Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО И ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.

О.А. Афиногенова*, Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков*****

* ИЕиГН СФУ (КрасГУ),
пр. Свободный, 79,
660041 Красноярск, Россия
E-mail: afinog@ngs.ru

** ИЕиГН СФУ (КрасГУ),
пр. Свободный, 79,
660041 Красноярск, Россия
E-mail: belov@lan.krasu.ru

*** ИЕиГН СФУ (КрасГУ)
пр. Свободный, 79,
660041 Красноярск, Россия
E-mail: kspk_job@mail.ru

Работа состоит из двух частей.

В первой части рассмотрена задача идентификации функции источника для одномерного линейного параболического уравнения. Доказана теорема существования и единственности "в целом". Доказана ограниченность решения при стремлении временной переменной к бесконечности. Принципиальное отличие данной задачи от рассматриваемых ранее состоит в том, что решение исследуется в классе достаточно гладких, ограниченных вместе с соответствующими производными функций. Ранее подобные результаты были получены в работах Белова Ю.Я., Шипиной Т.Н., Сорокина Р.В. (см. [1-3]) для функций, достаточно быстро убывающих к нулю на бесконечности по выделенной переменной.

Во второй части для полулинейного параболического уравнения рассмотрен случай неизвестных коэффициентов при нелинейном члене достаточно общего вида и функции источника. Коэффициенты зависят от временной переменной, а условия переопределения задаются на гладкой кривой, заданной в параметрическом виде. Физически это означает, что датчик, производящий замеры (например, температуры), с течением времени может двигаться в пространстве по определенному закону.

Для доказательства разрешимости используется метод слабой аппроксимации (см. [4,5]).

В области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T, x \in E_1\}$ рассмотрена задача Коши

$$u_t(t,x) = b(t)u_{xx} + a(t)u(t,x) + f(t)g(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь функции $b(t)$, $a(t)$, $u_0(x)$, $g(t,x)$ действительнозначные и заданы в $[0,T]$, E_1, $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функция $f(t)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (1), (2), удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t,0) = \varphi(t), \tag{3}$$

и условию согласования

$$u_0(0) = \varphi(0), \tag{4}$$

Пусть при всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$|g(t,0)| \ge \delta > 0. \tag{5}$$

Здесь δ – постоянная.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения и удовлетворяют им :

$$|a(t)| + |b(t)| + |\varphi(t)| + \left|\varphi'(t)\right| \leq C, \tag{6}$$

$$\left|\frac{d^k}{dx^k} u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} g(t,x)\right| \leq C,\ k = 0, 1, \ldots, 4, \tag{7}$$

$$(t,x) \in G_{[0,T]}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (4)–(7). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x)$, $f(t)$ *задачи* (1)–(3) *в классе* $Z_{[0,T]}$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} \sum_{k=0}^{2} \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x)\right| + |f(t)| \leq C,\ (t,x) \in G_{[0,T]},$$

Здесь

$$Z_{[0,T]} = \left\{u(t,x),\ f(t) \mid u \in C^{1,2}_{t,x}(G_{[0,T]}),\ f(t) \in C([0,T])\right\},$$

$$C^{1,2}_{t,x}(G_{[0,T]}) = \left\{f(t,x) \mid f, f_t \in C(G_{[0,T]}),\ \frac{\partial^k}{\partial x^k} f \in C(G_{[0,T]}), k = 0, 1, 2\right\}.$$

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 1.1 и имеют место соотношения*

$$a(t) \leq -A \sup_{t\in[0,+\infty)} \left(|g_{xx}(t,0)|\right),\ \text{где } A = \sup_{t\in[0,+\infty)} \frac{|b(t)|}{|g(t,0)|},$$

$$\int_0^{+\infty} |b(\eta)|\, d\eta + \int_0^{+\infty} |\varphi'(\eta) - \varphi(\eta)a(\eta)|\, d\eta \leq C.$$

Тогда для решения задачи (1)–(3) *в* $G_{[0,+\infty]}$ *справедливы неравенства*

$$|u(t,x)| + |f(t)| \leq C.$$

В области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n, z \in E_1\}$ рассмотрена задача Коши

$$u_t(t,x,z) = L_x(u) + u_{zz} + \lambda_1(t) M(t, u(t,x,z)) + \lambda_2(t) f(t,x,z), \tag{8}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{9}$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) u_{x_k x_k},\ \text{где } c_k(t) \in C\left[0,T\right],$$

функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в E_2, E_{n+1} и $G_{[0,T]}$ соответственно. Функции $c_k(t)$ такие, что оператор L_x при $t \in [0,T]$ является оператором эллиптического типа.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (8)–(9), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t, a(t), b(t)) = \varphi_1(t), \tag{10}$$

$$u_z(t, a(t), b(t)) = \varphi_2(t), \tag{11}$$

где $a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t))$, и условиям согласования

$$u_0(a(0), b(0)) = \varphi_1(0), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_0(a(0), b(0)) = \varphi_2(0). \tag{13}$$

Относительно функции $M(t, y)$ также предполагаем, что она имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение (14), и удовлетворяет этому соотношению :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t, y) \right| \leq M_0(1 + |y|^p),\ k = 0, 1, \dots, 9,\ 0 \leq t \leq T,\ y \in E_1. \tag{14}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t, y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t, y)$, $k \geq 1$ – целое, $M^{(0)}(t, y) = M(t, y)$.

Пусть при всех $t \in [0, T]$ выполняется соотношение

$$\left| M(t, \varphi_1(t)) f_z(t, a(t), b(t)) - M^{(1)}(t, \varphi_1(t)) \varphi_2(t) f(t, a(t), b(t)) \right| \geq \delta > 0. \tag{15}$$

Здесь δ – постоянная.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения) и удовлетворяет соотношениям :

$$|a'(t)| + |b'(t)| + |\varphi_1'(t)| + |\varphi_2'(t)| \leq C, \tag{16}$$

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha u_0(x, z) \right| + \left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha f(t, x, z) \right| \leq C,\ |\alpha| \leq 4,\ m = 0, 1, \dots, 5, \tag{17}$$

$$(t, x, z) \in G_{[0,T]}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* (12)–(17). *Тогда существует решение* $u(t, x, z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (8)–(11) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \sum_{k=0}^{3} \left| D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} u(t, x, z) \right| \leq C,\ (t, x, z) \in G_{[0,t^*]}, \tag{18}$$

$$|\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| \leq C,\ t \in G_{[0,t^*]}. \tag{19}$$

Здесь

$$Z(t^*) = \left\{ u(t, x, z),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \mid u \in C_{t,x,z}^{1,2,3}(G_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0, t^*]) \right\},$$

$$C_{t,x,z}^{1,2,3}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t, x, z) \mid f, f_t \in C(G_{[0,t^*]}),\ D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} f \in C(G_{[0,t^*]}), m = 0, 1, 2, 3,\ |\alpha| \leq 2 \right\}.$$

Теорема 2.2. *Решение* $u(t, x, z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (8)–(15), *удовлетворяющее соотношениям* (18), (19), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 2.1, 2.2 следует

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* (12)–(17). *Тогда существует и единственно решение* $u(t, x, z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (8)–(11) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (18), (19).

Также в области $\Omega_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, x = (x_1, \dots, x_n), 0 \leq x_k \leq \pi, k = \overline{1, n}, 0 \leq z \leq \pi\}$ рассмотрена задача идентификации тройки функций $\big(u(t, x, z), \lambda_1(t), \lambda_2(t)\big)$, удовлетворяющих краевой задаче для многомерного полулинейного уравнения

$$u_t(t, x, z) = \Delta u + u_{zz} + \lambda_1(t) M(t, u(t, x, z)) + \lambda_2(t) f(t, x, z), \tag{20}$$

$$u(0,x,z)=u_0(x,z), \tag{21}$$

$$u|_{x_k=0}=u|_{x_k=\pi}=0,\ k=1,\dots,n, \tag{22}$$

$$u|_{z=0}=u|_{z=\pi}=0, \tag{23}$$

и условиям переопределения

$$u(t,a(t),b(t))=\varphi_1(t), \tag{24}$$

$$u_z(t,a(t),b(t))=\varphi_2(t), \tag{25}$$

где $a(t)=(a_1(t),a_2(t),...,a_n(t))$. Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(a(0),b(0))=\varphi_1(0), \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(a(0),b(0))=\varphi_2(0). \tag{27}$$

Предположим, что функция $M(t,y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right|\le M_0(1+|y|^p),\ k=0,1,\dots,9,\ 0\le t\le T,\ y\in E_1. \tag{28}$$

Здесь M_0 – постоянная, p – фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t,y)=\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k\ge 1$ – целое, $M^{(0)}(t,y)=M(t,y)$.

Пусть при всех $t\in[0,T]$ выполняется соотношение

$$\left|M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t))-M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))\right|\ge\delta>0. \tag{29}$$

Здесь δ – фиксированная постоянная.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения (30), (31), и удовлетворяют этим соотношениям :

$$|a'(t)|+|b'(t)|+|\varphi_1'(t)|+|\varphi_2'(t)|\le C, \tag{30}$$

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial z^m}D_x^\alpha u_0(x,z)\right|+\left|\frac{\partial^m}{\partial z^m}D_x^\alpha f(t,x,z)\right|\le C,\ |\alpha|\le 4,\ m=0,1,\dots,5, \tag{31}$$

$$(t,x,z)\in G^*_{[0,T]}=\{(t,x,z)\mid 0\le t\le T, x\in E_n, z\in E_1\}.$$

Функции $f(t,x,z)$ и $u_0(x,z)$ заданы на $\Omega_{[0,T]}$ и нечетным образом продолжаются по переменным x_k, z на E_{n+1} :

$$u_0(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\sin kx_1\sin kx_2\dots\sin kx_n\sin kz,\ \alpha_k\text{ – постоянные}, \tag{32}$$

$$f(t,x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(t)\sin kx_1\sin kx_2\dots\sin kx_n\sin kz,\ \beta_k(t)\in C[0,T]. \tag{33}$$

Также предполагаем, что справедливо следующее условие при $(t,x,z)\in G^*_{[0,T]}$:

$$M(t,v(t,x))=\sum_{k=0}^{\infty}M_k(t)\sin kx_1\sin kx_2\dots\sin kx_n\sin kz, \tag{34}$$

для любых $v(t,x)$, таких что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz.$$

Коэффициенты $M_k(t)$, вообще говоря, зависят от выбора $v(t,x)$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* (26)–(34). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (20)–(25) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (18), (19), *где*

$$\widehat{Z}(t^*) = \left\{ u(t,x,z),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(\Omega_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0,t^*]) \right\}.$$

Теорема 2.4. *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (20)–(29), *для которого справедливо, что функция* $u(t,x,z)$ *допускает продолжение нечетным образом по пространственным переменным на* $G^*_{[0,t^*]}$, *и удовлетворяющее при* $(t,x,z) \in G^*_{[0,t^*]}$ *соотношениям* (18), (19), *единственно в классе* $\widehat{Z}(t^*)$.

Из теорем 2.3, 2.4 следует

Теорема 2.5. *Пусть выполняются условия* (26)–(34). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (20)–(25) *в классе* $\widehat{Z}(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (18), (19).

Замечание. В случае второй краевой задачи (20), (21), (35), (36) где

$$u_{x_k}|_{x_k=0} = u_{x_k}|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1,\ldots,n, \tag{35}$$

$$u_z|_{z=0} = u_z|_{z=\pi} = 0, \tag{36}$$

при выполнении условий

$$u_0(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz,\ \ \alpha_k \text{ – постоянные},$$

$$f(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz,\ \ \beta_k(t) \in C[0,T],$$

$$M(t, v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz,$$

для любых $v(t,x)$, таких что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \cos kx_1 \cos kx_2 \ldots \cos kx_n \cos kz,$$

справедливы аналогичные теоремы.

Список литературы

[1] Белов Ю.Я., Шипина Т.Н. *О разрешимости и некоторых свойствах решения одной обратной задачи для системы составного типа.* – Тезисы докладов Международной конференции "Симметрия в естествознании". – Красноярск. Август 1998г. С.26.

[2] Белов Ю.Я., Шипина Т.Н. *Об одной задаче определения функции источника.* – Тезисы докладов Международной конференции "Обратные задачи математической физики". – Новосибирск. 21 – 25 сентября 1998г. С.18.

[3] Р.В. Сорокин. *О стабилизации решения одной обратной задачи для системы составного типа* // Вестник Красноярского государственного университета, серия "Физико-математические науки". є1, 2005 г, с.167-178.

[4] Белов Ю.Я., Кантор С.А. *Метод слабой аппроксимации.* – КрасГУ, 1999.

[5] Belov Yu.Ya. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* - Utrecht: VSP, 2002. 211p.

[6] Белов Ю.Я., Фроленков И.В. *О некоторых задачах идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений* //Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования: Материалы конференции / Югорский научно-исслед. Институт информационных технологий. - Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005, С. 19-23.