На правах рукописи

Фроленков Игорь Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск 2006

Работа выполнена в Красноярском государственном университете

Научный руководитель	доктор физико-математических наук профессор Белов Ю.Я.
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук профессор Кожанов А.И., доктор физико-математических наук профессор Мысливец С.Г.
Ведущая организация	Новосибирский государственный университет

Защита состоится 17 ноября 2006 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета К 212.099.03 в Красноярском государственном университете по адресу 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Красноярского государственного университета.

Автореферат разослан 13 октября 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук Золотов О.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

При изучении физических объектов или явлений экспериментальными методами типична ситуация, когда интересующие исследователя количественные характеристики объекта недоступны для непосредственного наблюдения. Или проведение самого эксперимента вообще невозможно, потому что, он либо запрещен (например, при изучении здоровья человека), либо слишком опасен (например, при изучении экологических явлений). Наконец, эксперимент может быть связан с очень большими финансовыми затратами. В этом случае приобретается некоторая косвенная информация об исследуемом объекте. Эта информация определяется природой изучаемого объекта и используемым при этом изучении экспериментальным комплексом. В таких ситуациях для диагностики объектов (например, их внутренней структуры) требуются математическая обработка и интерпретация результатов наблюдений.

С точки зрения соотношения причина-следствие все задачи математического моделирования можно условно разделить на два больших класса: прямые задачи (известны причины, необходимо найти следствия) и обратные (известны следствия, нужно найти причины).

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, границы области, граничных или начальных условий. Неизвестные элементы начально-краевых задач определяются по некоторой дополнительной информации. Такой информацией служат различного рода условия переопределения. Многие важные прикладные вопросы, касающиеся упругих смещений, электромагнитных колебаний, диффузионных процессов, геофизики, сейсмологии, компьютерной томографии, геотомографии, диагности плазмы, квантовой теории рассеяния, подводной акустики, квазиоптики, дифракции, теории колебаний молекул, георадиолокации и др. приводят к обратным задачам.

Теория обратных задач составляет важное самостоятельное направление исследований в области дифференциальных уравнений. В настоящее время теория обратных задач математической физики активно развивается представителями целого ряда отечественных математических школ, в том числе Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым). Корректность обратных задач для параболических уравнений, а также краевые задачи определения коэффициентов или функции источника для параболического уравнения в предположении независимости искомых коэффициентов (функции источника) либо от временной переменной, либо от пространственной переменной изучались в работах Ю.Е. Аниконова, Б.А. Бубнова, Е.Г. Саватеева, В.М. Волкова, А.И. Прилепко, Н.Я. Безнощенко, В.В. Соловьева, В.В. Васина, А.И. Кожанова, В.Л. Камынина, Н.И. Иванчова, Ю.Я. Белова, Т.Н. Шипиной и других. Вопросам корректности обратных задач для линейных параболических уравнений в случае краевых задач также посвящены работы Н.И. Иванчова, Н.В. Салдиной, И.А. Калиева, М.М. Первушиной, А.И. Прилепко, Д.С. Ткаченко, С.Г. Пяткова. Целый ряд результатов в изучении обратных задач получили в последние десятилетия зарубежные авторы из Италии, Голландии, Швеции, США, Франции, Японии и др.: G. Anger, H.D. Bui, Y. Chen, D. Colton, R. Durridge, H.W. Engl, J. Gottlieb, M. Grasselli, R. Kress, G. Kunetz, J.Q. Lin, A. Lorenzi, J.M. Mendel, R.D. Murch, A. Roger, M. Sondhi, S. Strom, H. Zhang, M. Yamamoto и др.

Цель работы. Исследование корректности обратных задач для одномерных и многомерных полулинейных параболических уравнений, содержащих нелинейности достаточно общего вида, в случае данных Коши, первой и второй краевых задач. Исследование случаев, когда условия переопределения заданы на фиксированной гиперплоскости и на гладкой кривой.

Методика исследования. Во всех исследуемых задачах идентификации коэффициентов осуществляется формальный переход от обратной задачи к прямой задаче для нагруженного уравнения. Основным методом, применяющимся в диссертации при доказательстве разрешимости прямых задач для нагруженных уравнений является метод слабой аппроксимации (МСА), являющийся методом расщепления на дифференциальном уровне и названный так Н.Н. Яненко. Методы расщепления во многом получили развитие в работах Н.Н. Яненко, А.А. Самарского, их учеников и последователей. В монографии Ю.Я. Белова и С.А. Кантора приведено подробное описание МСА и систематизированы имеющиеся результаты.

Научная новизна и практическая ценность.

В диссертации решены актуальные задачи одновременной идентификации нескольких коэффициентов многомерных полулинейных параболических уравнений, содержащих нелинейности достаточно общего вида, как с условиями переопределения, заданными на фиксированной гиперплоскости, так и с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой.

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, носят теоретический характер и снабжены строгими доказательствами. Они могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

Аппробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Красноярского госуниверситета, руководитель — д.ф.-м.н. Ю.Я. Белов (2002-2006гг.);

XXXVI Краевой научной студенческой конференции по математике, (г. Красноярск, КрасГУ, 2003 г.);

XLI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс"(г. Новосибирск, НГУ, 2003 г.);

Международной научной конференции "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании"(г. Усть-Каменогорск, Казахстан, 2003 г.);

XLII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс", (г. Новосибирск, НГУ, 2004 г.);

XXXVII Краевой научной студенческой конференции по математике (г. Красноярск, КрасГУ, 2004 г.);

Международной конференции "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании ВИТ-2004" (г. Алматы, Казахстан, 6-10 октября 2004 г.);

Международном семинаре по неклассическим уравнениям математической физики, посвященном 60-летию В.Н.Врагова (г. Новосибирск, НГУ, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 2005 г.);

Международной конференции "Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования"(г. Ханты-Мансийск, Югорский НИИ информационных технологий, 2005 г.);

Международной конференции "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании ВИТ-2006" (г. Павлодар, Казахстан, 2006 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано девять работ, в которых отражено ее основное содержание. Восемь работ написаны и опубликованы в соавторстве. Во всех случаях вклад каждого из соавторов равноценен. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 103 наименования и списка работ автора по теме диссертации, включающего 9 наименований. Восемь работ написаны и опубликованы в соавторстве. Во всех случаях вклад каждого из соавторов равноценен. Объем диссертации составляет 150 страниц.

Содержание работы

Во введении дано обоснование актуальности выбранной темы, приведены постановки задач, результаты их исследования и указана взаимосвязь с работами других авторов.

В первой главе приводятся некоторые обозначения, а также вспомогательные утверждения и теоремы, необходимые для дальнейшего изложения.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию задачи идентификации коэффициентов одномерного полулинейного параболического уравнения, содержащего два неизвестных коэффициента, один из которых стоит при производной по времени, второй - при нелинейном члене. Условия переопределения заданы на фиксированной гиперплоскости.

В области $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1, z \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$\lambda_1(t,x)u_t(t,x,z) = a_1(t,x)u_{xx} + a_2(t,x)u_{zz} + \\ + \lambda_2(t,x)M(t,u(t,x,z)) + f(t,x,z), \quad (1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \quad (2)$$

Функции $a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$ такие, что дифференциальный оператор $L(u)$ является оператором эллиптического типа при $(t,x,z) \in G_{[0,T]}$. Функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ заданы в E_2, E_2 и $G_{[0,T]}$ соответственно. Здесь и далее все функции действительнозначные.

Функции $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (1), (2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,x,0) = \varphi_1(t,x), \quad (3)$$

$$u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x) \quad (4)$$

и условиям согласования

$$u_0(x,0) = \varphi_1(0,x), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(x,0) = \varphi_2(0,x). \quad (6)$$

Относительно функции $M(t,y)$ предполагается, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение и удовлетворяет этому соотношению :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\ldots,11,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in E_1. \quad (7)$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть выполняется при $(t,x) \in \Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T, x \in E_1\}$ соотношение

$$|\Delta(t,x)| = \left| \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x) M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) M(t,\varphi_1(t,x)) \right| \ge \delta > 0, \quad (8)$$

где δ – некоторая фиксированная постоянная. Это условие является условием неравенства нулю определителя системы относительно $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$.

Обратная задача (1)–(4) приводится к прямой задаче Коши для нагруженного уравнения

$$[A_1(t,x) + A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\, u_t = L(u) +$$
$$+ [B_1(t,x) + B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0) + B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)]\, M(t,u) +$$
$$+ f(t,x,z),$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),$$

где

$$A_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x) - \psi_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$A_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$A_3(t,x) = -\frac{a_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$B_1(t,x) = \frac{\psi_1(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x) - \psi_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_2(t,x) = \frac{a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)}, \; B_3(t,x) = -\frac{a_2(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,x)}{\Delta(t,x)}, \; \Delta(t,x)$$

– известные функции.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им :

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\psi_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}a_i(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^m \partial t}\varphi_i(t,x)\right| \leqslant C, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^m}{\partial x^m}f(t,x,z)\right| \leqslant C, \tag{10}$$

Здесь $m = 0, 1, \ldots, 4$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 11 - 2m$, $(t, x, y) \in G_{[0,T]}$.

Пусть также выполняется следующее условие при $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$:

$$A_1(t,x) + A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x,0) + A_3(t,x)\frac{\partial^3}{\partial z^3}u_0(x,0) \geq \delta. \tag{11}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.4.1. *Пусть выполняются условия* (5)–(11). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (1)–(4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{k=0}^{5}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| + \sum_{m=0}^{2}\sum_{k=0}^{3}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C, \;\; (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \tag{12}$$

$$\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_1(t,x)\right| + \sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\lambda_2(t,x)\right| \leqslant C, \;\; (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, \tag{13}$$

где

$$Z(t^*) = \Big\{u(t,x,z),\, \lambda_1(t,x),\, \lambda_2(t,x) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) \cap C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),$$
$$\lambda_1(t,x),\, \lambda_2(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})\Big\},$$

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \Big\{f(t,x,z) \mid f, f_t \in C(G_{[0,t^*]}),$$
$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^k}{\partial z^k}f \in C(G_{[0,t^*]}),\; m \leqslant 2,\; k = 0,1,2,3\Big\},$$

$$C^{0,0,5}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \Big\{ f(t,x,z) \mid \frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0,t^*]}),\ k = 0,1,\ldots,5 \Big\}.$$

Здесь t^* – некоторая постоянная, зависящая от константы M_0 из (7) и констант C, δ из (8)–(11), такая, что $0 < t^* \leqslant T$.

Теорема 2.5.1. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (1)–(8), *удовлетворяющее соотношениям* (12), (13), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 2.4.1 и 2.5.1 следует

Теорема 2.5.2. *Пусть выполняются условия* (5)–(11). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (1)–(4) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (12), (13).

В третьей главе в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_n, z \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения тройки действительнозначных функций $\big(u(t,x,z), \lambda_1(t,x), \lambda_2(t,x)\big)$, являющихся решением задачи

$$u_t(t,x,z) = L_x(u) + u_{zz} + \lambda_1(t,x) M(t, u(t,x,z)) + \lambda_2(t,x) f(t,x,z), \tag{14}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \tag{15}$$

где

$$L_x(u) = \sum_{k,m=1}^{n} a_{km}(t) u_{x_k x_m} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t) u_{x_k}, \text{ где } a_{km}(t), a_k(t) \in C\,[0,T]\,,$$

и удовлетворяющих условиям

$$u(t,x,0) = \varphi_1(t,x), \tag{16}$$

$$u_z(t,x,0) = \varphi_2(t,x). \tag{17}$$

Считаем, что входные данные удовлетворяют условиям согласования

$$u_0(x,0) = \varphi_1(0,x), \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(x,0)=\varphi_2(0,x), \tag{19}$$

функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Относительно функции $M(t,y)$ также предполагаем, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение (20) :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\ldots,9,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y\in E_1. \tag{20}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y)=\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k\geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y)=M(t,y)$.

Предположим, что при $(t,x)\in \Pi_{[0,T]}=\{(t,x)\mid 0\leq t\leq T, x\in E_n\}$ выполняется соотношение

$$\Big|M(t,\varphi_1(t,x))f_z(t,x,0)-M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f(t,x,0)\Big|\geq\delta>0, \tag{21}$$

где δ – некоторая фиксированная постоянная. Это условие является условием неравенства нулю определителя системы относительно $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$.

Обратная задача (14)–(17) приводится к прямой задаче Коши для нагруженного уравнения :

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) &= L_x(u(t,x,z))+u_{zz}(t,x,z)+\\ &+\left[A_1(t,x)+A_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+A_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\right]M(t,u(t,x,z))+\\ &+\left[B_1(t,x)+B_2(t,x)u_{zz}(t,x,0)+B_3(t,x)u_{zzz}(t,x,0)\right]f(t,x,z),\end{aligned}$$

$$u(0,x,z)=u_0(x,z),$$

где

$$A_1(t,x)=\frac{\psi_1(t,x)f_z(t,x,0)-\psi_2(t,x)f(t,x,0)}{\Delta(t,x)},$$

$$A_2(t,x) = \frac{-f_z(t,x,0)}{\Delta(t,x)},\ A_3(t,x) = \frac{f(t,x,0)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_1(t,x) = \frac{\psi_2(t,x)M(t,\varphi_1(t,x)) - \psi_1(t,x)M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},$$

$$B_2(t,x) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)}{\Delta(t,x)},\ B_3(t,x) = \frac{-M(t,\varphi_1(t,x))}{\Delta(t,x)},$$

$$\Delta(t,x) = M(t,\varphi_1(t,x))f_z(t,x,0) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t,x))\varphi_2(t,x)f(t,x,0)$$

– известные функции.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения (22), (23) и удовлетворяют этим соотношениям :

$$\left|D_x^{\beta_1}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i(t,x)\right| + \left|D_x^{\beta_2}\varphi_i(t,x)\right| \leqslant C,\ |\beta_1| \leqslant 4,\ |\beta_2| \leqslant 6,\ i = 1,2, \tag{22}$$

$$\left|D_x^{\beta_3}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u_0(x,z)\right| + \left|D_x^{\beta_3}\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ |\beta_3| \leqslant 4,\ k = 0,1,\ldots,5, \tag{23}$$

$$(t,x,z) \in G_{[0,T]}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.4.1. *Пусть выполняются условия* (18)–(23). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ *задачи* (14)–(17) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\sum_{k=0}^{3}\left|D_x^{\alpha}\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \tag{24}$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D_x^{\alpha}\lambda_1(t,x)| + \sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D_x^{\alpha}\lambda_2(t,x)| \leqslant C,\ (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}. \tag{25}$$

Здесь

$$Z(t^*) = \big\{u(t,x,z),\ \lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),$$
$$\lambda_1(t,x),\ \lambda_2(t,x) \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})\big\},$$

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,x,z) \mid f_t,\ \frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x f \in C(G_{[0,t^*]}),\ |\alpha| \leqslant 2,\ k = 0,1,2,3 \right\}.$$

$$C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}) = \{g(t,x) \mid D^\alpha_x g(t,x) \in C(\Pi_{[0,t^*]}),\ |\alpha| = 0,1,2\}.$$

Теорема 3.5.1. *Решение $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ задачи* (14)–(21)*, удовлетворяющее соотношениям* (24), (25)*, единственно в классе $Z(t^*)$.*

Из теорем 3.4.1, 3.5.1 следует

Теорема 3.5.2. *Пусть выполняются условия* (18)–(23)*. Тогда существует и единственно решение $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,x)$, $\lambda_2(t,x)$ задачи* (14)–(17) *в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющее соотношениям* (24), (25).

Также в области $\Omega_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi\}$ рассмотрена задача идентификации тройки действительнозначных функций $\big(u(t,x), \lambda_1(t), \lambda_2(t)\big)$, удовлетворяющих краевой задаче для одномерного уравнения

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \lambda_1(t) M(t, u(t,x)) + \lambda_2(t) f(t,x), \tag{26}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{27}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{28}$$

и условиям

$$u(t,a) = \varphi_1(t),\ u_x(t,a) = \varphi_2(t) \tag{29}$$

для некоторой фиксированной точки $0 < a < \pi$.

Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(a) = \varphi_1(0), \quad \frac{\partial}{\partial x} u_0(a) = \varphi_2(0). \tag{30}$$

Предположим, что функция $M(t, y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$\left|M^{(j)}(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ j=0,1,\ldots,5,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y\in E_1. \qquad (31)$$

Здесь M_0 – постоянная, $p \geq 1$ – целое.

Пусть при $0 \leqslant t \leqslant T$

$$|\Delta(t)| \geq \delta > 0, \quad \delta - const, \qquad (32)$$

где

$$\Delta(t) = M(t,\varphi_1(t))f_x(t,a) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a).$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения (33)) и при $(t,x) \in G^*_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$ удовлетворяет соотношениям :

$$|\varphi_i(t)| + \left|\frac{d}{dt}\varphi_i(t)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j}u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}f(t,x)\right| \leqslant C,\ i=0,1,\ j=\overline{0,5}. \quad (33)$$

Функции $u_0(x)$ и $f(t,x)$ нечетным образом продолжаются по переменной x на E_1:

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \sin kx,\ f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(t)\sin kx. \qquad (34)$$

Здесь $\alpha_k - const,\ \beta_k(t) \in C[0,T]$.

Также предполагаем, что при $(t,x) \in G^*_{[0,T]}$ справедливо условие

$$M(t, v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t)\sin kx \qquad (35)$$

для любых $v(t,x)$, таких, что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)\sin kx.$$

Коэффициенты $M_k(t)$, вообще говоря, зависят от выбора функции $v(t,x)$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.6.1. *Пусть выполняются условия* (30)–(35). *Тогда существует решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (26)–(29) *в классе*

$$\widehat{Z}(t^*) = \left\{ u(t,x),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,3}_{t,x}(\Omega_{[0,t^*]}),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t) \in C([0,t^*]) \right\},$$

где

$$C^{1,3}_{t,x}(\Omega_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,x) \mid f_t,\, D^\alpha_x f \in C(\Omega_{[0,t^*]}),\, |\alpha| \leqslant 3 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$|\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| + \sum_{k=0}^{3} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x) \right| \leqslant C,\ \ (t,x) \in \Omega_{[0,t^*]}. \tag{36}$$

Теорема 3.6.2. *Решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (26) – (32), *для которого справедливо, что функция* $u(t,x)$ *допускает продолжение нечетным образом по пространственной переменной на* $G^*_{[0,t^*]}$, *и удовлетворяющее при* $(t,x) \in G^*_{[0,t^*]}$ *соотношению* (36), *единственно в классе* $\widehat{Z}(t^*)$.

Из теорем 3.6.1, 3.6.2 следует

Теорема 3.6.3. *Пусть выполняются условия* (30) – (35). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (26) – (29) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношению* (36).

Замечание. В случае второй краевой задачи (26), (27), (37), где

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \tag{37}$$

при выполнении условий

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx,\ \ f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \cos kx,$$

где $\alpha_k - const$, $\beta_k(t) \in C[0,T]$,

$$M(t,v) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \cos kx,$$

для любых $v(t,x)$, таких, что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \cos kx,$$

справедливы аналогичные теоремы. Здесь коэффициенты $M_k(t)$ также зависят от выбора функции $v(t,x)$.

В четвертой главе для полулинейного параболического уравнения рассмотрен случай неизвестных коэффициентов при нелинейном члене и функции источника. Коэффициенты зависят от временной переменной, а условия переопределения задаются на гладкой кривой, заданной в параметрическом виде.

Когда рассматриваются процессы диффузии или распространения тепла и условия переопределения задаются на фиксированной гиперплоскости, это означает, что датчик, производящий замеры (например, температуры) установлен и закреплен в определенном месте и не может перемещаться со временем. Если же датчик с течением времени может двигаться в пространстве по определенному закону, то мы приходим к описанной ниже задаче.

В области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_n, z \in E_1\}$ рассмотрена задача Коши

$$u_t(t,x,z) = L_x(u) + u_{zz} + \lambda_1(t) M(t, u(t,x,z)) + \lambda_2(t) f(t,x,z), \tag{38}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{39}$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_{x_k x_k}, \text{ где } c_k(t) \in C\,[0,T]\,,$$

функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (38)–(39), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,a(t),b(t)) = \varphi_1(t), \tag{40}$$

$$u_z(t,a(t),b(t)) = \varphi_2(t), \tag{41}$$

где $a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t))$, и условиям согласования

$$u_0(a(0),b(0)) = \varphi_1(0), \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(a(0),b(0)) = \varphi_2(0). \tag{43}$$

Относительно функции $M(t,y)$ также предполагаем, что она имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение (44), и удовлетворяет этому соотношению :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\dots,9,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y\in E_1. \tag{44}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть при всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\Big|M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))\Big| \geq \delta > 0. \tag{45}$$

Здесь δ – постоянная.

Обратная задача (38)–(41) приводится к следующей вспомогательной прямой задаче для нагруженного уравнения :

$$u_t = L_x(u) + u_{zz} + \Big(A_1(t) + A_2(t)K_1(t) +$$
$$+A_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t, a(t), b(t))\right] + A_4(t)u_{zz}(t, a(t), b(t))\Big) M(t, u) +$$
$$+ \Big(B_1(t) + B_2(t)K_1(t) + B_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t, a(t), b(t))\right] +$$
$$+ B_4(t)u_{zz}(t, a(t), b(t))\Big) f(t, x, z),$$

$$u(0, x, z) = u_0(x, z),$$

где

$$A_1(t) = \frac{\left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t)\right] f_z(t, a(t), b(t)) - \varphi_2'(t) f(t, a(t), b(t))}{D(t)},$$

$$A_2(t) = \frac{-f_z(t, a(t), b(t))}{D(t)},\ A_3(t) = \frac{f(t, a(t), b(t))}{D(t)},$$
$$A_4(t) = \frac{b'(t)f(t, a(t), b(t)) - f_z(t, a(t), b(t))}{D(t)},$$
$$B_1(t) = \frac{\varphi_2'(t)M(t, \varphi_1(t)) - \left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t)\right] M^{(1)}(t, \varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)},$$
$$B_2(t) = \frac{M^{(1)}(t, \varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)},\ B_3(t) = \frac{-M(t, \varphi_1(t))}{D(t)},$$
$$B_4(t) = \frac{M^{(1)}(t, \varphi_1(t))\varphi_2(t) - b'(t)M(t, \varphi_1(t))}{D(t)}$$

– известные, непрерывные, достаточно гладкие функции.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения) и удовлетворяет соотношениям :

$$|a'(t)| + |b'(t)| + |\varphi_1'(t)| + |\varphi_2'(t)| \leqslant C, \tag{46}$$

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha u_0(x, z)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha f(t, x, z)\right| \leqslant C,\ |\alpha| \leqslant 4,\ m = 0, 1, \ldots, 5, \tag{47}$$

$$(t,x,z) \in G_{[0,T]}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.3.1. *Пусть выполняются условия* (42)–(47). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (38)–(41) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\sum_{k=0}^{3}\left|D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m}u(t,x,z)\right| \leqslant C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t^*]}, \tag{48}$$

$$|\lambda_1(t)|+|\lambda_2(t)| \leqslant C,\ t\in G_{[0,t^*]}. \tag{49}$$

Здесь

$$Z(t^*) = \left\{u(t,x,z),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0,t^*])\right\},$$

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{f(t,x,z) \mid f, f_t \in C(G_{[0,t^*]}),\ D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} f \in C(G_{[0,t^*]}),\right.$$
$$\left. m = 0,1,2,3,\ |\alpha| \leqslant 2\right\}.$$

Теорема 4.4.1. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (38)–(45), *удовлетворяющее соотношениям* (48), (49), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 4.3.1, 4.4.1 следует

Теорема 4.4.2. *Пусть выполняются условия* (42)–(47). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (38)–(41) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (48), (49).

Также в области $\Omega_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x = (x_1,\ldots,x_n), 0 \le x_k \le \pi, k = \overline{1,n}, 0 \le z \le \pi\}$ рассмотрена задача идентификации тройки функций $\big(u(t,x,z),\lambda_1(t),\lambda_2(t)\big)$, удовлетворяющих краевой задаче для многомерного полулинейного уравнения

$$u_t(t,x,z) = \Delta u + u_{zz} + \lambda_1(t)M(t,u(t,x,z)) + \lambda_2(t)f(t,x,z), \tag{50}$$

$$u(0,x,z)=u_0(x,z), \tag{51}$$

$$u|_{x_k=0}=u|_{x_k=\pi}=0,\ k=1,\dots,n, \tag{52}$$

$$u|_{z=0}=u|_{z=\pi}=0, \tag{53}$$

и условиям переопределения

$$u(t,a(t),b(t))=\varphi_1(t), \tag{54}$$

$$u_z(t,a(t),b(t))=\varphi_2(t), \tag{55}$$

где $a(t)=(a_1(t),a_2(t),...,a_n(t))$. Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(a(0),b(0))=\varphi_1(0), \tag{56}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(a(0),b(0))=\varphi_2(0). \tag{57}$$

Предположим, что функция $M(t,y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right|\leqslant M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\dots,9,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y\in E_1. \tag{58}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y)=\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k\geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y)=M(t,y)$.

Пусть при всех $t\in[0,T]$ выполняется соотношение

$$\left|M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t))-M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))\right|\geq\delta>0. \tag{59}$$

Здесь δ – фиксированная постоянная.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения (60), (61), и удовлетворяют этим соотношениям :

$$|a'(t)|+|b'(t)|+|\varphi_1'(t)|+|\varphi_2'(t)|\leqslant C, \tag{60}$$

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha f(t,x,z)\right| \leqslant C,\ |\alpha| \leqslant 4,\ m = 0,1,\ldots,5, \quad (61)$$

$$(t,x,z) \in G^*_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_n, z \in E_1\}.$$

Функции $f(t,x,z)$ и $u_0(x,z)$ заданы на $\Omega_{[0,T]}$ и нечетным образом продолжаются по переменным x_k, z на E_{n+1} :

$$u_0(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz,\ \alpha_k \text{ – постоянные}, \quad (62)$$

$$f(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz,\ \beta_k(t) \in C[0,T]. \quad (63)$$

Также предполагаем, что справедливо следующее условие при $(t,x,z) \in G^*_{[0,T]}$:

$$M(t,v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz, \quad (64)$$

для любых $v(t,x)$, таких что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz.$$

Коэффициенты $M_k(t)$, вообще говоря, зависят от выбора $v(t,x)$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.5.1. *Пусть выполняются условия* (56)–(64). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (50)–(55) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (48), (49), *где*

$$\widehat{Z}(t^*) = \left\{u(t,x,z),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(\Omega_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0,t^*])\right\}.$$

Теорема 4.5.2. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (50)–(59), *для которого справедливо, что функция* $u(t,x,z)$ *допускает продолжение нечет-*

ным образом по пространственным переменным на $G^*_{[0,t^*]}$, *и удовлетворяющее при* $(t,x,z) \in G^*_{[0,t^*]}$ *соотношениям* (48), (49), *единственно в классе* $\widehat{Z}(t^*)$.

Из теорем 4.5.1, 4.5.2 следует

Теорема 4.5.3. *Пусть выполняются условия* (56)–(64). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (50)–(55) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (48), (49).

Замечание. В случае второй краевой задачи (50), (51), (65), (66) где

$$u_{x_k}|_{x_k=0} = u_{x_k}|_{x_k=\pi} = 0, \;\; k = 1, \ldots, n, \tag{65}$$

$$u_z|_{z=0} = u_z|_{z=\pi} = 0, \tag{66}$$

при выполнении условий

$$u_0(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz, \;\; \alpha_k \text{ – постоянные},$$

$$f(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz, \;\; \beta_k(t) \in C[0,T],$$

$$M(t, v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz,$$

для любых $v(t,x)$, таких что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz,$$

справедливы аналогичные теоремы.

Заключение содержит выводы и основные результаты работы.

Автор выражает благодарность научному руководителю Ю.Я. Белову за помощь и ценные советы при работе над диссертацией, а также всем участникам семинара кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Красноярского госуниверситета за поддержку и активное обсуждение результатов.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

1. Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов полулинейного параболического уравнения* // Материалы XLI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технических прогресс": Математика/Новосиб. гос. Университет. Новосибирск. 2003. С. 29-30.

2. Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов полулинейного ультрапараболического уравнения* // Вычислительные технологии. 2003. т.8, ч.1. С.120-131.

3. Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации коэффициента при производной по времени в полулинейном параболическом уравнении* //Вычислительные технологии. 2004. т.9, ч.1. С. 281-289.

4. Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения* // Вестник КрасГУ: физико-математические науки. - Красноярск: КрасГУ. 2004. Вып. 1. С. 140-149.

5. Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задачах идентификации двух коэффициентов одномерного полулинейного параболического уравнения* // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова / под ред. А.И. Кожанова. - Новосибирск: Изд-во Инст-та математики. 2005. С. 44-50.

6. Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений* // Доклады Академии Наук. 2005. т. 404, №5. С. 583-585.

7. Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О некоторых задачах идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений* // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. Институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист. 2005. С. 19-23

8. Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой* // Специальный выпуск журнала "Вычислительные технологии", посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко. 2006. т.11, ч.1. С. 46-54.

9. И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения* // Труды XLII Международной научной конференции "Студент и научно-технический прогресс": Новосиб. гос. Университет. Новосибирск. 2004. С. 181-186.

Подписано в печать «   » октября 2006 г. Формат 60 × 84 1/16

Бумага офсет. N1 Печать офсет.

Ус. печат. лист. 1,25 Ус. изд. лист. 1,0

Тираж 100 Заказ

Издательский центр Красноярского государственного университета, 660041, г.Красноярск, пр.Свободный, 79.