))M^{(1)}(t,u(t,a(t),b(t)))u_z(t,a(t),b(t))+\\
&+\frac{[\varphi_1'(t)-\varphi_2(t)b'(t)-K_1(t)-u_{zz}(t,a(t),b(t))]}{D(t)}\times\\
&\times f_z(t,a(t),b(t))M^{(1)}(t,u(t,a(t),b(t)))u_z(t,a(t),b(t))-\\
&-\frac{[\varphi_1'(t)-\varphi_2(t)b'(t)-K_1(t)-u_{zz}(t,a(t),b(t))]}{D(t)}\times\\
&\qquad\qquad\times M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f_z(t,a(t),b(t)),
\end{aligned}$$

$$u_{tz}(t,a(t),b(t)) = L_x(u_z(t,a(t),b(t))) + u_{zzz}(t,a(t),b(t)) +$$
$$+ \frac{[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)]}{M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f_z(t,a(t),b(t))} \times$$
$$\times M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) -$$
$$- \frac{[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)]}{M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))} \times$$
$$\times f(t,a(t),b(t)) \Big[M^{(1)}(t,u(t,a(t),b(t)))u_z(t,a(t),b(t)) \pm$$
$$\pm M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) \Big] + \frac{[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))]}{D(t)} \times$$
$$\times f_z(t,a(t),b(t))M^{(1)}(t,u(t,a(t),b(t)))u_z(t,a(t),b(t)) -$$
$$- \frac{[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))]}{D(t)} \times$$
$$\times M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f_z(t,a(t),b(t)),$$

$$u_{tz}(t,a(t),b(t)) + \sum_{k=1}^{n} u_{x_k z}(t,a(t),b(t))a'(t) + u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t) - \varphi_2'(t) =$$
$$= \lambda_1(t) \Big[M^{(1)}(t,u(t,a(t),b(t)))u_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) \Big].$$

$$u_{tz}(t,a(t),b(t)) + \sum_{k=1}^{n} u_{x_k z}(t,a(t),b(t))a'(t) + u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t) - \varphi_2'(t) =$$
$$= \lambda_1(t) \Big[M^{(1)}(t,u(t,a(t),b(t)))u_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) \pm$$
$$\pm M^{(1)}(t,\varphi_1(t))u_z(t,a(t),b(t)) \Big].$$

$$\frac{d}{dt}\chi_2(t) = \Omega_3(t)\chi_1(t) + \Omega_4(t)\chi_2(t), \tag{4.45}$$

где

$$\Omega_3(t) = \lambda_1(t)M^{(2)}\Big(t, u(t,a(t),b(t)) - \theta[\varphi_1(t) - u(t,a(t),b(t))]\Big) \times$$
$$\times u_z(t,a(t),b(t)),$$

$$\Omega_4(t) = M^{(1)}(t, \varphi_1(t))$$

– ограниченные при $t \in [0, t^*]$ в силу (4.7), (4.8), (4.23), (4.24), (4.42) функции. θ - постоянная, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Из условий согласования (4.5), (4.6) следует, что

$$\chi_1(0) = \chi_2(0) = 0.$$

Отсюда для уравнений (4.44), (4.45), по теореме единственности решения для систем ОДУ первого порядка [53], следует, что $\chi_1(t) = \chi_2(t) = 0$, при $t \in [0, t^*]$, а значит выполняются условия (4.3), (4.4). Справедлива

Теорема 4.3.1. *Пусть выполняются условия* (4.5)–(4.8), (4.23), (4.24). *Тогда существует решение* $u(t, x, z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.1)–(4.4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (4.42), (4.43).

4.4 Единственность классического решения обратной задачи

Докажем единственность решения задачи (4.1)–(4.4), при условии выполнения (4.5)–(4.8), (4.23), (4.24), (4.42), (4.43).

Пусть $u_1(t, x, z)$, $\lambda_1^1(t)$, $\lambda_2^1(t)$ и $u_2(t, x, z)$, $\lambda_1^2(t)$, $\lambda_2^2(t)$ – два классических решения задачи (4.1)–(4.4), причем тройка функций $u_1(t, x, z)$, $\lambda_1^1(t)$ и $\lambda_1^2(t)$ – решение определяемое соотношениями (4.11), (4.12), а тройка $u_2(t, x, z)$, $\lambda_1^2(t)$, $\lambda_2^2(t)$ – некоторое другое решение задачи (4.1)–(4.4), удовлетворяющее условиям (4.42), (4.43). Тогда справедливы соотношения

$$u_{1t}(t, x, z) = L_x(u_1(t, x, z)) + u_{1zz}(t, x, z) + \lambda_1^1(t) M(t, u_1(t, x, z)) + \\ + \lambda_2^1(t) f(t, x, z), \quad (4.46)$$

$$u_{2t}(t, x, z) = L_x(u_2(t, x, z)) + u_{2zz}(t, x, z) + \lambda_1^2(t) M(t, u_2(t, x, z)) + \\ + \lambda_2^2(t) f(t, x, z), \quad (4.47)$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{4.48}$$

$$u_1(t,a(t),b(t)) = \varphi_1(t), \tag{4.49}$$

$$u_{1z}(t,a(t),b(t)) = \varphi_2(t), \tag{4.50}$$

$$u_2(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{4.51}$$

$$u_2(t,a(t),b(t)) = \varphi_1(t), \tag{4.52}$$

$$u_{2z}(t,a(t),b(t)) = \varphi_2(t). \tag{4.53}$$

Разность $u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z) = u(t,x,z)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z) + \\ + \lambda_1^2(t,x)\Big(M(t,u_1(t,x,z)) - M(t,u_2(t,x,z)\Big) + \\ + F_1(t,x,z)K_1(t) + F_2(t,x,z)\Big(K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\Big) + \\ + F_3(t,x,z)u_{zz}(t,a(t),b(t)), \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$u(0,x,z) = 0, \tag{4.55}$$

где функции

$$F_1(t,x,z) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,x,z) - f_z(t,a(t),b(t))M(t,u_1(t,x,z))}{D(t)},$$

$$F_2(t,x,z) = \frac{f(t,a(t),b(t))M(t,u_1(t,x,z)) - M(t,\varphi_1(t))f(t,x,z)}{D(t)},$$

$$F_3(t,x,z) = \frac{\Big(b'(t)f(t,a(t),b(t)) - f_z(t,a(t),b(t))\Big)M(t,u_1(t,x,z))}{D(t)} + \\ + \frac{\Big(M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) - b'(t)M(t,\varphi_1(t))\Big)f(t,x,z)}{D(t)}$$

вследствии (4.7), (4.8), (4.23), (4.24), (4.42), (4.43) удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{G_{[0,t^*]}} \left| D_x^{|\alpha|} \frac{\partial^m}{\partial z^m} F_j(t,x,z) \right| \leqslant C, \ m = 0,1,2,3, \ |\alpha| \leqslant 2, \ j = 1,2,3. \tag{4.56}$$

Используя теорему Лагранжа, перепишем уравнение (4.54) в следующем виде

$$u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z) +$$
$$+ F_1(t,x,z)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_kx_k}(t,a(t),b(t)) + u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t)\right) +$$
$$+ F_2(t,x,z)\left(\sum_{k=1}^{n} (c_k(t)u_{x_kx_kz}(t,a(t),b(t)) + u_{x_kz}(t,a(t),b(t))a_k'(t)) +\right.$$
$$\left. + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right) + F_3(t,x,z)u_{zz}(t,a(t),b(t)) +$$
$$+ F_4(t,x,z)u(t,x,z), \quad (4.57)$$

где функция

$$F_4(t,x,z) = \lambda_1^2(t,x)M^{(1)}\Big(t, u_1(t,x,z) - \theta\big(u_2(t,x,z) - u_1(t,x,z)\big)\Big),$$
$$\theta - \text{ постоянная } , 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

вследствие (4.7), (4.8), (4.23), (4.24), (4.42), (4.43) также удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{G_{[0,t^*]}} \left| D_x^{|\alpha|} \frac{\partial^m}{\partial z^m} F_4(t,x,z) \right| \leqslant C, \ m = 0,1,2,3, \ |\alpha| \leqslant 2. \quad (4.58)$$

Введем следующие обозначения :

$$V(t) = \sum_{m=0}^{3} V_{0,m}(t) + \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(V_{l,0,k}(t) + V_{l,1,k}(t)\Big), \quad (4.59)$$

$$V_{l,m,k}(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t} \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^l}{\partial x_k^l}\frac{\partial^m}{\partial z^m} u(\xi,x,z)\right|, \quad (4.60)$$

$$V_{0,m}(t) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant t} \sup_{\substack{x\in E_n,\\ z\in E_1}} \left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} u(\xi,x,z)\right|.$$

Функции $V(t)$, $V_{0,m}(t)$, $V_{l,m,k}(t)$ являются неубывающими.

Учитывая оценки (4.56), (4.58), в силу принципа максимума для уравнения (4.57) получим

$$|u(\xi,x,z)| \leqslant C\Big(V_{0,0}(t)+V_{0,2}(t)+V_{0,3}(t)+\sum_{k=0}^{n}(V_{1,0,k}(t)+V_{1,1,k}(t)+ \\ +V_{2,0,k}(t)+V_{2,1,k}(t))\Big)t,\ (\xi,x,z)\in G_{[0,t]},\ 0\leqslant t\leqslant t^*$$

откуда следует неравенство

$$V_{0,0}(t) \leqslant C\Big(V_{0,0}(t)+V_{0,2}(t)+V_{0,3}(t)+\sum_{k=0}^{n}(V_{1,0,k}(t)+V_{1,1,k}(t)+ \\ +V_{2,0,k}(t)+V_{2,1,k}(t))\Big)t,\ 0\leqslant t\leqslant t^*, \quad (4.61)$$

Продифференцируем задачу (4.57), (4.55) по z, получим

$$u_{zt}(t,x,z)=L_x(u_z(t,x,z))+u_{zzz}(t,x,z)+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}F_1(t,x,z)\left(\sum_{k=1}^{n}c_k(t)u_{x_kx_k}(t,a(t),b(t))+u_{x_k}(t,a(t),b(t))a'_k(t)\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}F_2(t,x,z)\left(\sum_{k=1}^{n}(c_k(t)u_{x_kx_kz}(t,a(t),b(t))+u_{x_kz}(t,a(t),b(t))a'_k(t))+\right. \\ \left.+u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right)+\frac{\partial}{\partial z}F_3(t,x,z)u_{zz}(t,a(t),b(t))+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}F_4(t,x,z)u(t,x,z)+F_4(t,x,z)u_z(t,x,z),$$

$$u_z(0,x,z)=0.$$

отсюда, учитывая оценки (4.56), (4.58), в силу принципа максимума для уравнения (4.57) получим

$$V_{0,1}(t)\leqslant C\Big(V_{0,0}(t)+V_{0,1}(t)+V_{0,2}(t)+V_{0,3}(t)+ \\ +\sum_{k=0}^{n}(V_{1,0,k}(t)+V_{1,1,k}(t)+V_{2,0,k}(t)+V_{2,1,k}(t))\Big)t,\ 0\leqslant t\leqslant t^*. \quad (4.62)$$

По аналогии, при помощи соответствующего дифференцирования задачи (4.57), (4.55), получим оценки

$$V_{0,m}(t) \leqslant C\Big(V_{0,0}(t)+V_{0,1}(t)+V_{0,2}(t)+V_{0,3}(t)+\sum_{k=0}^{n}(V_{1,0,k}(t)+V_{1,1,k}(t)+$$
$$+V_{2,0,k}(t)+V_{2,1,k}(t))\Big)t,\ (\xi,x,z)\in G_{[0,t]},\ 0\leqslant t\leqslant t^*,\ m=2,3. \quad (4.63)$$

Продифференцируем задачу (4.57), (4.55) по x_k, получим

$$u_{x_kt}(t,x,z)=L_x(u_{x_k}(t,x,z))+u_{x_kzz}(t,x,z)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_k}F_1(t,x,z)\left(\sum_{k=1}^{n}c_k(t)u_{x_kx_k}(t,a(t),b(t))+u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t)\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_k}F_2(t,x,z)\left(\sum_{k=1}^{n}(c_k(t)u_{x_kx_kz}(t,a(t),b(t))+u_{x_kz}(t,a(t),b(t))a_k'(t))+\right.$$
$$\left.+u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}F_3(t,x,z)u_{zz}(t,a(t),b(t))+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_k}F_4(t,x,z)u(t,x,z)+F_4(t,x,z)u_{x_k}(t,x,z), \quad (4.64)$$
$$u_{x_k}(0,x,z)=0. \quad (4.65)$$

отсюда, учитывая оценки (4.56), (4.58), в силу принципа максимума для уравнения (4.64) получим

$$V_{1,0,k}(t)\leqslant C\Big(V_{0,0}(t)+V_{1,0,k}(t)+V_{0,2}(t)+V_{0,3}(t)+\sum_{k=0}^{n}\big(V_{1,0,k}(t)+V_{1,1,k}(t)+$$
$$+V_{2,0,k}(t)+V_{2,1,k}(t)\big)\Big)t,\ 0\leqslant t\leqslant t^*,\ k=1,\ldots,n. \quad (4.66)$$

Дифференцируя задачу (4.64), (4.65) по переменной z, получим оценки

$$V_{1,1,k}(t)\leqslant C\Big(V_{0,0}(t)+V_{0,1}(t)+V_{1,0,k}(t)+V_{1,1,k}(t)+$$
$$+V_{0,2}(t)+V_{0,3}(t)+\sum_{k=0}^{n}\big(V_{1,0,k}(t)+V_{1,1,k}(t)+V_{2,0,k}(t)+$$
$$+V_{2,1,k}(t)\big)\Big)t,\ 0\leqslant t\leqslant t^*,\ k=1,\ldots,n. \quad (4.67)$$

Продифференцируем задачу (4.57), (4.55) по x_kx_k, получим

$$u_{x_kx_kt}(t,x,z) = L_x(u_{x_kx_k}(t,x,z)) + u_{x_kx_kzz}(t,x,z)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}F_1(t,x,z)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_kx_k}(t,a(t),b(t)) + u_{x_k}(t,a(t),b(t))a'_k(t)\right)+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}F_2(t,x,z)\left(\sum_{k=1}^{n} (c_k(t)u_{x_kx_kz}(t,a(t),b(t)) + u_{x_kz}(t,a(t),b(t))a'_k(t))+\right.$$
$$\left.+u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}F_3(t,x,z)u_{zz}(t,a(t),b(t))+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}F_4(t,x,z)u(t,x,z) + 2\frac{\partial}{\partial x_k}F_4(t,x,z)u_{x_k}(t,x,z)+$$
$$+F_4(t,x,z)u_{x_kx_k}(t,x,z), \quad (4.68)$$

$$u_{x_kx_k}(0,x,z) = 0. \quad (4.69)$$

отсюда, учитывая оценки (4.56), (4.58), в силу принципа максимума для уравнения (4.68) получим

$$V_{2,0,k}(t) \leqslant C\Big(V_{0,0}(t) + V_{1,0,k}(t) + V_{2,0,k}(t)+$$
$$+V_{0,2}(t) + V_{0,3}(t) + \sum_{k=0}^{n}\big(V_{1,0,k}(t) + V_{1,1,k}(t)+$$
$$+V_{2,0,k}(t) + V_{2,1,k}(t)\big)\Big)t,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*,\ k = 1,\dots,n. \quad (4.70)$$

Дифференцируя задачу (4.68), (4.69) по переменной z, получим оценки

$$V_{2,1,k}(t) \leqslant C\Big(V_{0,0}(t) + V_{0,1}(t) + V_{1,0,k}(t) + V_{1,1,k}(t)+$$
$$+V_{2,0,k}(t) + V_{2,1,k}(t) + V_{0,2}(t) + V_{0,3}(t) + \sum_{k=0}^{n}\big(V_{1,0,k}(t) + V_{1,1,k}(t)+$$
$$+V_{2,0,k}(t) + V_{2,1,k}(t)\big)\Big)t,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*,\ k = 1,\dots,n. \quad (4.71)$$

Сложим неравенства (4.61), (4.62), (4.63), (4.66), (4.67), (4.70), (4.71), учитывая обозначение (4.59), получим

$$V(t) \leqslant C\left(\sum_{m=0}^{3} V_{0,m}(t) + \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(V_{l,0,k}(t) + V_{l,1,k}(t)\Big)\right)t,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

$$V(t) \leqslant CV(t)t,\ 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Отсюда получим, что при $t \in [0, \zeta]$, где $\zeta < \frac{1}{C}$ выполняется $V(t) = 0$ и, следовательно

$$u(t,x,z) = 0,\ \text{при } (t,x,z) \in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя наши рассуждения для $t \in [\zeta, 2\zeta]$, получим, что

$$u(t,x,z) = 0,\ (t,x,z) \in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов докажем, что $u(t,x,z) \equiv 0$ в $G_{[0,t^*]}$.

Учитывая, что $u_1 \equiv u_2$ в $G_{[0,t^*]}$, из (4.46) – (4.53), получим, что для $\lambda_1(t) = \lambda_1^1(t) - \lambda_1^2(t)$ и $\lambda_2(t) = \lambda_2^1(t) - \lambda_2^2(t)$ выполняются соотношения

$$\lambda_1(t)M(t,\varphi_1(t)) + \lambda_2(t)f(t,a(t),b(t)) = 0,$$

$$\lambda_1(t)M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2 + \lambda_2(t)f_z(t,a(t),b(t)) = 0.$$

Отсюда, учитывая (4.8), получим, что $\lambda_1(t) \equiv 0$, $\lambda_2(t) \equiv 0$ в $t \in [0,t^*]$. Следовательно $\lambda_1^1(t) \equiv \lambda_1^2(t)$, $\lambda_2^1(t) \equiv \lambda_2^2(t)$ в $t \in [0,t^*]$. Доказана

Теорема 4.4.1. *Решение $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ задачи* (4.1)–(4.8), *удовлетворяющее соотношениям* (4.42), (4.43), *единственно в классе $Z(t^*)$.*

Из теорем 4.3.1, 4.4.1 следует

Теорема 4.4.2. *Пусть выполняются условия* (4.5)–(4.8), (4.23), (4.24). *Тогда существует и единственно решение $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ задачи* (4.1)–(4.4) *в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющее соотношениям* (4.42), (4.43).

4.5 Существование классического решения в случае первой и второй краевых задач

Рассмотрим в области $\Omega_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x = (x_1, \dots, x_n),$ $0 \le x_k \le \pi, k = \overline{1,n}, 0 \le z \le \pi\}$ первую краевую задачу

$$u_t(t,x,z) = \Delta u + u_{zz} + \lambda_1(t) M(t, u(t,x,z)) + \lambda_2(t) f(t,x,z), \tag{4.72}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{4.73}$$

$$u|_{x_k=0} = u|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1, \dots, n, \tag{4.74}$$

$$u|_{z=0} = u|_{z=\pi} = 0. \tag{4.75}$$

Здесь

$$\Delta u(t,x,z) = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k x_k}(t,x,z),$$

функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (4.72)–(4.75), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t, a(t), b(t)) = \varphi_1(t), \tag{4.76}$$

$$u_z(t, a(t), b(t)) = \varphi_2(t), \tag{4.77}$$

где $a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t))$, и условиям согласования

$$u_0(a(0), b(0)) = \varphi_1(0), \tag{4.78}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_0(a(0), b(0)) = \varphi_2(0). \tag{4.79}$$

Предположим, что функция $M(t,y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t,y) \right| \leqslant M_0(1 + |y|^p),\ k = 0, 1, \dots, 9,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in E_1. \tag{4.80}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть при всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\Big|M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))\Big| \geq \delta > 0. \tag{4.81}$$

Здесь δ – фиксированная постоянная.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения и удовлетворяют им

$$|a'(t)| + |b'(t)| + |\varphi_1'(t)| + |\varphi_2'(t)| \leqslant C, \tag{4.82}$$

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial z^m}D_x^\alpha u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial z^m}D_x^\alpha f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ |\alpha| \leqslant 4,\ m = 0,1,\ldots,5, \tag{4.83}$$

$(t,x,z) \in G^*_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n, z \in E_1\}$, C – постоянная больше единицы.

Функции $f(t,x,z)$ и $u_0(x,z)$ нечетным образом продолжаются по переменным x_k, z на E_{n+1}:

$$u_0(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz,\ \ \alpha_k \text{ – постоянные}, \tag{4.84}$$

$$f(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz,\ \ \beta_k(t) \in C[0,T]. \tag{4.85}$$

Также предполагаем, что справедливо следующее условие при $(t,x,z) \in G^*_{[0,T]}$

$$M(t,v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz, \tag{4.86}$$

для любых $v(t,x)$, таких что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \dots \sin kx_n \sin kz.$$

Коэффициенты $M_k(t)$, вообще говоря, зависят от выбора функции $v(t,x)$.

Выражение неизвестных коэффициентов через решение $u(t,x,z)$ имеет вид (4.11), (4.12). Везде далее считаем, что $c_k(t) = 1$.

Рассмотрим в $G^*_{[0,T]}$ теперь прямую задачу Коши (4.13), (4.14), которая получается из (4.72), (4.73) подстановкой выражений для $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и заменой функций $f(t,x,z)$ и $u_0(x,z)$ на их продолжения нечетным образом на все пространство по $x_1, \dots, x_k$, z (обозначения оставим прежними).

Расщепим прямую задачу и линеаризуем сдвигом по времени на $(t - \frac{\tau}{2})$ на втором дробном шаге в нелинейных членах (см. (4.15)–(4.17)). Для решения $u^\tau(t,x,z)$ доказаны следующие равномерные по τ оценки при $(t,x,z) \in G^*_{[0,t^*]}$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u^\tau \right| \leqslant C, \text{ при } |\alpha| = 0, 1, \dots, 4, \ k = 0, 1, \dots, 5,$$

здесь t^* – некоторая постоянная, зависящая от констант, ограничивающих входные данные, такая что $0 < t^* \leqslant T$.

Рассмотрим уравнение (4.15) с начальным условием (4.17). В силу (4.84) решение данной задачи при $t \in \left(0, \frac{\tau}{2}\right]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-2(n+1)k^2 t} \sin kx_1 \sin kx_2 \dots \sin kx_n \sin kz,$$

и, следовательно,

$$u^\tau|_{x_k=0} = u^\tau|_{x_k=\pi} = 0, \ k = 1, \dots, n,$$

$$u^\tau|_{z=0} = u^\tau|_{z=\pi} = 0, \text{ при } t \in \left(0, \frac{\tau}{2}\right].$$

Рассмотрим теперь уравнение (4.15) с начальным условием

$$u^\tau(\frac{\tau}{2}, x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-(n+1)k^2\tau} \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz.$$

Проинтегрируем уравнение (4.15) по временной переменной по отрезку $\left(\frac{\tau}{2}, t\right]$. В силу (4.85), (4.86) решение на временном отрезке $t \in \left(\frac{\tau}{2}, \tau\right]$ представимо в виде

$$u^\tau(t, x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_k e^{-(n+1)k^2\tau} + \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 2R_1^\tau(\theta) M_k(\theta) + 2R_2^\tau(\theta)\beta_k(\theta)\, d\theta\right] \times$$
$$\times \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz.$$

Следовательно,

$$u^\tau|_{x_k=0} = u^\tau|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1, \ldots, n,$$
$$u^\tau|_{z=0} = u^\tau|_{z=\pi} = 0,\ \text{при } t \in (0, \tau]\,.$$

Проделывая аналогичные рассуждения, на следующем целом шаге по времени получим, что

$$u^\tau|_{x_k=0} = u^\tau|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1, \ldots, n,\ u^\tau|_{z=0} = u^\tau|_{z=\pi} = 0,\ \text{при } t \in (0, 2\tau]\,.$$

Через конечное число шагов при $t \in (0, t^*]$ получим, что

$$u^\tau|_{x_k=0} = u^\tau|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1, \ldots, n,\ u^\tau|_{z=0} = u^\tau|_{z=\pi} = 0. \tag{4.87}$$

В силу теоремы Арцела [49] о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t, x, z)$ последовательности $u^\tau(t, x, z)$ решений задачи (4.15)–(4.17) сходится вместе с производными по x_k до второго и z до третьего порядка включительно к функции $u(t, x, z) \in C^{0,2,3}_{t,x,z}(G^*_{[0,t^*]})$. По теореме метода слабой аппроксимации 1.6.1 данная функция является решением прямой задачи (4.13), (4.14), причем $u(t, x, z) \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G^*_{[0,t^*]})$ и справедливы соотношения (4.42), (4.43).

В силу (4.87) для функции $u(t,x,z)$ выполняется

$$u|_{x_k=0} = u|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1,\dots,n,\ u|_{z=0} = u|_{z=\pi} = 0,\ \text{при } t \in (0,t^*]\,,$$

и, следовательно, в качестве решения краевой задачи можно взять сужения на $\Omega_{[0,t^*]}$ решения задачи Коши в $G^*_{[0,t^*]}$ для уравнения (4.72) с начальными данными и правой частью, являющимися указанными в (4.84), (4.85) продолжениями функций $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$, и условиями переопределения (4.76), (4.77).

Единственность решения исходной краевой задачи будет следовать их теоремы единственности, доказанной для задачи Коши (см. Гл.1).

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.5.1. *Пусть выполняются условия* (4.78)–(4.86). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.72)–(4.77) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (4.42), (4.43), *где*

$$\widehat{Z}(t^*) = \left\{ u(t,x,z),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(\Omega_{[0,t^*]}),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t) \in C([0,t^*]) \right\}.$$

Теорема 4.5.2. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.72)–(4.81), *для которого справедливо, что функция* $u(t,x,z)$ *допускает продолжение нечетным образом по пространственным переменным на* $G^*_{[0,t^*]}$, *и удовлетворяющее при* $(t,x,z) \in G^*_{[0,t^*]}$ *соотношениям* (4.42), (4.43), *единственно в классе* $\widehat{Z}(t^*)$.

Из теорем 4.5.1, 4.5.2 следует

Теорема 4.5.3. *Пусть выполняются условия* (4.78)–(4.86). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (4.72)–(4.77) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (4.42), (4.43).

Замечание. В случае второй краевой задачи (4.72), (4.73), (4.88), (4.89) где

$$u_{x_k}|_{x_k=0} = u_{x_k}|_{x_k=\pi} = 0, \ \ k = 1, \dots, n, \tag{4.88}$$

$$u_z|_{z=0} = u_z|_{z=\pi} = 0, \tag{4.89}$$

при выполнении условий

$$u_0(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx_1 \cos kx_2 \dots \cos kx_n \cos kz, \ \ \alpha_k \text{ – постоянные,}$$

$$f(t, x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \dots \cos kx_n \cos kz, \ \ \beta_k(t) \in C[0, T],$$

$$M(t, v(t, x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \dots \cos kx_n \cos kz,$$

для любых $v(t, x)$, таких что

$$v(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \dots \cos kx_n \cos kz,$$

справедливы аналогичные теоремы.

Заключение

В диссертации решены актуальные задачи одновременной идентификации нескольких коэффициентов многомерных полулинейных параболических уравнений, содержащих нелинейности достаточно общего вида, как с условиями переопределения, заданными на фиксированной гиперплоскости, так и с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой. Сформулируем основные результаты работы.

В результате проведенных исследований доказаны теоремы существования и единственности классических решений

1. одномерной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения, содержащего неизвестные коэффициенты при производной по времени и нелинейном члене, в случае данных Коши с условиями переопределения заданными на фиксированной гиперплоскости;

2. многомерной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения, содержащего неизвестные коэффициенты при нелинейном члене и функции источника, в случае данных Коши с условиями переопределения заданными на фиксированной гиперплоскости;

3. одномерной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения, содержащего неизвестные коэффициенты при нелинейном члене и функции источника, в случае первой и второй краевых задач с условиями переопределения заданными на фиксированной гиперплоскости;

4. многомерной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения, содержащего неизвестные коэффициенты, зависящие от

времени, при нелинейном члене и функции источника, с условиями переопределения данными на гладкой кривой, заданной в параметрическом виде. Рассмотрены задача Коши, первая и вторая краевые задачи.

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, носят теоретический характер и снабжены строгими доказательствами. Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

Список литературы

[1] Аниконов Ю.Е. *Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1978.

[2] Аниконов Ю.Е. *Об однозначности решения обратной задачи для квантового кинетического уравнения* // Матем.сборник. 1990. Т.181. N1. С.68 – 74.

[3] Аниконов Ю.Е. *Обратные задачи математической физики и биологии* // ДАН СССР.1991. Т.318. N.6. С.1350 – 1354.

[4] Аниконов Ю.Е. *Псевдодифференциальные операторы и обратные задачи* – Новосибирск – 1986. (Препринт / АН СССР. Сиб. от-ние. Вычислительный центр, N671).

[5] Аниконов Ю.Е., Белов Ю.Я. *Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения* // ДАН СССР. 1989. Т.306. N6. С.1289 – 1293.

[6] Аниконов Ю.Е., Бубнов Б.А. *Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения* // ДАН СССР. 1988. Т.298. N4. С.777 – 779.

[7] Антонцев С.Н. , Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* – Новосибирск: Наука. 1983.

[8] Баранов С.Н. *О задаче идентификации трех коэффициентов с неоднородными условиями переопределения* // Вычислительные технологии, т.8, часть 4. - Новосибирск. 2003. С.92-102.

[9] Безнощенко Н.Я.*О задаче Коши для уравнения* $u_t - \Delta u + uAu = f$ // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.21. N6. С.991–1000.

[10] Безнощенко Н.Я. *Об определении коэффициентов при младщих членах в параболическом уравнении* // СМЖ. 1975. Т.16. N 3. С.473 – 482.

[11] Безнощенко Н.Я. *Об определении коэфициента при младшем члене общего параболического уравнения* // Дифференциальные уравнения. 1976. Т.12. N.1. С.175 – 176.

[12] Безнощенко Н.Я. *Об определении коэффициентов при старших производных в параболическом уравнении* // Дифференциальные уравнения. 1975. Т.11. N4. С.19 – 26.

[13] Белов Ю.Я. *Обратная задача для уравнения Бюргерса* // ДАН СССР. 1992. Т.323. N3. С.385 – 388.

[14] Белов Ю.Я. *О расщеплении одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения* // ДАН СССР. 1995. Т.345. N4. С.441 – 444.

[15] Белов Ю.Я., Ахтамова С.С. *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений* // ДАН СССР. 1991. Т.316. С.791 – 795.

[16] Белов Ю.Я., Ермолаев А.С. *Об одной обратной задаче идентификации коэффициентом многомерного параболического уравнения.* – В сб. "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения", – Красноярск: КрасГУ. 1996. С. 16 – 27.

[17] Белов Ю.Я., Кантор С.А. *Метод слабой аппроксимации.* – КрасГУ, 1999.

[18] Белов Ю.Я. Полынцева С.В. *Об одной обратной задаче с двумя неизвестными коэвффициентами* // Труды III международной конференции "Симметрия и дифференциальные уравнения"Красноярск: институт вычислительного моделирования СО РАН 2002 с.60-65.

[19] Белов Ю.Я. Полынцева С.В. *Об одной задаче идентификации двух коэффициентов многомерного параболического уравнения* // ДАН 2004г. т.396 №5 с.583-586.

[20] Белов Ю.Я., Саватеев Е.Г. *Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени* // ДАН СССР. 1991. Т.334. N5. С.800 – 804.

[21] Белов Ю.Я., Яненко Н.Н. *Влияние вязкости на гладкость решения в неполно – параболических системах* // Матем. заметки. 1971. Т.10. N1. С.93 – 99.

[22] Березанский Ю.М. *Об однозначности определения уравнения Шредингера* // ДАН СССР. 1953. В.93. N4. С.591 – 594.

[23] Бубнов Б.А. *К вопросу оразрешимости многомерных обратных задач для параболических уравнений.* – Новосибирск – 1989 (Препринт /АН СССР. Сиб. отд. Вычислительный центр. N87 – 714).

[24] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.*– М.: Наука. 1981.

[25] Ватульян А.О. *Математические модели и обратные задачи* // Соросовский образовательный журнал. - 1998, №11. - С.143–148.

[26] Волков В.М. *Обратная задача для квазилинейного уравнения параболического типа* // Дифференциальные уравнения.1983. Т.19. N.12. С.2166 – 2169.

[27] Гласко В.Б. *Обратные задачи математической физики.* – М.: МГУ. 1979.

[28] Демидов Г.В., Яненко Н.Н.*Метод слабой аппроксимации* // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными. - М.: Изд-во Московск. ун-та, - 1978. - С. 100-102.

[29] Иванчов Н.И., Салдина Н.В. *Обратная задача для вырождающегося уравнения теплопроводности* // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005. - С.32–36.

[30] Ильин А.М., Клашников А.С., Олейник О.А. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // Успехи мат. наук. - 1962. - Т.17, №3. - С.3–146.

[31] Исаков В.М. *Одна обратная задача для параболического уравнения* // Успехи матем. наук. 1982. Т.32. N2. С.108 – 109.

[32] Искендеров А.Д. *Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений* // ДАН СССР. 1975. Т.225. N5. С.1005–1008.

[33] Искендеров А.Д. *Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1974. Т.10. N.5. С.890 – 898.

[34] Искендеров А.Д., Тагиев Р.К. *Задачи оптимизации с управлениями в коэффициентах параболического уравнения* // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. N.8. С.1324 – 1334.

[35] Калиев И.А., Первушина М.М. *Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности* // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005. - С.39–44.

[36] Камынин В.Л. *Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения.* // Матем. заметки. - 2003.- т.73, вып.2. - с.217-227.

[37] Камынин В. Л. *Асимптотическое поведение решений квазилинейных параболических уравнений в ограниченной области* // СМЖ- 1994. т.35. №2. С. 340 - 358.

[38] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ. 2-е изд. перераб.* – М.: Наука, 1977.

[39] Клибанов М.В. *Обратная задача для параболического уравнения и одна задача интегральной геометрии* // СМЖ. 1976. Т.17. N.3. С.564 – 569.

[40] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука. 1989.

[41] Кожанов А.И. *Уравнения составного типа и нелинейные обратные задачи для эллиптических и параболических уравнений.* – Новосибирск, 1998 – 29с. (Препринт/ РАН Сиб. отд. Ин-т математики; N54).

[42] Корнилов В.С. *Гуманитарный потенциал курса «Обратные задачи для дифференциальных уравнений»* // Вестник Московского городского педагогического университета, серия "Информатика и информатизация образования". №1(4), 2005 г, с.100-114.

[43] Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики.* – Новосибирск: СО АН СССР. 1962.

[44] Лаврентьев М.М. *Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений* // ДАН СССР. 1965. Т.160. N1. С.32 – 35.

[45] Лаврентьев М.М., Васильев В.Г., Романов В.Г. *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1969.

[46] Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г. *Теоремы единственности нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа* // ДАН СССР.1973. Т.208. N3. С.531 – 532.

[47] Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. *Одномерные обратные задачи математической физики.* – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1982.

[48] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.*– М.: Наука. 1980.

[49] Люстерник Л.А. Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* – М.: Высшая школа, 1982.

[50] Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных* – М.: Наука. 1976.

[51] Новик О.Б. *Задача Коши для системы уравнений в частных производных, содержащей гиперболический и параболический операторы* //Журнал ВМ и МФ. 1969. Т.9. N1. С.122 – 136.

[52] Полынцева С.В. *О задаче идентификации двух старших коэффициентов параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на различных гиперплоскостях* // Вестник КрасГУ: физико-математические науки. - Красноярск. 2004. - Вып. 3. - С.107-112

[53] Понтрягин Л.С.*Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука. 1982.

[54] Прилепко А.И. *Избранные вопросы в обратных задачах математической физики.* – Новосибирск: Наука. 1992. С.151 – 162.

[55] Прилепко А.И.*Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения переноса)* // Матем. заметки. 1973. Т.14,15.

[56] Прилепко А.И., Костин А.Б. *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением* // Матем. сб.. 1992. Т.183. N4. С.49-68.

[57] Прилепко А.И., Костин А.Б. *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении I* // СМЖ. 1992. Т.33. N3. С.146 – 155.

[58] Прилепко А.И., Костин А.Б. *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении II* // СМЖ. 1993. Т.34. N5. С.147 – 162.

[59] Прилепко А.И., Орловский Д.Г. *Об определении параметра эволюционного уравнения в обратных задачах математической физики. 1* // Дифференциальные уравнения. 1987. Т.23. N.1. С.119 –125.

[60] Прилепко А.И., Орловский Д.Г. *Об определении параметра эволюционного уравнения в обратных задач математической физики. 3* // Дифференциальные уравнения. 1987. Т.23. N.8. С.1343 – 1352.

[61] Прилепко А.И., Соловьев В.В. *О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении* // Дифференциальные уравнения, 1987. Т23. N1. С.136 – 143.

[62] Прилепко А.И., Ткаченко Д.С. *Обратные задачи и итерационно-разностный метод для параболического уравнения* // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005. - С.58–61.

[63] Пятков С.Г. *О разрешимости некоторых классов обратных задач* // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005. - С.61–67.

[64] Рихтмайер Р. *Звук и теплопроводность* // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: Наука. 1966. С.183 – 185.

[65] Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач.* – М.: Мир. 1972. 418с.

[66] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики. М: Наука, 1984, 251с.*

[67] Романов В.Г. *К теоремам единственности одного класса обратных задач* // ДАН СССР. 1972. Т.204. N.5. С.1075 – 1076.

[68] Романов В.Г. *Об одной обратной задаче для параболического уравнения* // Матем. заметки. 1976. Т.19. В.4. С.595 – 600.

[69] Романов В.Г. *Обратные задачи для дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: НГУ. 1973.

[70] Романов В.Г. *Теорема единственности и устойчивости для нелинейного операторного уравнения* // ДАН СССР. 1972. Т.207. N.5. С.1051 – 1053.

[71] Рождественский Б.М., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений* – М.: Наука, 1978.

[72] Саватеев Е.Г. *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений* // ДАН. 1995. Т.340. N5. С.595 – 596.

[73] Саватеев Е.Г. *О задаче определения функции источника и коэффициента параболического уравнения* // ДАН. 1995. Т.344. N5. С.597 – 598.

[74] Саватеев Е.Г. *О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения* // СМЖ. 1995. Т.36. N1. С.177 – 185.

[75] Соловьев В.В. *О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения* // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. N9. С. 1577 – 1583.

[76] Тихонов А.Н. *О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры* // Изв. АН СССР. Отд. математики и естественных наук. Серия география и геофизика. 1937. Т.3. С.431 – 460.

[77] Тихонов А.Н. *Об устойчивости обратных задач* // ДАН СССР. 1943. Т.5. N39. С.195 – 198.

[78] Тихонов А.Н. *Об обратной задаче для нелинейного дифференциального уравнения* // Журнал ВМ и МФ.1983. N1. Т.23. С.95 – 101.

[79] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука.1979.

[80] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Специальный курс.* – М.: Гос. изд-во Физ.-мат. лит-ры, 1961.

[81] Шипина Т.Н. *Некоторые обратные задачи с данными Коши* // Дисс. ... канд. ф.-м. наук / Шипина Т.Н. - Красноярск, 1999. - 90 с.

[82] Шипина Т.Н. *Обратная задача Коши для параболического уравнения.* – В сб. "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения", – Красноярск: КрасГУ. 1996. С.253 –266.

[83] Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* – Новосибирск, 1967. – 195с.

[84] Anikonov Ju. E. *Inverse problems and classes of solutions of evolution equations* // J.Inv.Ill-Posed Problems. 2003. V. 11, N 51. P. 1-26.

[85] Anikonov Ju. E. *Inverse problems for evolution and differential-differense equations with a parameter* // J.Inv.Ill-Posed Problems. 2003. V. 11, N 5. P. 439-474.

[86] Belov Yu.Ya. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* - Utrecht: VSP, 2002. 211p.

[87] Belov Yu.Ya. *Inverse problems for parabolic equations* // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1993. V.1. N4. P.283 – 305.

[88] Belov Yu.Ya. and Shipina T.N. *The problem of determining the source function for a system of composite type* // J. Inv. Ill – Posed Problems. 1998. V.6. N4. P.287 – 308.

[89] Cannon J.R. and Yanping Lin. *Determination of a parameter* $p(t)$ *in some quasi – linear parabolic differential equations* // J. Ill – Posed and Inverse Problems. 1988. V.4. N1. P.595 – 606.

[90] Іванчов М.І. *Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами*: Препринт. - К.: ІСДО, 1996. - 84 с.

[91] Herglotz. G. *Uber die Elastizitat der Erde bei Borucksichtigung inter Variablen Dichte.* – Zeit schr. fur Math. und Phys.. 1905. Bd52. N3. S.275 – 299.

[92] Kamynin V., Francini E. *An inverse problem for higher order parabolic equation with integral overdetermination. Unique solvability and stabilization of the solution.* – Pubblicazioni Dell'istituto di analisi globale e applicazioni. Serie "Problemi non ben pasti ed inversi". Firenze. 1996.

[93] Klibanov M.V. *Theoretical and Numerical Issues for Some Inverse Problems* // Информационные технологии и обратные задачи раци-

онального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005. - С.44–48.

[94] Kozhanov A.I. *Composite Type Equations and Inverse Problems* // Utrecht: VSP. 1999.

[95] Kozhanov A.I. *On solvability of an inverse problem with an unknoun coefficient and right-hand side for a parabolic equation, I* // J.Inv.Ill-Posed Problems. 2002. V.10, N 6. P. 547-658.

[96] Kozhanov A.I. *On solvability of an inverse problem with an unknoun coefficient and right-hand side for a parabolic equation, II* // J.Inv.Ill-Posed Problems. 2003. V.ll, N 5. P. 505-522.

[97] Lorenzi A., Paparoni E. *Identification of two unknown coefficients in an integrodifferential hyperbolic equations* // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1. N4. P. 331–348

[98] Lorenzi A., Paparoni E. *Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator eqations* // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 5. N6. P. 523–548.

[99] Riganti R. and Savateev E. *On the solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation* // Rapporto Interno. 1991. N25. Politecnico di Torino. Torino.

[100] Riganti R. and Savateev E. *Solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation* // Comm. in Partial Differntial Equation. 1994. V.19. N9&10. P. 1611 – 1628.

[101] Riganti R. and Savateev E. *Inverse problem for the nonlinear heat equation with final overdetermination* // Rapporto Interno. 1995. N7. Politecnico di Torino. Torino.

[102] Romanov V.G. *On the well-posedness of inverse problems with the data support treated at the domain boundary* // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1. N2. P. 155–167.

[103] Wiechert E. und Zoeppritz K. *Uber Erdbebenwellen Gotingen.* – Nachr. Konigl. Geselschaft. 1907. N4. S.415 – 549.

Список работ автора по теме диссертации

[104] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов полулинейного параболического уравнения* // Материалы XLI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технических прогресс": Математика/Новосиб. гос. Университет. Новосибирск, 2003, С. 29-30.

[105] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов полулинейного ультрапараболического уравнения* // Вычислительные технологии. 2003. т.8, ч.1. с.120-131.

[106] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации коэффициента при производной по времени в полулинейном параболическом уравнении* //Вычислительные технологии. 2004. т.9, ч.1. с.281-289.

[107] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения* // Вестник КрасГУ: физико-математические науки. - Красноярск: КрасГУ, 2004. - Вып. 1. - С. 140-149.

[108] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задачах идентификации двух коэффициентов одномерного полулинейного параболического уравнения* // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова / под ред. А.И. Кожанова. - Новосибирск: Изд-во Инст-та математики, 2005, С.44-50.

[109] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений* // Доклады Академии Наук, 2005, том 404, №5, с.583-585.

[110] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О некоторых задачах идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений* //Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. Институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005, С. 19-23.

[111] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой* //Специальный выпуск журнала "Вычислительные технологии", посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко. 2006. т.11, ч.1. с.46-54.

[112] И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения* // Труды XLII Международной научной конференции "Студент и научно-технический прогресс": Новосиб. гос. Университет. Новосибирск, 2004, С. 181-186.